Г.Г. Левитас

Нестандартные задачи

по математике в 7–11 классах

Илекса

Г.Г. Левитас

Нестандартные задачи по математике в 7–11 классах

Москва
ИЛЕКСА
2009

УДК 373:51
ББК 22.10
Л34

Левитас Г.Г.

Л34 Нестандартные задачи по математике в 7–11 классах.— М.: ИЛЕКСА, 2009.— 64 с.
ISBN 978-5-89237-189-6

В книге 155 задач с решениями, ответами, пояснениями на рисунках. В данной подборке ее материалы апробированы в практической работе математического кружка и во внеклассной работе школы (7–11 классы). В предисловии автора показано, как может быть организована подобная работа.

Опыт школы № 1199 свидетельствует о том, что систематическое решение нестандартных задач формирует и поддерживает интерес учеников как к математике, так и к самостоятельной творческой деятельности, к проявлению инициативы, самостоятельным занятиям без принуждения.

Задачи можно использовать на уроках математики, на занятиях математических кружков в целях развития нестандартного мышления.

Книга адресована учителям математики, учащимся, студентам педагогических вузов, абитуриентам, преподавателям довузовской подготовки.

ISBN 978-5-89237-189-6

Предисловие

В книге представлен опыт московской школы № 1199 ЮЗО по организации и проведению нетрадиционных математических конкурсов. Этот опыт дает хорошие результаты. Детей никто не призывает и не заставляет решать дополнительные задачи. Они сами с интересом участвуют в еженедельном конкурсе, в котором и свои победители, и свои награды (порой шутливые, например конфета из директорского фонда).

Конкурсы действительно необычны. Они проводятся с этакой внутренней легкостью, некоторой шутливостью, как-то естественно и самобытно, но вместе с тем деловито и серьезно.

1 сентября 2001 года на стенде Лиги Школ (школа № 1199 ЮЗО Москвы) появилось объявление:

Конкурс Задач Недели

1. В целях поддержания и развития в учащихся Лиги Школ любви и уважения к математике с 3 сентября 2001 года учреждается Конкурс Задач Недели.

2. Текст очередной Задачи Недели вывешивается каждый понедельник, в 8-00, на этом стенде.

3. Решение Задачи Недели подается учителю математики индивидуально в письменном виде не позднее пятницы на отдельном листе со всеми необходимыми пояснениями, рассуждениями и чертежами. Решение должно легко читаться и быть понятным.

4. Учитель может задать решившему любые вопросы по тексту решения.

5. Решившие Задачу Недели награждаются конфетой из Личного Фонда Директора, а их имена обнародуются на этом стенде (в порядке поступления решений) на следующей неделе.

6. Выигравшие годичный Конкурс Задач Недели награждаются в конце учебного года чем-нибудь хорошим.

С тех пор прошло пять лет. Каждый понедельник утром снимается со стенда текст предыдущей задачи и вывешивается новый. Вот один из таких плакатиков:

Задачу № 31 решил Саша Мухаметдинов

Он решал ее непосредственной проверкой делимости числа 1280000401 на простые числа и установил, что это число делится на 421. Честь ему и слава.

Возможно и другое решение. Вот оно:

$1280000401 = 20^7 + 20^2 + 1$. Многочлен $x^7 + x^2 + 1$ можно разложить на множители либо методом неопределенных коэффициентов, либо следующим преобразованием:

$$x^7 + x^2 + 1 = x^7 + x^6 + x^5 - x^6 - x^5 - x^4 + x^4 + x^3 + x^2 - x^3 + 1 =$$
$$= x^5(x^2 + x + 1) - x^4(x^2 + x + 1) + x^2(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1) =$$
$$= (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x + 1).$$

Это значит, что $20^7 + 20^2 + 1$ делится на $20^2 + 20 + 1$, то есть является составным числом.

Задача № 32 (20 – 24 мая 2002 г.)

Даны точки с координатами $A(0; 0)$, $B(0; 1)$, $C(1; 1)$, $D(2; 1)$, $E(3; 1)$, $F(3; 0)$, $G(2; 0)$, $H(1; 0)$. Чему равна сумма углов CAF, DAF и EAF?

В тот же день во время завтрака учитель математики (автор этих строк) еще раз объявит имена решивших задачу и вручит каждому из них от имени Фонда Директора конфету «Золотые колокола». А после уроков эта задача будет разобрана на заседании математического кружка.

В конце учебного года будут опубликованы итоги конкурса за год.

«Нечто хорошее» для победителя оказалось в 2002 году книжкой-самоделкой с текстами всех задач недели за год и их решениями, а также сведениями о том, кто и какую задачу решил.

В последующие годы победители получили в качестве премии книги по математике.

Всего в конкурсе из 70 учеников (примерно) школы приняли участие в 2001/2 учебном году 15 человек, в 2002/3 — 27 человек, в 2003/4 — 23 человека, в 2004/5 — 27 человек, в 2005/6 — 23 человека.

Думаю, что такой конкурс можно проводить не только в такой маленькой школе, как наша, но и в большой школе, в одной или нескольких параллелях (с 7 по 11 класс).
В этой книжке приведены все эти задачи. Некоторые из них придуманы мною, нашими выпускниками, учениками и учителями. Но подавляющее большинство задач — из математического фольклора, из «Кванта», «Математики в школе» и «Кенгуру», а также из многочисленных сборников задач. Моя роль сводилась к тому, чтобы отобрать задачи, читаемые со стенда, интересные и не очень трудные, разнообразные. К тому же я добивался, чтобы большинство задач было доступно детям от 7 до 11 класса.
Разумеется, использовать книжку можно по-разному, в том числе и как еще один сборник нестандартных задач для 7–11 классов: давать задачи на дом, нанести на карточки и предлагать сильным ученикам на уроках и мало ли еще как.
Замечу, что в некоторых задачах используется в качестве «произвольного натурального числа» номер школы 1199. Желательно изменять его на номер Вашей школы или на какие-нибудь другие важные числа: 988, 1812 и т.д.
Очень прошу всех, кто захочет поделиться со мной своими соображениями, позвонить по телефону (495)3145183 либо написать по E-mail: gglevitas@mtu-net.ru.

Автор

ЗАДАЧИ

1. В филателистическом обществе 9 человек. Из них 5 хотят на ближайших выборах избрать другого председателя. Однако действующему председателю удалось внушить членам общества, что самые демократические выборы — двухступенчатые. После этого он организовал выборы так, что остался у власти. Как он это сделал?

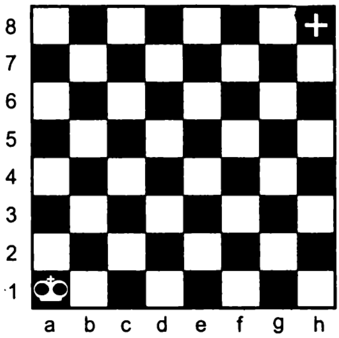


Рис. 1.

2. Двое по очереди передвигают по шахматной доске короля, каждый раз на одно поле: либо вверх, либо вправо, либо вправо-вверх по диагонали. Первоначальное положение короля — левое нижнее поле a1. Победителем будет тот, кто поставит короля на правое верхнее поле h8. Кто победит при правильной игре: ходящий первым или вторым? В чем состоит правильная игра (рис. 1)?

3. Найдите закономерности, которым подчиняются написанные числовые равенства. Напишите еще по одной строке в каждой рамке.

$$1 + 2 = 3$$
$$4 + 5 + 6 = 7 + 8$$
$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$$

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$
$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

4. Вы умеете перечеркнуть 9 точек ломаной из четырех звеньев (рис. 2). А как перечеркнуть аналогично расположенные 16 точек шестизвенной ломаной (рис. 3)? Как перечеркнуть n^2 точек ломаной, состоящей из $2n - 2$ звеньев?

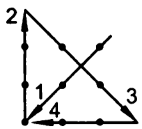


Рис. 2.

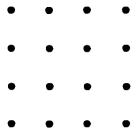


Рис. 3.

Рис. 4.

5. Какой высоты должно быть зеркало, чтобы в нем мог видеть себя во весь рост человек ростом 2 м (рис. 4)?

6. В первой бочке 50 л дегтя, а во второй 20 л меда. Из первой бочки во вторую перелили одну ложку дегтя и перемешали содержимое второй бочки. После этого из второй бочки в первую перелили одну (такую же!) ложку. Чего стало больше: меда в первой бочке или дегтя во второй? Ответ обоснуйте.

7. По обе стороны реки, на разных расстояниях от берегов и не на одном перпендикуляре к берегам, расположены деревни A и B. Как определить место постройки моста через реку, чтобы путь из A в B был кратчайшим (рис. 5)?

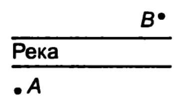


Рис. 5.

8. Докажите, что число $7^{7^{7^{7}}} - 7^{7^{7}}$ делится на 10.

9. Семь сладкоежек разделили между собой 100 конфет так, что у всех оказалось разное число конфет. Докажите, что найдутся трое из них, у которых вместе не меньше 50 конфет.

10. Что больше: $1^1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + 1000^{1000}$ или $2^{(2^{(2^{(2^{2})})})}$?

11. Решите уравнение:

$$(x^2 + x + 1)(x^{10} + x^9 + \ldots + x + 1) = (x^6 + x^5 + \ldots + x + 1)^2.$$

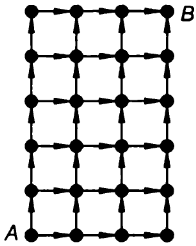


Рис. 6.

12. Сколько кратчайших путей ведут из A в B по этой сетке (рис. 6)?

13. Число $\frac{100!}{6^{100}}$ записали в виде несократимой дроби. Найдите ее знаменатель.

14. XXI век начался в понедельник. В какие еще дни может начинаться век в григорианском календаре?

15. Трое делят добычу. Как они могут это сделать, не имея никаких инструментов, чтобы никто не мог впоследствии жаловаться ни на везение, ни на обман?

16. В математическом кружке 13 человек. Имеются весы, с помощью которых за одно взвешивание можно узнать суммарную массу двух человек (не больше и не меньше). Придумайте способ выяснить за 8 взвешиваний суммарную массу всех кружковцев.

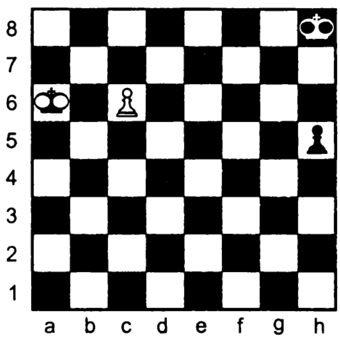


Рис. 7.

17. Решите знаменитый шахматный этюд венгерского гроссмейстера Рети: Б. Кр h8, п. c6. Ч. Кр a6, п. h5. Белые начинают и делают ничью (рис. 7).

18. Федя и Петя спускаются на эскалаторе. Посередине пути Федя срывает с Пети шапку и перебрасывает ее на эскалатор, двигающийся параллельно в другую сторону с той же скоростью. Петя сразу бросается бежать вниз, а затем по параллельному эскалатору вверх — за шапкой. Федя же сразу бросается бежать вверх, а затем по параллельному эскалатору вниз. Кто раньше добежит до шапки, если собственные скорости ребят одинаковы?

19. Найдите такие натуральные числа, которые уменьшаются в 57 раз при зачеркивании первой цифры.

20. Каждую из 8 точек, лежащих на одной прямой, соединили с каждой из 7 точек, лежащих на параллельной прямой. В скольких точках пересекаются полученные отрезки, если никакие две точки пересечения не совпадают?

21. Сколько треугольников на этом чертеже (рис. 8)?

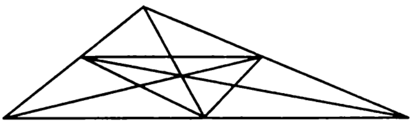


Рис. 8.

22. Идя по эскалатору по направлению его движения с некоторой собственной скоростью, пассажир насчитал на нем a ступенек. Идя против движения с той же собственной скоростью, он насчитал на нем b ступенек. Сколько ступенек на эскалаторе?

23. Пусть a, b и c — натуральные числа. Докажите, что число $a^3 + b^3 + c^3$ тогда и только тогда делится на 6, когда $a + b + c$ делится на 6.

24. Поставьте в клетках квадрата 5×5 такие числа, чтобы сумма всех двадцати пяти чисел была отрицательная, а сумма четырех чисел в каждом квадратике 2×2 была положительная.

25. Пункты A и B расположены на берегу реки. Из A в B и обратно движутся пешеход и лодка. Их собственные скорости одинаковы. Кто пройдет весь путь быстрее?

26. Члены Клуба киссеров при встрече целуются одним поцелуем (в губки) или двумя (в щечку или в носик). Однажды встретились 10 киссеров. Мальчики поцеловались друг с другом в носик, девочки — в губки. А мальчики с девочками поцеловались в щечку. Сколько было девочек, если всего поцелуев было 84?

27. Найдите все пары натуральных чисел, у которых НОД на 10 меньше, чем НОК.

28. Треугольник разделен на четыре многоугольника отрезками, проведенными из двух его вершин. Могут ли быть равновелики между собой три из этих многоугольников; все четыре многоугольника?

29. Надо купить 10 пирожных. В магазине имеются только эклеры, безе и корзиночки. Сколькими способами можно выбрать пирожные?

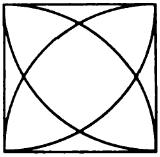


Рис. 9.

30. Построены четыре круга с центрами в вершинах квадрата и радиусами, равными стороне квадрата. Найдите площадь пересечения этих кругов, если сторона квадрата равна 1 (рис. 9).

31. Докажите, что число 1280000401 — составное.

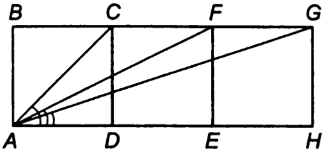


Рис. 10.

32. Прямоугольник на этом рисунке состоит из трех квадратов: $ABCD$, $DCFE$ и $EFGH$. Чему равна сумма углов CAH, FAH и GAH (рис. 10)?

33. Какие из следующих двойных неравенств невозможны, если $a < b < c$? Приведите примеры, когда остальные неравенства выполняются.

а) $a^2 < b^2 < c^2$; б) $a^2 < c^2 < b^2$; в) $b^2 < a^2 < c^2$;
г) $b^2 < c^2 < a^2$; д) $c^2 < a^2 < b^2$; е) $c^2 < b^2 < a^2$.

34. Укажите 17 последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одного простого числа.

35. Докажите, что $n^5 + 4n$ делится на 5 при любом натуральном n. Использовать метод математической индукции не разрешается.

36. В вагоне 80% пассажиров — русые и 70% — мужчины. Верно ли, что русые мужчины составляют большинство пассажиров вагона?

37. На шахматной доске стоят несколько ладей. Докажите, что какая-то ладья бьет не более двух других.

38. Для поправки здоровья богатырю требуется выпить из молочной реки ровно 43 литра. У него есть два ведра в 24 и 11 литров и достаточно большая бочка. Сможет ли он поправить свое здоровье?

39. Число $\overline{xyxxyx}$ при некоторых x и y делится на $\overline{xxxx}$. Чему равно частное?

40. Представьте число 1 в виде суммы четырех долей (то есть дробей вида $\frac{1}{n}$) с попарно различными натуральными знаменателями.

41. Напишите восьмизначные числа по следующим условиям:

1) в каждом из них используются цифры 1, 2, 3 и 4, по два раза каждая;

2) между единицами стоит 1 цифра;

3) между двойками стоят 2 цифры;

4) между тройками стоят 3 цифры;

5) между четверками стоят 4 цифры.

42. Весь путь автобус ехал с неизменной скоростью. В первую часть пути автобус проехал столько километров, сколько минут ему осталось ехать. Во вторую часть пути автобус проехал столько километров, сколько минут ехал в первую часть пути. Какова скорость автобуса?

43. Можно ли из цифр 3, 4, 5, 9, 9 составить пятизначное число, являющееся точным квадратом (квадратом натурального числа)?

44. Докажите, что если все углы выпуклого шестиугольника кратны 60°, то все они равны между собой.

45. Все кости домино выложены в цепь по правилам игры. На одном конце цепи — шестерка. Сколько очков на другом конце (рис. 11)?

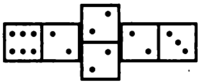


Рис. 11.

46. Точки A, B, C и D лежат на прямой, а точка M — вне этой прямой. Все точки попарно соединили отрезками. Могли ли получиться 6 равнобедренных треугольников?

47. Докажите, не пользуясь методом математической индукции, что число $n^5 - n$ оканчивается нулем при любом натуральном n.

48. Сколько ребер и сколько вершин у двадцатигранника, если в каждой его вершине сходятся по пять ребер и каждая грань — треугольник?

49. Сколько граней и сколько вершин у двенадцатиреберника, если в каждой его вершине сходятся по четыре ребра и каждая грань — треугольник?

50. Сколько граней и сколько вершин у двадцативершинника, если в каждой его вершине сходятся по три ребра и каждая грань — пятиугольник?

51. $\overline{\textit{УГУ}}$ делится на 13. Делится ли на 13 $\overline{\textit{ГУГ}}$?

52. Докажите, что выпуклый многогранник не может иметь 7 ребер.

53. Обойдите ходом коня все 64 клетки шахматной доски, не побывав ни на одном поле дважды.

54. В меню столовой 10 блюд. 1 апреля директор столовой распорядился не повторять одинаковых заказов, то есть не выдавать никому в течение дня тот набор блюд, который уже был однажды заказан. Сколько людей он может обслужить в этот день?

55. Числитель дроби равен 1, а знаменатель — четырехзначное число, начинающееся цифрами 10. Какими цифрами может оканчиваться число, стоящее в знаменателе, если известно, что дробь можно обратить в конечную десятичную?

56. Придумайте такое семизначное число, у которого первая цифра равна числу нулей в этом числе, вторая — числу единиц, третья — числу двоек, ..., седьмая — числу шестерок.

Хорошо бы выяснить, бывают ли аналогичные числа с другим числом знаков.

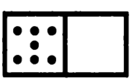


Рис. 12.

57. В обычном домино 28 косточек, а на каждом очке от 0 до 6 единиц. Сколько будет косточек в увеличенном домино, у которого на каждом очке от 0 до 7 единиц (рис. 12)?

58. Чему равна сумма всех пятизначных чисел, каждое из которых записывается неповторяющимися цифрами 1, 2, 3, 4 и 5?

59. В краже подозреваются четверо: А, Б, В и Г. На допросе они сказали:

А: Это сделал Б.

Б: Это сделал Г.

В: Это сделал не я.

Г: Б лжет, что это сделал я.

Правду сказал только один. Кто совершил кражу?

60. В треугольнике ABC $AB = BC$, $\angle B = 20°$, $\angle MAC = 60°$, $\angle NCA = 50°$. Найдите $\angle AMN$ (рис. 13).

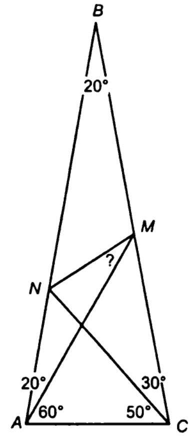


Рис. 13.

61. Найдите два наименьших последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на 11.

62. Может ли число $\overline{abcabc}$ быть точным квадратом?

63. Среди философов Лапуты каждый седьмой — математик, а каждый девятый из математиков — философ. Кого больше на Лапуте — философов или математиков? Во сколько раз?

64. Федя уверяет, что задуманное им число есть точный квадрат и что у этого числа столько же делителей, оканчивающихся на 5, сколько и всех остальных делителей. Не ошибается ли он?

65. Решите задачу, десятилетиями предлагающуюся в США для проверки геометрических знаний школьников:

«Найти площадь прямоугольного треугольника с гипотенузой 10 дюймов и опущенной на него высотой в 6 дюймов».

66. За круглым столом 9 человек: рыцари (говорящие всегда правду) и лжецы (лгущие всегда). Каждый сказал: «Мои соседи — лжец и рыцарь». Сколько всего лжецов за этим столом?

67. Имеются шесть кубиков: три весом 10 г (красный, синий и зеленый) и три весом 11 г (тех же цветов). Как в два взвешивания на чашечных весах без гирь отделить легкие кубики от тяжелых?

68. Как, нажав всего шесть раз на клавиши, узнать на калькуляторе, не имеющем клавиши «x^2», чему равно произведение $836 \cdot 837$? (Калькулятор включен и находится в начальном положении: на дисплее — 0. После шестого нажатия клавиши на дисплее должно читаться число 699 732.)

69. На сколько частей окажется разделенным этот прямоугольник, если провести еще и две его диагонали (рис. 14)?

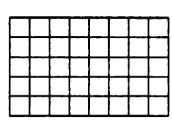


Рис. 14.

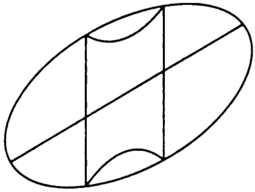


Рис. 15.

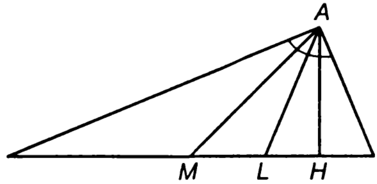


Рис. 16.

70. Сделайте такой рисунок, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя им по одному и тому же отрезку дважды (рис. 15).

71. Из вершины A треугольника провели биссектрису, медиану и высоту. Они разделили угол A на четыре равных угла. Чему равен угол A (рис. 16)?

72. Никакие две из 68 монет не имеют одинакового веса. Как в 100 взвешиваний найти самую легкую и самую тяжелую из них?

73. В углах каждого квадрата стоят числа 1, 2, 3 и 4. Квадраты сложены в стопку. Может ли каждая сумма по углам стопки равняться 1199?

74. Могут ли 2003 прямые на плоскости иметь (каждая) пересечение с 1199 из них?

75. В последовательности нечетных натуральных чисел каждое следующее число равно предыдущему, сложенному с самой большой цифрой предыдущего числа. Каким может быть наибольшее число членов такой последовательности?

76. Как разделить арбуз на 4 части так, чтобы после съедения арбуза осталось 5 корок?

77. Решите уравнение $x^2 - 1 = y$, где x и y — простые числа.

78. Решите уравнение $x^2 + 2 = y$, где x и y — простые числа.

79. Даны два отрезка: AB и CD, лежащие на параллельных прямых. Как построить их середины, имея в руках лишь линейку и карандаш? Отдельно рассмотрите случаи, когда $AB < CD$ и когда $AB = CD$.

80. Как с помощью такого рисунка (рис. 17) решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ x^4 + y^4 = 2. \end{cases}$$

Решите эту систему найденным Вами способом.

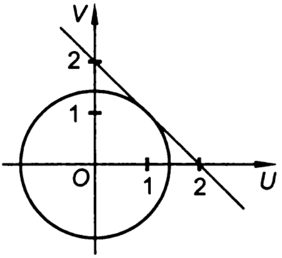


Рис. 17.

81. Среди 25 монет 3 фальшивые (более легкие). Как двумя взвешиваниями на чашечных весах без гирь отобрать из этих 25 монет 8 хороших монет?

82. Петя сказал: «Позавчера мне было еще только 10 лет, а в будущем году мне будет 13 лет». Возможно ли это?

83. Число записано 2398 цифрами, из которых первые 1199 — единицы, а следующие 1199 — двойки. Докажите, что это число равно произведению двух последовательных натуральных чисел.

84. Продается набор одинаковых кубиков, каждая грань которых одноцветная — либо белая, либо черная, и нет двух одинаково окрашенных кубиков. Один кубик стоит 10 рублей. Какой может быть наибольшая цена всего набора, если упаковка бесплатная?

85. Продается набор одинаковых кубиков, каждая грань которых одноцветная — либо белая, либо черная, либо красная, и нет двух одинаково окрашенных кубиков. Один кубик стоит 15 рублей. Какой может быть наибольшая цена всего набора, если упаковка стоит 5 рублей?

86. Найдите не менее двух троек натуральных чисел x, y и z, являющихся решениями уравнения

$$x^2 + 5y^2 + 34z^2 + 2xy - 10xz - 22yz = 0.$$

87. Разделите квадрат на 20 равных треугольников, не проводя разрезов, параллельных сторонам квадрата.

88. Уравнение $(x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) = 1$ имеет решение (3; 2). Имеет ли это уравнение другие решения в натуральных числах?

89. Существует ли выпуклый шестиугольник, все углы которого равны между собой, а стороны равны 1, 2, 3, 4, 5 и 6 см?

90. Докажите, что $9^{8n+4} - 7^{8n+4}$ при любом натуральном n делится на 20.

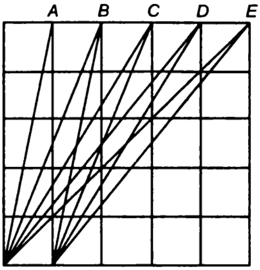


Рис. 18.

91. Чему равна сумма углов A, B, C, D и E (рис. 18)?

92. Продается набор жетонов. На каждом жетоне написано двузначное число. Никакие два числа в сумме не равны 100. Какова наибольшая цена набора, если каждый стоит 1 копейку, а упаковка ничего не стоит?

93. Функция

$$y = (x-b)(x-c) : (a-b)(a-c) +$$
$$+ (x-c)(x-a) : (b-c)(b-a) + (x-a)(x-b) : (c-a)(c-b) - 1$$

имеет три корня: числа a, b и c. Как это согласовать с тем, что эта функция не может иметь степени выше второй?

94. Долей называется дробь, у которой числитель равен 1, а знаменатель — любое натуральное число. Число 1 можно представить в виде суммы трех различных долей: $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$. А можно ли представить 1 в виде суммы пяти различных долей?

95. Автомат обменивает одну копейку на пять рублевых монет, а также обменивает один рубль на пять копеек. Можно ли получить у этого автомата одинаковое число рублей и копеек, если начать обмен с одной копейки?

96. Больному нужно принять 2 таблетки вида A и 2 таблетки вида B в течение двух дней. Необходимо принимать одновременно по одной таблетке каждого вида. Больной нечаянно смешал все таблетки в кучку. Как ему быть?

97. Знаете ли вы теорему Эйлера о многогранниках? Она утверждает, что если B — число вершин выпуклого многогранника, Γ — число его граней, P — число его ребер, то $B + \Gamma - P = 2$. С помощью этой теоремы решите следующую задачу. Покрышка футбольного мяча сплошь состоит из выпуклых пятиугольников и шестиугольников, причем в каждой вершине сходятся по три многоугольника. Сколько среди них пятиугольников (рис. 19)?


Рис. 19.

98. У треугольника ABC $\angle A = \angle C = 50°$. Точка M лежит внутри треугольника. $\angle MAC = 10°$, $\angle MCA = 30°$. Чему равен $\angle AMB$ (рис. 20)?

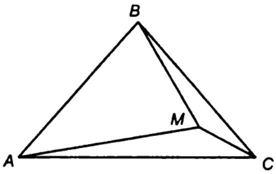


Рис. 20.

99. Решите уравнение в натуральных числах: $1! + \ldots + x! = y^2$.

100. Сколько можно придумать семизначных телефонных номеров, записываемых нечетными цифрами?

101. Представьте в виде квадрата суммы выражение

$$(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1.$$

102. Прямоугольник 3×9, разделенный на 27 единичных квадратиков, разрезали по линиям деления на 8 квадратов. Сколько каких квадратов получилось?

103. Какое двузначное число после удвоения становится точным квадратом, а, будучи утроено, становится точным кубом?

104. Какими одинаковыми четырехугольниками можно вымостить плоскость?

105. Петя и Веня пробежали вниз по эскалатору, идущему вниз. Петя бежал со скоростью 2 ступеньки в секунду и насчитал 140 ступенек. Веня бежал со скоростью 3 ступеньки в секунду и насчитал 168 ступенек. Сколько ступенек на открытой части этого эскалатора?

106. Сколько нулей на конце числа 1000! ?

107. Одаренный малыш научился считать в уме раньше, чем выучил значения цифр. Однажды он написал: $13 \times 13 = 213$. Что он имел в виду?

108. Красная Шапочка вышла из дома в 10^{00} и в 14^{00} пришла к бабушке. Назавтра она вышла из дома бабушки в 10^{00} и по той же дорожке в 14^{00} пришла домой. Докажите, что на этой дорожке имеется такая точка, мимо которой Красная Шапочка прошла оба раза в одно и то же время.

2 зак. 96

109. По кругу расположено 21 натуральное число. Из двух соседних чисел одно обязательно делится на другое. Докажите, что найдутся и два не соседних числа с тем же свойством.

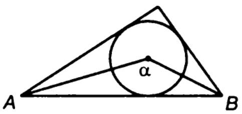


Рис. 21.

110. Докажите, что каждая сторона треугольника видна из центра вписанной окружности под тупым углом (рис. 21).

111. Тринадцать утверждений пронумерованы по порядку. Каждое утверждение гласит: «Среди всех тринадцати утверждений ложно столько, каков мой номер». Сколько истинных утверждений в этом тексте?

112. На дачном участке кое-где растут деревья. Хозяин участка, его жена и дочь хотят найти место между деревьями, на котором можно было бы устроить клумбу в форме равностороннего треугольника со стороной 3 м. Как им это сделать?

113. Можно ли, используя каждую из 10 цифр по одному разу, записать натуральное число и его квадрат?

114. Митя обнаружил, что $\frac{1}{n}$ часть класса написала контрольную работу лучше него, а $\frac{1}{n-1}$ часть класса написала работу хуже него. Сколько учеников в классе Мити?

115. Имеются три числовых автомата. Первый автомат, получив пару натуральных чисел $(m; n)$, преобразует ее в пару $(n; m)$; второй преобразует пару $(m; n)$ в пару $(m; n - m)$; третий преобразует пару $(m; n)$ в пару $(m; m + n)$. Составьте такие программы, по которым эти автоматы преобразуют пару (19; 86):

1) в пару (13; 31); 2) в пару (12; 21).

116. Можно ли, используя каждую из 10 цифр по одному разу, записать квадрат и куб одного и того же натурального числа?

117. Найдите углы треугольника, у которого центры вписанной и описанной окружностей симметричны относительно одной из его сторон.

118. Сумма натуральных чисел от 1 до $n - 1$ равна сумме натуральных чисел от $n + 1$ до m. Найдите такие n и m.

119. Чему могут равняться углы равнобедренного треугольника, который можно разрезать на два равнобедренных треугольника?

120. На какое наименьшее натуральное число нужно разделить произведение $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 6! \cdot 7! \cdot 8! \cdot 9! \cdot 10!$, чтобы сделать из него квадрат некоторого натурального числа?

121. Две старушки вышли одновременно, на рассвете, навстречу друг другу, первая из пункта A, вторая из пункта B. Они встретились в 12^{00} и пошли дальше, не останавливаясь, каждая с той же, своей скоростью. В 16^{00} первая старушка пришла в пункт B, в 21^{00} вторая старушка пришла в пункт A. В котором часу был рассвет?

122. Не используя логарифмов, определите число знаков в знаменитом шахматном числе $2^{64} - 1$ (именно столько зерен попросил в награду, согласно легенде, изобретатель шахматной игры).

123. Обменный пункт платит 1 доллар за 27 рублей и 1 евро за 35 рублей. Мельче доллара и евро в обменном пункте валюты нет. Перечислите способы, какими он может обменять 1000 рублей.

124. Пусть $a^2 - b = b^2 - c = c^2 - a$, причем $a \neq b$, $b \neq c$, $a \neq c$. Найдите значение выражения $(a + b + 1)(b + c + 1)(c + a + 1)$.

125. Имеются 12 монет, среди которых одна — фальшивая. Как тремя взвешиваниями на чашечных весах без гирь определить, какая монета фальшивая, и сравнить ее массу с массой настоящей монеты?

126. Квадрат 6×6 выложен прямоугольниками 2×1. Докажите, что можно разрезать этот квадрат на два прямоугольника таким способом, при котором ни один из прямоугольников 2×1 не будет разрезан (рис. 22).

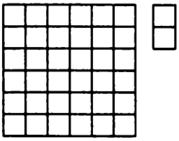


Рис. 22.

127. В одной кучке 7 камней, в другой 6, в третьей 5. Каждый из двух играющих по очереди берет любое число камней из одной кучки. Выигрывает берущий последний камень. Кто выиграет при правильной игре — первый или второй? Как он должен играть?

128. Семь человек стоят в круге. Каждый говорит: рядом со мной ровно один лжец. Сколько лжецов в круге?

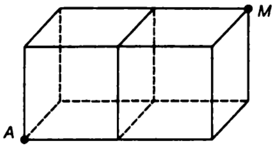


Рис. 23.

129. Из 20 спичек с помощью пластилина слеплены два кубика. В одной из вершин получившегося прямоугольного параллелепипеда находится муравей, а в противоположной вершине — капля меда. Сколькими кратчайшими путями может добраться муравей до меда (рис. 23)?

130. Выписаны подряд все натуральные числа от 1 до 1199. Каких цифр написано больше — единиц или девяток?

131. В листе бумаги формата А6 проделайте отверстие, в которое свободно проходит ваша голова. (Предъявляется лист, а не описание решения.)

132. $1199! = \overline{\ldots a_n a_{n-1} \ldots a_1}$. Какое самое длинное число $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1}$ вы можете назвать?

133. Восстановите таблицу итогов шахматного турнира.

	Андрей	Борис	Виктор	Глеб	Очки	Место
Андрей	■			1/2		1
Борис		■				2
Виктор			■			3
Глеб				■		4

134. Докажите, что среди шести человек обязательно найдутся либо три попарно знакомых, либо три попарно незнакомых.

135. Три отрезка лежат на одной прямой. Каждая пара отрезков имеет общую точку. Имеют ли общую точку все три отрезка? Объясните ответ.

136. В школе № 1199 телефон 4275198. Запишем номер самой школы и три числа: 4, 25 и 18. Как по этим числам получить телефон школы?

137. В горизонтальном ряду лежат 10 колец, одинаковых на вид. Слева лежат несколько колец (одно или более) массой по 9 г ка-

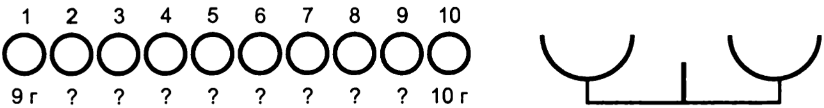


Рис. 24.

ждое, а справа несколько колец (одно или более) массой по 10 г каждое. Как двумя взвешиваниями на чашечных весах без гирь установить общую массу всех колец (рис. 24)?

138. С помощью семи единиц и знаков арифметических действий напишите число 1199.

139. Постройте прямую, которая делит данную фигуру, состоящую из пяти квадратов, на два многоугольника равной площади.

140. Какое число, будучи прочитано справа налево, увеличивается в 6 раз?

141. Дед Мороз и Снегурочка играют, стирая с доски по очереди буквы в надписи «С новым годом!». Каждый может своим ходом стереть либо одну любую букву, либо сразу несколько одинаковых букв. Выигрывает тот, кто сотрет последнюю букву и оставит на доске только восклицательный знак. Начинает Снегурочка. Кто выиграет при правильной игре?

142. Числа натурального ряда соединены отрезками так, что из любого числа n можно пройти к числу $2n$ и обратно, а также к числу $3n + 1$ и обратно (рис. 25). Как по этим отрезкам пройти от числа 1 к каждому из чисел первого десятка?

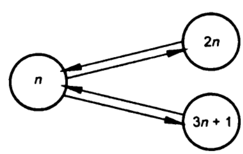


Рис. 25.

143. Решите уравнение в натуральных числах:

$$\frac{10}{x+10}+\frac{10\cdot 9}{(x+10)(x+9)}+\ldots+\frac{10\cdot 9\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(x+10)(x+9)\ldots(x+2)(x+1)}=5.$$

144. Между пятью и шестью часами минутная стрелка находилась позади часовой ровно на три минутных деления. Какое время показывали часы?

145. Докажите, что разность $\underbrace{11\ldots1}_{n}000-n$ делится на 9.

146. Число диагоналей выпуклого многоугольника вдвое больше числа его сторон. Чему равно число сторон многоугольника?

147. Докажите, что если у выпуклого многоугольника все диагонали равны между собой, то число его сторон 4 или 5.

148. Верно ли, что из любых 6 натуральных чисел найдутся такие различные числа a и b, что либо $a + b$, либо $a - b$ делится на 10?

149. В квадрате $ABCD$ взяты наугад 5 точек. Надо доказать, что найдутся две точки, расстояние между которыми не превосходит $AC : 2$.

150. Может ли n^4 равняться 76 864? Ответьте на вопрос, не вычисляя четвертых степеней натуральных чисел.

151. Вова посмотрел на часы между 10 и 11 часами и обнаружил, что часовая и минутная стрелки образуют развернутый угол. Он снова посмотрел на часы между 16 и 17 часами и обнаружил, что стрелки совпадают. Сколько времени прошло между этими двумя событиями?

152. Придумайте такой набор натуральных чисел a, b, c, d, e, f, g, h, k, чтобы

$$a^2 + b^3 + c^4 + d^5 + e^6 + f^7 + g^8 + h^9 = k^{10}.$$

153. Придумайте такой набор натуральных чисел a, b, c, d, e, f, g, h, чтобы

$$a^2 + b^3 + c^4 + d^6 + e^7 + f^8 + g^9 = h^{10}.$$

154. Расположите на плоскости 6 точек так, чтобы из каждой точки можно было увидеть ровно 4 точки.

155. Имеются весы, на обе чаши которых можно класть и гири, и взвешиваемый товар. Нужно подобрать такие наибольшие массы для четырех гирь, чтобы ими можно было взвесить любое целое число граммов от 1 до суммарной массы этих гирь.

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

1. Председатель так организовал выборы: он разделил всех на 3 курии, которые избрали выборщиков. А выборщики избрали председателя. При этом курии он сформировал следующим образом: в первой два его сторонника и один противник, то же во второй, а в третьей — три противника. В результате первая и вторая курии избрали выборщиками его сторонников, а третья — его противника. Так что из трех выборщиков двое были за него (рис. 26).

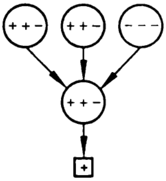


Рис. 26.

2. Отметим на доске плюсами поля, которые являются выигрышными, т.е. те, попав на которые, мы выигрываем. Минусами отметим поля, на которые нам ходить опасно. Очевидно, поле h8 выигрышное, а поля g8, g7, h7 проигрышные (рис. 27). Но тогда поле f8 выигрышное, так как, если мы попадем на это поле, противник сможет пойти только на проигрышные поля. Точно так же выигрышными являются поля f6 и h6. А вот поле f7 — проигрышное, так как противник с него может пойти на выигрышное поле f8 (рис. 28). Размечая поля сверху вниз и справа налево плюсами и минусами, убеждаемся, что выигрышными являются поля, стоящие на пересечении горизонталей 2, 4, 6, 8 с вертикалями b, d, f, h. Если мы

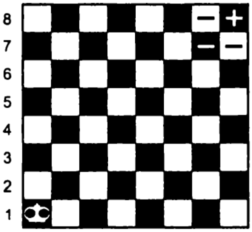


Рис. 27.

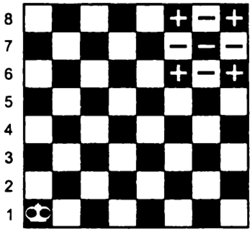


Рис. 28.

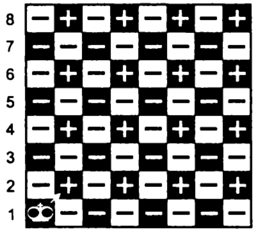


Рис. 29.

попадем на одно из этих полей, то выиграем. Это может сделать первый ходящий, если пойдет на поле b2, а в дальнейшем будет становиться на клетки, в которых пересекаются четные горизонтали и четные вертикали (рис. 29).

3. Общий вид строк на первом листе такой:

$$n^2 + (n^2 + 1) + \ldots + (n^2 + n) = (n^2 + n + 1) + \ldots + (n^2 + 2n);$$

4-я строка: $16 + 17 + 19 + 20 = 21 + 22 + 23 + 24$.

Общий вид строк на втором листе такой:

$$(2n^2 + n)^2 + \ldots + (2n^2 + 2n)^2 = (2n^2 + 2n + 1)^2 + \ldots + (2n^2 + 3n)^2;$$

4-я строка: $36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2$.

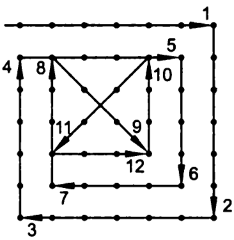


Рис. 30.

4. Нужно $n - 3$ вертикальными и $n - 3$ горизонтальными отрезками вычеркнуть все точки, кроме точек в соседних трех столбцах и трех строках, т.е. оставить 9 точек. А эти 9 точек можно перечеркнуть 4 отрезками. Всего получается $(n - 3) + (n - 3) + 4 = 2n - 2$. Вот решение для 7^2 точек (рис. 30).

5. Нужно зеркало в 1 м. Доказательство основано на свойстве средней линии треугольника (рис. 31). Ученики, еще не знакомые с этим геометрическим материалом, могут проверить ответ, экспериментируя с небольшим зеркальцем. В нем можно увидеть только такую часть лица, которая вдвое выше вертикального размера зеркальца. Никакие удаления зеркальца от лица этот закон не нарушают. При удалении зеркальца становится более мелким изображение, и только.

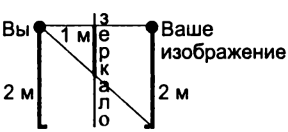


Рис. 31.

6. В первой бочке оказалось столько же меда, сколько оказалось дегтя во второй бочке.

Доказательство. Пусть в первой бочке оказалось x литров меда. Тогда в ней $50 - x$ литров дегтя. Так как всего в двух бочках 50 литров дегтя, то во второй бочке $50 - (50 - x) = x$ литров дегтя, т.е. столько же, сколько меда в первой бочке.

При этом несущественно, сколько вещества в каждой бочке. Несущественно и число переливаний. Важно лишь, что в каждой бочке после всех переливаний остается столько же вещества, сколько было первоначально.

7. Нужно перенести точку A перпендикулярно берегам реки на расстояние, равное ширине реки, в направлении от A к реке (рис. 32).

Полученный отрезок $A'B$ пересечет в точке M тот берег, на котором расположена точка B. Через эту точку и должен проходить мост MP. Для доказательства того, что путь $APMB$ — кратчайший, «построим» еще один мост — XY. Путь $AYXB$ длиннее пути $APMB$, так как $A'XB > A'B$ (неравенство треугольника), $A'A = XY = MP$ (свойство параллелограмма), а значит, $AYXB = AA'XB > AA'MB = APMB$, что и требовалось доказать (рис. 33).

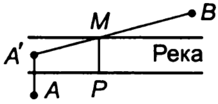


Рис. 32.

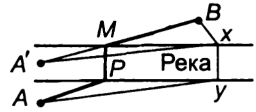


Рис. 33.

8. Число 7^n оканчивается на 01, если n делится на 4;
оно оканчивается на 07, если n при делении на 4 дает в остатке 1;
оно оканчивается на 49, если n при делении на 4 дает в остатке 2;
оно оканчивается на 43, если n при делении на 4 дает в остатке 3.

Значит, 7^7 оканчивается на 43.

А так как число, оканчивающееся на 43, при делении на 4 дает в остатке 3, то и 7^{7^7} оканчивается на 43. Но тогда и $7^{7^{7^7}}$ оканчивается на 43. Итак, числа $7^{7^{7^7}}$ и 7^{7^7} оканчиваются на 43, а значит, их разность делится не только на 10, но и на 100.

9. Расположим сладкоежек по возрастанию числа конфет:

1-й, 2-й, 3-й, 4-й, 5-й, 6-й, 7-й.

Если никакие трое не имеют вместе 50 конфет, то не имеют их и последние трое. А значит, 5-й сладкоежка имеет не более 15 конфет. Но тогда 4-й сладкоежка имеет не более 14 конфет, 3-й — не более 13, 2-й — не

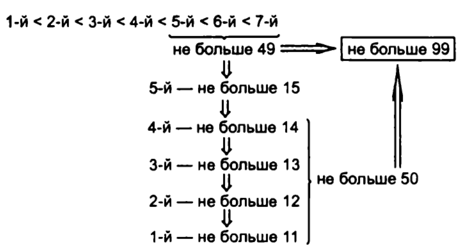


Рис. 34.

более 12, 1-й — не более 11. То есть первые четверо имеют вместе не более 50 конфет. Получается, что первые четверо имеют не более 50, а последние трое имеют менее 50 конфет. Значит, общее число конфет менее 100, что не соответствует условию (рис. 34).

10. Первое выражение меньше, чем сумма тысячи слагаемых, каждое из которых равно 1000^{1000}, а значит, оно меньше, чем $1000 \cdot 1000^{1000}$, т.е. меньше числа 1000^{1001}. А так как $1000 < 1024 = 2^{10}$, то первое выражение меньше, чем 2^{10010}.

Второе выражение равно $2^{(2^{(2^{(2^2)})})} = 2^{(2^{(2^4)})} = 2^{(2^{16})} = 2^{65536}$, т.е. оно больше первого.

11. Умножив обе части уравнения на $(x-1)^2$, получим:

$$(x^3-1)(x^{11}-1) = (x^7-1)^2.$$

Далее имеем: $x^{14} - x^{11} - x^3 + 1 = x^{14} - 2x^7 + 1$, $x^{11} - 2x^7 + x^3 = 0$, $x^3(x^8 - 2x^4 + 1) = 0$, $x^3(x^4-1)^2 = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

Остается проверить тот корень, который мог получиться от умножения обеих частей уравнения на $(x-1)^2$. Это $x = 1$. Подстановкой убеждаемся, что этот корень — посторонний.

Ответ: $\{0; -1\}$.

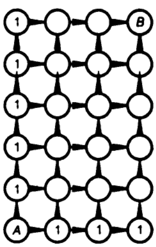


Рис. 35.

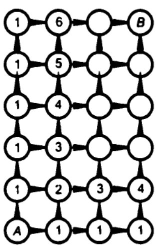


Рис. 36.

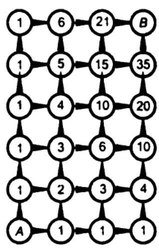


Рис.37.

12. В каждую точку нижнего и левого ряда можно попасть только одним путем (рис. 35). В каждую из остальных точек можно попасть либо из соседней точки слева, либо из соседней точки снизу. Поэтому можно сначала найти число путей во вторые слева и снизу ряды точек (рис. 36), затем в следующие и т.д., складывая числа по следующему правилу:

$$\begin{array}{ccc} n & \longrightarrow & n+m \\ & & \uparrow \\ & & m \end{array}$$

Ответ: 56 путей (рис. 37).

13. Знаменатель 6^{100} равен $2^{100} \cdot 3^{100}$. В числителе 100! имеются:

50 множителей, делящихся на 2, среди них

25 множителей делятся на 2^2, среди них

12 множителей делятся на 2^3, среди них

6 множителей делятся на 2^4, среди них

3 множителя делятся на 2^5, среди них

1 множитель делится на 2^6.

Поэтому 100! делится на $2^{50+25+12+6+3+1} = 2^{97}$ и не делится на 2^{98}.

Далее, в произведении 100!

33 множителя делится на 3, среди них

11 множителей делится на 3^2, среди них

3 множителя делятся на 3^3, среди них

1 множитель делится на 3^4.

Поэтому 100! делится на $3^{33+11+3+1} = 3^{48}$ и не делится на 3^{49}.

Итак, числитель содержит $2^{97} \cdot 3^{48}$. На это число и произойдет сокращение дроби. В знаменателе останется $2^{100-97} \cdot 3^{100-48}$.

Ответ: $2^3 \cdot 3^{52}$.

14. В XXI, XXII и XXIII веках имеется некоторое число полных недель и еще 5 дней. Поэтому XXII век начнется в субботу, XXIII век начнется в четверг, XXIV век начнется во вторник.

В XXIV веке имеются некоторое число полных недель и еще 6 дней, поэтому XXV век начнется в понедельник (так же, как XXI век). Далее все будет повторяться.

Ответ: Век может начинаться лишь в понедельник, вторник, четверг и субботу.

15. Вначале бросают жребий, чтобы определить, кто будет первым, кто вторым, кто третьим. Затем первый отбирает себе 1/3 часть добычи (по его мнению) и спрашивает, согласен ли второй, чтобы он (первый) взял себе отобранное. Если второй согласен, первый задает тот же вопрос третьему, и если третий тоже согласен, первый забирает отобранное. Затем второй делит оставшееся пополам, а третий выбирает себе одну половину.

Если на заданный вопрос второй ответил отрицательно, то первый отдает ему отобранную часть, а второй спрашивает третьего, может ли он (второй) забрать ее. Если третий согласен, второй забирает эту долю, а затем первый и третий делят оставшееся указанным способом.

Если на заданный первым вопрос второй ответил удовлетворительно, а третий — отказом, то третий забирает эту часть, а затем первый и второй делят оставшееся указанным способом.

16. Пятью взвешиваниями узнают массу 10 кружковцев. А оставшиеся 3 взвешиваются так: 1-й и 2-й, 1-й и 3-й, 2-й и 3-й. В этих трех взвешиваниях каждый из трех участвует дважды. Поэтому сумму трех масс делят на 2 и прибавляют к сумме масс первых 10 человек.

17. Решение этюда Рети.

<table>
<tr><td colspan="3">1. Кр g7 …</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. … h4
2. Кр f6 …</td><td rowspan="2">1. … Кр b6
2. Кр f6 h4
3. Кр e5,
и обе пешки либо уничтожаются, либо проходят в ферзи.</td></tr>
<tr><td>2. … h3
3. Кр e6,
и обе пешки проходят в ферзи.</td><td>2. … Кр b6
3. Кр e5,
и обе пешки либо уничтожаются, либо проходят в ферзи.</td></tr>
</table>

18. Два эскалатора образуют как бы вращающийся круг. Поэтому относительно шапки эскалаторы не добавляют скорости ни тому, ни другому мальчику. Следовательно, к шапке они придут одновременно.

19. Запишем данное число в виде $a \cdot 10^n + b$, где a — первая цифра, b — следующее за ней n-значное число.

По условию, $a \cdot 10^n + b = 57b$, $a \cdot 10^n = 56b$, $a \cdot 10^n = 7 \cdot 8b$.

Отсюда $a = 7$, $8b = 10^n$, $n > 3$, $b = 125 \cdot 10^{n-3}$.

Ответ: Данное число имеет вид 712500000….(число нулей на конце — любое).

20. Число точек пересечения равно числу четырехугольников (трапеций или параллелограммов), вершинами которых являются данные точки (рис. 38). Число сторон этих четырехугольников на одной из данных прямых равно $8 \cdot 7 : 2 = 28$, а на другой $7 \cdot 6 : 2 = 21$. Значит, всего четырехугольников $28 \cdot 21 = 588$.

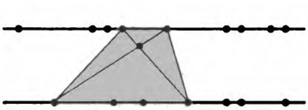


Рис. 38

Ответ: 588 точек.

21. Полезно обозначить 10 точек на чертеже числами от 1 до 10 (рис. 39), а затем выписать все треугольники, обозначая каждый из них цифрами в порядке возрастания: 123, 124, 125, 129, 1210, 134 и т.д.

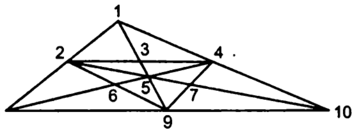


Рис. 39.

Ответ: 47.

22. Примем за единицу времени то время, за которое пассажир переступает на одну ступеньку эскалатора; тогда a — это время его движения по ходу эскалатора, b — время движения против хода эскалатора.

Обозначим буквой S длину эскалатора, буквой x — собственную скорость движения пассажира относительно эскалатора, буквой y — скорость движения эскалатора; тогда $x + y$ — скорость движения пассажира по ходу эскалатора, $x - y$ — скорость его движения против хода эскалатора, $\frac{S}{x+y}$ — время его движения по ходу эскалатора, $\frac{S}{x-y}$ — время его движения против хода эскалатора, $\frac{S}{x}$ — время его движения по неподвижному эскалатору. Нужно найти значение $\frac{S}{x}$ — это и будет то количество единиц времени, которое равно числу ступенек эскалатора. Имеем систему: $\begin{cases} \dfrac{S}{x+y} = a, \\ \dfrac{S}{x-y} = b. \end{cases}$

Откуда $\frac{S}{x} = \frac{2ab}{a+b}$.

Ответ: $\frac{2ab}{a+b}$.

Если, например, $a = 100$, $b = 150$, то на эскалаторе 120 ступенек.

23. Чтобы решить эту задачу, докажем, что разность

$$(a^3 + b^3 + c^3) - (a + b + c)$$

делится на 6 при всех целых a, b и c. Представим эту разность в таком виде: $(a^3 - a) + (b^3 - b) + (c^3 - c)$. Разность $a^3 - a$ можно представить в виде $a(a^2-1)=(a-1)a(a+1)$. Это произведение трех последовательных чисел, которое всегда делится на 2 и на 3, а значит, делится на 6 при любых значениях a. Точно так же b^3-b делится на 6 при любых значениях b и c^3-c делится на 6 при любом значении c. Поэтому сумма $(a^3-a)+(b^3-b)+(c^3-c)$ делится на 6 при любых значениях a, b и c. Значит, числа $a^3+b^3+c^3$ и $a+b+c$ делятся на 6 одновременно.

24. Решений у этой задачи много. Например, такие:

–3	1	–3	1	–3
1	2	1	2	1
–3	1	–3	1	–3
1	2	1	2	1
–3	1	–3	1	–3

0	–1	–1	–1	0
–1	3	0	3	–1
–1	0	–2	0	–1
–1	3	0	3	–1
0	–1	–1	–1	0

–1	–1	–1	–1	–1
1	2	1	2	1
–1	–1	–1	–1	–1
1	2	1	2	1
–1	–1	–1	–1	–1

–1	–1	–1	–1	–1
–1	4	–1	4	–1
–1	–1	–1	–1	–1
–1	4	–1	4	–1
–1	–1	–1	–1	–1

Одно из решений получится, если раскрасить квадрат, как шахматную доску, и расставить в черные клетки одинаковые числа x, а в белые — одинаковые числа y:

x	y	x	y	x
y	x	y	x	y
x	y	x	y	x
y	x	y	x	y
x	y	x	y	x

Тогда условия запишутся в виде системы неравенств:

$$\begin{cases} 13x+12y<0, \\ 2x+2y>0. \end{cases}$$

Годится, например, $x = -24$, $y = 25$.

Из любого найденного решения можно получить бесконечно много решений, умножая числа в каждой клетке на одно и то же положительное число. Например, из первого приведенного выше решения можно получить такое:

–30	10	–30	10	–30
10	20	10	20	10
–30	10	–30	10	–30
10	20	10	20	10
–30	10	–30	10	–30

25. Пусть скорость пешехода и собственная скорость лодки равны x км/час, а скорость течения реки равна y км/час. И пусть расстояние от A до B равно s км. Тогда пешеход пройдет путь от A до B и обратно за $\frac{2s}{x}$ часов, а лодка проплывет этот путь за $\frac{s}{x+y} + \frac{s}{x-y} = \frac{2sx}{x^2 - y^2}$ часов. Осталось сравнить полученные выражения. Вычтем из первого второе; после преобразований получим: $\frac{2s}{x} - \frac{2sx}{x^2 - y^2} = -\frac{2sx}{x^2 - y^2}$. И так как по смыслу задачи $x > y$, то полученное выражение отрицательно, а значит, время движения пешехода меньше времени движения лодки.

26. Остроумие этой задачи не в названии клуба, а в том, что в задаче фигурируют принципиально различные поцелуи. Когда два человека целуются в щечку или в носик, получаются два поцелуя, а когда в губки — это один поцелуй. Пусть x — число девочек, $10 - x$ — число мальчиков. Тогда $\frac{x(x-1)}{2} + 2x\,(10 - x) + (10 - x) \times$ $\times\,((10 - x) - 1) = 84$, откуда $x = 4$.

27. Пусть x и y — данные числа. Составим разность НОК – НОД. Так как НОК на НОД делится без остатка, запишем: НОК – НОД = НОД × (НОК/НОД – 1), где НОК/НОД — число целое. По условию НОД (НОК/НОД – 1) = 10, значит, НОД может принимать только четыре значения: 1, 2, 5 или 10.

Если НОД = 1, то НОК = 11, откуда данные числа 11 и 1.

Если НОД = 2, то НОК = 12, откуда данные числа 12 и 2, либо 6 и 4.

Если НОД = 5, то НОК = 15, откуда данные числа 15 и 5.

Если НОД = 10, то НОК = 20, откуда данные числа 10 и 20.

28. Чтобы треугольники *ABO* и *AMO* были равновелики, необходимо и достаточно условия *BO* = *OM*. Передвигая точку *M* от *A* к *C* и сохраняя положение точки *O* на середине отрезка *BM*, мы непрерывно переходим от положения, при котором площадь *ABO* меньше площади *MCKO*, к положению, когда площадь *ABO* больше площади *MCKO*, так что в какой-то момент они сравняются, и три многоугольника будут равновелики (рис. 40).

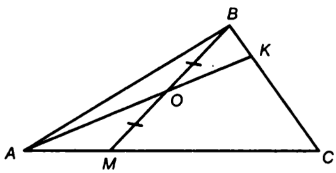


Рис. 40.

Четыре многоугольника равновеликими быть не могут, так как при этом оказалось бы, что точка *O* делит пополам и *BM*, и *AK*, т.е. что *AMKB* — параллелограмм, между тем как *AM* и *BK* не параллельны.

29. Можно решать задачу перебором, а можно и следующим образом. Сконструируем мысленно специальную емкость для будущей покупки. Пусть в ней будут расположены в ряд 10 углублений для пирожных и два углубления для разделителей (рис. 41). Разделители понадобятся, чтобы отделять эклеры от безе и безе от корзиночек. Каждой покупке будет соответствовать единственное положение разделителей в нашей емкости. Например, если разделители занимают пятое и двенадцатое углубления, то это значит, что куплены 4 эклера и 6 безе.

Сколькими способами можно выбрать углубления для разделителей, столько существует и видов покупок. Очевидно, что видов этих существует 66. В самом деле, первый разделитель можно установить 12 способами, а второй 11 способа-

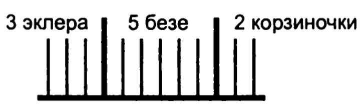


Рис. 41.

ми, но так как положение разделителей (a, b) равнозначно их положению (b, a), то произведение $12 \cdot 11 = 132$ надо разделить на 2.

Ответ: 66.

30. Искомая площадь равна сумме площадей четырех сегментов AB и квадрата $ABCD$ (рис. 42). Центральный угол AOB сегмента AB равен 30°, так как $\angle MOB = 60°$, а значит, $\angle NOB = 30°$. Поэтому площадь сегмента равна $\frac{\pi r^2}{12} - \frac{r^2}{4}$, а учетверенная площадь сегмента при $r = 1$ равна $\frac{\pi}{3} - 1$.

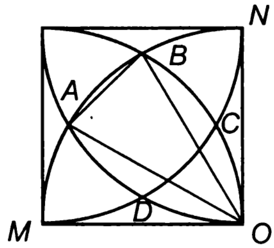


Рис. 42.

Площадь квадрата $ABCD$ равна $2 - \sqrt{3}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}$.

31. Можно с помощью калькулятора или компьютера непосредственной проверкой доказать, что это число делится на 421.

Но возможно и другое решение:

$$1280000401 = 20^7 + 20^2 + 1.$$

Многочлен $x^7 + x^2 + 1$ можно разложить на множители либо методом неопределенных коэффициентов, либо следующим преобразованием:

$$x^7 + x^2 + 1 = x^7 + x^6 + x^5 - x^6 - x^5 - x^4 + x^4 + x^3 + x^2 - x^3 + 1 =$$
$$= x^5(x^2 + x + 1) - x^4(x^2 + x + 1) + x^2(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1) =$$
$$= (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x + 1).$$

Это значит, что $20^7 + 20^2 + 1$ делится на $20^2 + 20 + 1$, т.е. является составным числом.

32. Очевидно, $\angle CAH = 45°$. Чтобы найти сумму углов FAH и GAH, приложим к одному из них угол, равный другому. Например, построим точку K (рис. 43). Угол KAH симметричен углу GAH, а значит, равен ему и составляет

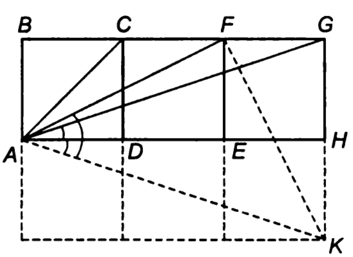


Рис. 43.

с углом FAH угол в 45°, так как треугольник AFK — равнобедренный прямоугольный.

Ответ: 90°.

33. а) $0^2 < 1^2 < 2^2$;

б) невозможно, так как если $a < b < c$ и $a^2 < c^2 < b^2$, то выполняется система неравенств:

$$\begin{cases} c^2 > a^2, \\ b^2 > c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (c-a)(c+a) > 0, \\ (b-c)(b+c) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c+a > 0, \\ b+c < 0 \end{cases} \Rightarrow a - b > 0,$$

что противоречит условию;

в) $0^2 < (-1)^2 < 2^2$;

г) $0^2 < 1^2 < (-2)^2$;

д) невозможно, так как если $a < b < c$ и $c^2 < a^2 < b^2$, то выполняется система неравенств

$$\begin{cases} a^2 > c^2, \\ b^2 > a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-c)(a+c) > 0, \\ (b-a)(b+a) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+c < 0, \\ b+a > 0 \end{cases} \Rightarrow c - b < 0,$$

что противоречит условию;

е) $0^2 < (-1)^2 < (-2)^2$.

34. Это числа $18! + 2$, $18! + 3$, $\ldots 18! + 18$. Каждое из них делится на второе слагаемое.

35. $n^5 + 4n = n(n^4 + 4)$. Полученное произведение делится на 5, если хотя бы один множитель делится на 5. Если первый множитель n на 5 не делится, то его десятичная запись оканчивается одной из следующих цифр: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 или 9. Но тогда n^4 оканчивается на 1 или 6, и $n^4 + 4$ оканчивается на 5 или на 0, т.е. делится на 5.

36. Всех людей в вагоне можно разделить на 4 группы: русые женщины, нерусые жещины, русые мужчины и нерусые мужчины. По условию в вагоне 80% русых, значит, 20% — нерусых. Далее, в вагоне 70% — мужчины, значит, 30% — женщины. Пусть в вагоне x% нерусых женщин. Тогда русых женщин в вагоне $(30 - x)$%. Кроме того, в вагоне $(20 - x)$% нерусых мужчин. Значит, русых мужчин в вагоне $100\% - x\% - (30 - x)\% - (20 - x)\% = 50\% + x\%$, т.е. их в вагоне большинство.

37. Если ладья бьет более двух других, значит, она стоит между двумя ладьями по вертикали или по горизонтали. Рассмотрим те ладьи, которые стоят на самой левой из занятых вертикалей. На рисунке это ладьи, стоящие по вертикали c. Каждая из них бьет не более трех ладей. А та из них, которая стоит на самой нижней среди всех них горизонтали, бьет не более двух ладей. На рисунке это ладья c4 (рис. 44).

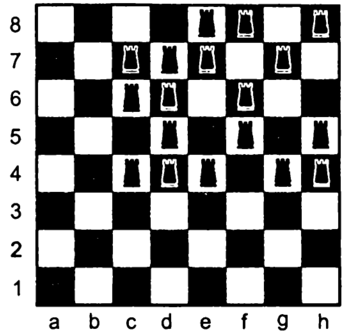


Рис. 44.

38. Сможет. Он может это сделать так:

1) набрать из реки полное большое ведро (24 л);

2) дважды вылить из большого ведра полное малое ведро (22 л);

3) оставшиеся в большом ведре 2 л перелить в бочку;

4) проделать указанное еще три раза, после чего в бочке окажется 8 л;

5) добавить в бочку полные большое и малое ведра, после чего в ней окажется $8 + 24 + 11 = 43$ л.

39. Перепишем условие задачи:

$$101101x + 10010y = 1111nx.$$

Чему равно n, если все переменные обозначают неотрицательные целые числа, $x \in \{1, \ldots, 9\}$, $y \in \{0, 1, \ldots, 9\}$?

Разделим обе части уравнения на 11:

$$9191x + 910y = 101nx, \text{ или } 101 \cdot 91x + 910y = 101nx.$$

Обе части уравнения делятся на простое число 101. Значит, на 101 делится $910y$, откуда получаем, что y делится на 101, и значит, $y = 0$.

Уравнение приобретает вид: $91x = nx$, откуда $n = 91$.

40. Число 1 легко представить в виде суммы трех долей:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

Остается представить одно из этих слагаемых в виде суммы двух слагаемых. Сразу видно, что $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$. Но заменить $\frac{1}{2}$ на $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ в равенстве нам не удастся, так как получится $1=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$, а знаменатели повторять нельзя. Однако теперь уже видно, что $\frac{1}{6}=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}$, так что $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}$.

41. Задача решается подбором. Это число 41312432 и зеркальное ему 23421314.

42. Пусть за первую часть пути автобус проехал x км, а за вторую часть пути он проехал y км. Тогда первую часть пути он ехал y мин, а вторую часть пути он ехал x мин (рис. 45). Следовательно, его скорость равна $\frac{x}{y}$ км/мин, и она же равна $\frac{y}{x}$ км/мин. Выходит, что

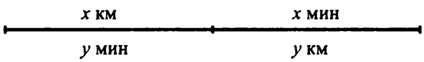


Рис. 45.

равны между собой два взаимно обратных числа. Значит, каждое из них равно 1, а потому скорость автобуса равна 1 км/мин, или 60 км/час.

43. Сумма цифр этого числа будет равна 30, значит, это число будет делиться на 3, но не будет делиться на 9. Значит, квадратом натурального числа оно быть не может.

44. Каждый угол может равняться лишь 60° или 120°. Сумма всех углов шестиугольника равна 720°. Если бы хоть один угол равнялся 60°, то остальные пять в сумме равнялись бы 660°, что невозможно ($5 \times 120 < 660$). Значит, все они по 120°, т.е. равны между собой.

45. На другом конце тоже шестерка. Дело в том, что шестерок (как и других) в домино четное число.

46. *Ответ:* Да, если $\angle A = \angle D = 36°$, $\angle MBC = \angle MCB = 72°$ (рис. 46).

Решение можно получить следующими рассуждениями:

Пусть точки A, B, C и D расположены так, как на этом рисунке. Определим, какими должны быть углы MAB и MBC, чтобы оказались равнобедренными треугольники MAB, MAC, MAD, MBC, MBD и MCD. Пусть $\angle MAB = \alpha$. Чтобы был равнобедренным ΔMAB, потребуем выполнения равенства $\angle AMB = \angle MAB = \alpha$. Отсюда получится, что $\angle MBC = 2\alpha$ (как внешний угол ΔMAB). Далее, должны быть равны углы BCM и MBC, а также MDC и MAB. Чтобы был равнобедренным треугольник AMC, нужно, чтобы $\angle AMC = \angle ACM = 2\alpha$. Тогда окажется равнобедренным и треугольник MBD. Осталось выяснить, чему равен угол α. Так как сумма углов треугольника AMC равна 180°, то $5\alpha = 180°$, откуда $\alpha = 36°$.

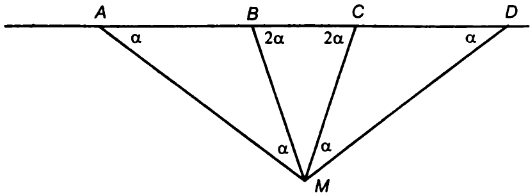


Рис. 46.

А можно просто вспомнить равнобедренный треугольник с углами 36°, 72° и 72°, который делится на два равнобедренных треугольника биссектрисой угла при вершине.

47. Разность $n^5 - n$ при всех натуральных значениях n делится на 10, так как равна $n(n-1)(n+1)(n^2+1)$. Среди этих множителей имеются четные. А кроме того, их произведение делится на 5: если n при делении на 5 дает остаток 1, то $n - 1$ делится на 5; если остаток равен 4, то $n + 1$ делится на 5, а если остаток равен 2 или 3, то $n^2 + 1$ делится на 5.

48. Разрежем поверхность данного двадцатигранника на отдельные грани. Так как по условию они — треугольники, то всего у них окажется 60 вершин и 60 сторон. Но на поверхности двадцатигранника каждые две стороны получившихся треугольников склеивались в одно ребро. Значит, ребер было $60 : 2 = 30$.

А так как по условию в каждой вершине данного двадцатигранника сходятся по пять ребер, то каждые пять вершин получившихся пятиугольников склеивались в одну вершину. Значит, вершин было $60 : 5 = 12$.

Ответ: 30 ребер и 12 вершин. Такой многогранник называется икосаэдром.

49. Обозначим черех x число граней. Тогда у них $3x$ сторон и $3x$ вершин. Но это значит, что у многогранника $\frac{3x}{2}$ ребер и $\frac{3x}{4}$ вершин. Так как $\frac{3x}{2}=12$, то $x = 8$ и $\frac{3x}{4}=6$.

Ответ: 8 граней и 6 вершин. Такой многогранник называется октаэдром.

50. Обозначим через x число граней. У них $5x$ сторон и $5x$ вершин. Значит, у многогранника $\frac{5x}{2}$ ребер и $\frac{5x}{3}$ вершин. Так как $\frac{5x}{3}=20$, то $x = 12$ и $\frac{5x}{2}=30$.

Ответ: 12 граней и 30 ребер. Такой многогранник называется додекаэдром.

51. $\overline{УГУ}-\overline{ГУГ} = 101У + 10Г - 101Г - 10У = 91У - 91Г = 91(У - Г)$ — делится на 91, а значит, и на 13. Поэтому если $\overline{УГУ}$ делится на 13, то и $\overline{ГУГ} = \overline{УГУ} - 91(У - Г)$ делится на 13.

52. В одной плоскости должны лежать не менее 3 ребер, образующих треугольник. Вне этой плоскости не может лежать только одна вершина, так как тогда ребер будет всего 6, а не 7. Не может быть и двух вершин, так как тогда не удастся распределить между ними остальные ребра.

53. Эта задача имеет много решений. Два из них представлены на рисунке. Эти два решения интересны тем, что на каждом из них шахматная доска разделена на четыре части и конь обходит сначала одну часть, потом вторую, потом третью и, наконец, четвер-

43	48	45	14	5	18	9	12
46	51	42	19	10	13	4	17
49	44	47	6	15	2	11	8
52	41	50	1	20	7	16	3
55	64	53	40	27	36	21	32
58	61	56	35	22	31	26	37
63	54	59	28	39	24	33	30
60	57	62	23	34	29	38	25

34	41	38	45	48	43	64	59
39	46	33	42	37	60	55	50
32	35	40	47	44	49	58	63
27	22	31	36	61	56	51	54
30	17	28	23	8	53	62	57
21	26	19	16	13	4	9	52
18	29	24	7	2	11	14	5
25	20	1	12	15	6	3	10

Рис. 47.

тую. Числа в клетках показывают последовательность ходов коня (рис. 47).

54. У 10-элементного множества имеются $2^{10} = 1024$ подмножества, включая пустое множество. Так как пустого множества блюд никто не заказывает, то обслужить можно 1023 человека.

55. Несократимая дробь представима в виде конечной десятичной дроби тогда и только тогда, когда ее знаменатель не имеет в разложении никаких простых множителей, кроме 2 и 5. Данный нам знаменатель равен $z = 1000 + 10x + y$. Он удовлетворяет высказанному условию тогда и только тогда, когда равен 2^a5^b. Если $b = 0$, то получаем неравенство $2^9 < z < 2^{11}$, откуда $z = 2^{10} = 1024$. Если $b = 1$, то, разделив z на 5, получим, что частное заключено между 2^7 и 2^9, т.е. равно 256, однако тогда $z = 1280$, что невозможно. Если $b = 2$, то тем же способом получаем $z = 1000$. Тем же способом опровергается $b = 3$ и $b = 4$. А при $b > 4$ получаем $z \geqslant 3125$, что невозможно.

Ответ: Можно дописать 00 или 24.

56. *Ответы:* На первый вопрос: 3211000. На второй вопрос: 1210, 2020, 21200, 42101000, 521001000, 6210001000, и других таких чисел нет. Решение можно построить на том, что сумма всех цифр каждого такого числа должна равняться числу его цифр: у семизначного числа она равна 7, у четырехзначного 4 и т.д.

57. Достаточно к имеющимся двадцати восьми косточкам прибавить еще восемь (от 0 : 7 до 7 : 7). Итого получится 28 + 8 = 36 косточек.

58. Таких чисел всего 5! = 120. Суммируя их, мы получим в каждом разряде сумму всех чисел от 1 до 5, причем эта сумма будет в каждом разряде повторена 24 раза. Итак, в сумме будет $24 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 360$ единиц, столько же десятков, столько же сотен, столько же тысяч и столько же десятков тысяч. Значит, сумма равна 3999960 (рис. 48).

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & & 3 & 6 & 0 \\ & & & & 3 & 6 & 0 & \\ + & & & 3 & 6 & 0 & & \\ & & 3 & 6 & 0 & & & \\ & 3 & 6 & 0 & & & & \\ \hline & 3 & 9 & 9 & 9 & 9 & 6 & 0 \end{array}$$

Рис. 48.

59. Ответы Б и Г противоречивы. Значит, один из них сказал правду, а остальные солгали.

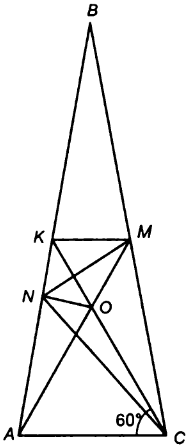


Рис. 49.

Поскольку А солгал, то Б не крал.
Поскольку В солгал, то украл В.
Ответ: Кражу совершил В.

60. Построим прямую CK под углом 60° к AC (рис. 49), соединим K и M, соединим N и O, соединим N и M и докажем равенство треугольников NOM и NKM, используя легко доказываемое равенство отрезков AN и AC (треугольник ANC равнобедренный, треугольник AOC равносторонний).

Ответ: 30°.

61. Задача решается подбором.
Ответ: 2899999 и 2900000.

62. Число $\overline{abcabc} = 1001\,\overline{abc} = 7 \cdot 11 \cdot 13\,\overline{abc}$.

Если оно точный квадрат, то должно делиться на 7^2, на 11^2 и на 13^2, откуда следует, что число $\overline{abc}$ должно делиться на $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$. Однако это невозможно, так как $\overline{abc} < 1001$.

Ответ: Нет.

63. Пусть философов на Лапуте x, а математиков y. Тогда ученых обеих специальностей по первому условию $\frac{x}{7}$, а по второму условию их $\frac{y}{9}$. Но $\frac{x}{7} = \frac{y}{9}$, откуда $y = \frac{9}{7}x$.

Ответ: Математиков больше в 9/7 раза.

64. Число, являющееся точным квадратом, имеет нечетное число делителей, а потому у него не может быть n делителей, оканчивающихся на 5, и n делителей, не оканчивающихся на 5. Так что Федя ошибается.

65. Такого треугольника (с гипотенузой 10 дюймов и опущенной на него высотой в 6 дюймов) быть не может, так как высота прямоугольного треугольника, опущенная на его гипотенузу, не может быть больше половины гипотенузы.

66. Если справа от лжеца А сидит лжец Б, то справа от Б — также лжец и т.д., т.е. все сидящие за столом — лжецы, чего не должно быть по условию (среди сидящих есть рыцари). Если же справа от лжеца А сидит рыцарь Б, то справа от Б — рыцарь В, справа от В — лжец Г и т.д. (рис. 50).

Ответ: 3.

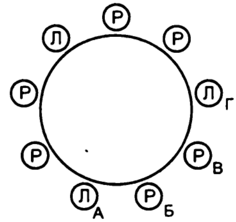


Рис. 50.

67. Обозначим красные кубики K_1 и K_2, синие — C_1 и C_2, зеленые — $З_1$ и $З_2$. Первым взвешиванием сравним массу двух кубиков K_1 и C_1 с массой двух кубиков K_2 и $З_1$. Если эти массы равны, т.е. $K_1 + C_1 = K_2 + З_1$, то это значит, что C_1 и $З_1$ имеют разные массы, и при этом масса K_1 такая же, как у $З_1$, а масса K_2 такая же, как у C_1. Вторым взвешиванием сравним массы C_1 и $З_1$. Если, например, C_1 легче, чем $З_1$, то получаем такой ответ: K_1, C_2 и $З_1$ — легкие, остальные — тяжелые. Если при первом взвешивании оказалось, что $K_1 + C_1$ легче, чем $K_2 + З_1$, то K_1 легче, чем K_2, а массы C_1 и $З_1$ одинаковы. Вторым взвешиванием определим эти последние, сравнивая $C_1 + З_1$

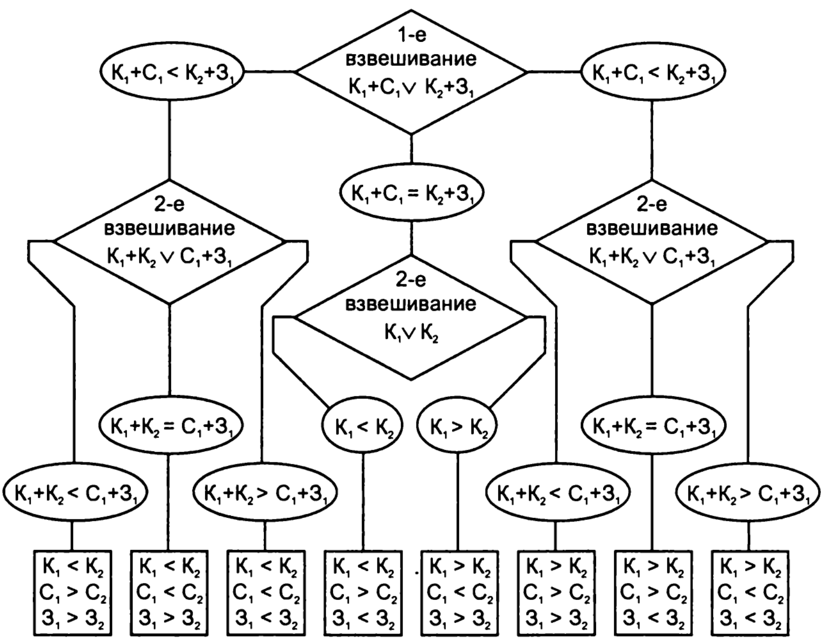


Рис. 51.

и $K_1 + K_2$. Если, например, $C_1 + З_1$ больше, чем $K_1 + K_2$, то делаем вывод: K_1, C_2 и $З_2$ — легкие, остальные — тяжелые. Полный перебор всех вариантов представлен на схеме (рис. 51).

68. Надо нажать шесть клавиш: 8, 3, 6, 5, ·, = . После этого появляется число 69973225, и мы читаем произведение: $836 \cdot 837 = 699732$. Решение основано на правиле возведения в квадрат числа с пятеркой на конце.

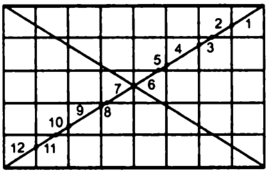


Рис. 52.

69. Надо подсчитать, со сколькими прямыми встретятся диагонали и на сколько отрезков разделится каждая из них. Поскольку числа 5 и 8 взаимно простые, каждая диагональ разделится на 12 отрезков (рис. 52). Каждый из этих 24 отрезков двух диагоналей отделит еще одну часть данного прямоугольника. Значит, всего к имеющимся уже $5 \cdot 8 = 40$ частям добавятся еще 24 части.

Ответ: 64.

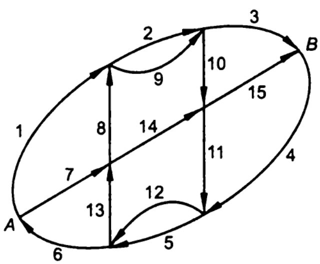


Рис. 53.

70. Осуществить требуемое можно, лишь начиная чертеж в точке *A* и заканчивая его в точке *B*, или, наоборот, начиная чертеж в точке *B* и заканчивая его в точке *A*. Дело в том, что только две вершины: *A* и *B* — имеют нечетное число входов и выходов. Поэтому они не могут быть промежуточными пунктами (в которые надо каждый раз входить по одному пути, а выходить по другому). Других таких нечетных узлов на рисунке нет, поэтому он вычерчивается (например, как на рис. 53).

71. Известно, что если биссектриса треугольника делит пополам угол между медианой и высотой, то этот треугольник прямоугольный. *Ответ:* 90°.

72. Разделим монеты на 34 пары и тридцатью четырьмя взвешиваниями найдем внутри каждой пары более легкую монету и более тяжелую монету. Все более легкие монеты отложим налево, все более тяжелые — направо. Тогда в левой группе окажется наиболее легкая из всех монет, а в правой — наиболее тяжелая. Самую легкую монету находим тридцатью тремя взвешиваниями следующим образом: сравниваем первую монету левой группы со второй монетой, более легкую из них — с третьей и т.д. Аналогично находим тридцатью тремя взвешиваниями самую тяжелую монету. Всего имеем 34 + 33 + 33 = 100 взвешиваний.

73. Нет. Если бы это было так, то сумма всех чисел равнялась бы $1199 \cdot 4 = 4796$. А так как сумма чисел в одном квадрате равна $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, то общая сумма должна делиться на 10.

74. Нет. Если бы это было так, то каждая прямая имела бы ровно $2003 - 1199 = 804$ параллельных прямых, т.е. все прямые распределились бы между непересекающимися множествами параллельных между собой прямых. И в каждом таком множестве их было бы 805. А число 2003 на 805 не делится.

75. Подряд идущих нечетных чисел в такой последовательности может быть не более пяти. Наименьшие из них: 807, 815, 823, 831, 839.

76. Нужно вырезать из арбуза «трубку», вместе с верхней и нижней корками, а остальное разделить на три доли, похожие по форме на дольки мандарина. От первого куска («трубки») после съедения мякоти останутся две корки (рис. 54).

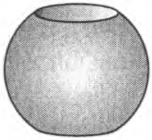


Рис. 54.

77. Числа x и y — простые, и притом они разной четности. Следовательно, одно из них — четное. Четное простое число только одно — это 2. Если $x = 2$, то $y = 3$ — простое число. А число y равняться 2 не может, так как в этом случае $x^2 = 3$, и x вообще не целое число. *Ответ:* $x = 2$, $y = 3$.

78. По условию $x^2 + 2 = y$, где x и y — простые числа. Если x делится на 3, то $x = 3$, и тогда $y = 11$. Если же x не делится на 3, то x^2 при делении на 3 дает в остатке 1, а значит, $x^2 + 2$ в этом случае делится на 3. Итак, если $x \neq 3$, то y делится на 3. Но в этом случае $y > 3$ и простым числом быть не может. *Ответ:* $x = 3$, $y = 11$.

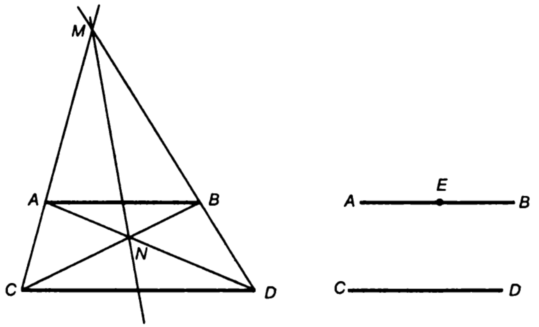


Рис. 55.

79. Решение для случая $AB < CD$ показано на рисунке. Последовательность построений такова: 1) AC, 2) BD, 3) AD, 4) BC, 5) MN.

Если $AB = CD$, то нужно на отрезке AB взять любую внутреннюю точку E и разделить пополам отрезки AE и CD вышеуказанным способом. А затем разделить пополам и отрезок AB (рис. 55).

80. Обозначим x^2 через $u \geqslant 0$, y^2 через $v \geqslant 0$ и решим графически систему $u + v = 2$, $u^2 + v^2 = 2$. Именно это сделано на рисунке. Отсюда сразу получаем: $u = v = 1$.

Ответ: $\{(-1; -1); (-1; 1); (1; -1); (-1; -1)\}$.

81. Первым взвешиванием сравним две группы по 12 монет в каждой. При любом исходе мы сможем выявить группу в 12 монет, содержащую не более одной фальшивой монеты. Вторым взвешиванием сравним две четверки монет этой выявленной группы.

82. Это возможно, если Петя родился 31 декабря, а действие происходит 1 января.

83. Данное число представимо в виде $111\ldots11 \cdot 10^{1199} + 222\ldots22$, где число единиц и число двоек равно 1199.

Запишем $111\ldots11$ в виде $\dfrac{999\ldots99}{9} = \dfrac{1000\ldots00 - 1}{9} = \dfrac{10^{1199} - 1}{9}$.

Тогда данное число можно представить в виде

$$\frac{10^{1199} - 1}{9} \cdot 10^{1199} + 2 \cdot \frac{10^{1199} - 1}{9} = \frac{10^{1199} - 1}{3 \cdot 3}(10^{1199} + 2) =$$

$$= \frac{10^{1199} - 1}{3} \cdot \frac{10^{1199} + 2}{3}.$$

Заметим, что $\frac{10^{1199}-1}{3}$ — это число, записываемое 1199 тройками, а $\frac{10^{1199}+2}{3}$ — следующее за ним число, записываемое 1198 тройками и одной четверкой.

Более легкий пример на ту же тему:

$$11112222 = 3333 \cdot 3334.$$

84. Кубик, не имеющий белой грани, — 1.

Кубик с одной белой гранью — 1.

Кубиков с двумя белыми гранями — 2 (у одного белые грани смежные, у другого противоположные).

Кубиков с тремя белыми гранями — 2 (у одного две белые грани противоположны, у другого все три белые грани сходятся к общей вершине).

Кубиков с четырьмя белыми гранями — 2 (у них две черные грани либо смежные, либо противоположные).

Кубик с пятью белыми гранями — 1.

Кубик с шестью белыми гранями —1.

Итого различно окрашенных в белый и черный цвета кубиков $1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 10$, и комплект стоит 100 рублей.

85. Кубиков, окрашенных в белый и черный цвет, 10;

кубиков, окрашенных в белый и красный цвет, 10;

кубиков, окрашенных в красный и черный цвет, 10,

следовательно, всего кубиков, окрашенных в два цвета, 27 (каждый из трех одноцветных кубиков входит в два вышеперечисленных набора).

Остается скрупулезно подсчитать число трехцветных кубиков. Их 30.

Всего различно окрашенных в белый, черный и красный цвета кубиков 57, комплект с учетом упаковки стоит 860 рублей.

86. $x^2 + 5y^2 + 34z^2 + 2xy - 10xz - 22yz = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x + y - 5z)^2 + (2y - 3z)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 5z = 0, \\ 2y - 3z = 0. \end{cases}$$

Отсюда получается бесконечно много натуральных решений, например (7; 3; 2) и (14; 6; 4).

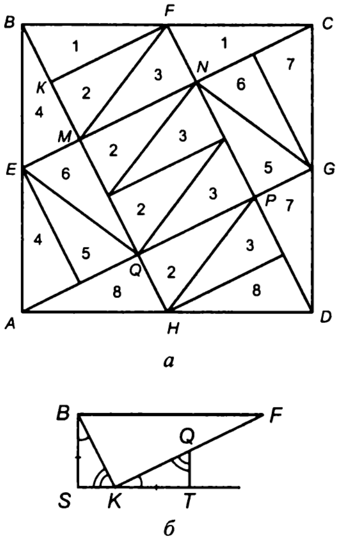


Рис. 56.

87. (Рис. 56, *а*.)

Построения показаны на чертеже:

1) Соединим вершины квадрата с серединами его сторон.

2) Проведем средние линии в получившихся четырех треугольниках и малом квадрате.

3) Разделим пополам образовавшиеся прямоугольники.

Получатся 20 треугольников. Их равенство докажем двумя способами: «по науке» и «по клеточкам».

Доказательство «по науке»:

1) Прямоугольные треугольники *ABH*, *BCE*, *CDF* и *ADG* равны по двум катетам, значит, соответственно равны их острые углы.

2) Отсюда следует, что треугольники *ABQ*, *BCM*, *CDN* и *ADP* — прямоугольные и равные между собой, а также что *MNPQ* является квадратом.

3) Легко доказывается равенство прямоугольных треугольников, получающихся при проведении медиан и средних линий треугольников *ABQ*, *BCM*, *CDN* и *ADP*, а также отрезков внутри квадрата.

Доказательство «по клеточкам»:

Квадрат *ABCD* построим по клеткам: 10 клеток в его стороне, 100 клеток внутри. Так что вершины всех двадцати построенных треугольников находятся в вершинах клеток. Все эти треугольники разделяются на восемь видов по своему положению. Однако все они имеют общие свойства. Их меньшие стороны равны (это устанавливается по клеточкам). Равны и их стороны, средние по величине (это тоже устанавливается по клеточкам). Докажем, что у всех этих треугольников между упомянутыми сторонами лежат углы в 90°. Рассмотрим, например, треугольник *BFK*, отмеченный на рисунке цифрой 1 (рис. 56, *б*). Докажем, что его угол *K* — прямой. Проведем через точку *K* прямую, параллельную большей стороне треугольника, и опустим на нее перпендикуляры из точки *B* и из середины стороны KF. Получились два треугольника — BSK и KTQ. Они прямоугольные с равными катетами (видно по клеточкам). Значит, они имеют соответственно равные острые углы, равные в сумме по 90°. Значит, и сумма углов BKS и QKT равна 90°, а потому угол $BKF = 90°$. Так же доказывается, что и все треугольники внутри квадрата прямоугольные, с равными катетами. Значит, они равны.

88. Пусть $(x_0; y_0)$ — решение данного уравнения, причем числа x_0 и y_0 — натуральные.

Тогда $(x_0 + y_0\sqrt{2})(x_0 - y_0\sqrt{2}) = 1$. Возведя обе части последнего равенства в квадрат, получим:

$$\left((x_0^2 + 2y_0^2) + 2x_0y_0\sqrt{2}\right)\left((x_0^2 - 2y_0^2) - 2x_0y_0\sqrt{2}\right) = 1.$$

Отсюда следует, что натуральные числа $x_1 = x_0^2 + 2y_0^2$ и $y_1 = 2x_0y_0$ также образуют решение данного уравнения. Зная, что $x_0 = 3$, $y_0 = 2$, можно по формулам $x_{n+1} = x_n^2 + 2y_n^2$; $y_{n+1} = 2x_ny_n$ найти бесконечно много решений этого уравнения в натуральных числах: $x_1 = 17$, $y_1 = 12$, $x_2 = 577$, $y_2 = 408$ и т.д.

89. Решение можно получить построением равностороннего треугольника со сторонами $a + b + c$, $c + d + e$, $e + f + a$, где a, b, c, d, e и f — последовательные стороны искомого шестиугольника (рис. 57, *а*).

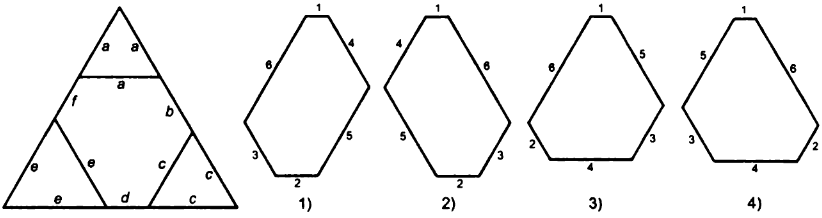
Из сказанного следует необходимость следующих равенств:

$$a + b + c = c + d + e,\ \ c + d + e = e + f + a,\ \ e + f + a = a + b + c,$$

$$\text{или}\quad \begin{cases} a + b = d + e, \\ c + d = a + f, \\ b + c = e + f. \end{cases} \qquad (1)$$

По условию задачи переменные должны принимать натуральные значения от 1 до 6. Пусть $a = 1$, тогда соседние с a стороны f и b не могут равняться ни 2, ни 3, так как суммы 1 + 2 и 1 + 3 из двух других чисел от 1 до 6 получить нельзя. Значит, f и b могут равняться только 4, 5 и 6.

Если $b = 4$, то $a + b = d + e = 5$, и значит, либо $d = 2$, $e = 3$, либо $d = 3$, $e = 2$. Тогда либо $c = 5$, $f = 6$, либо $c = 6$, $f = 5$.



а *б*

Рис. 57.

Получаются четыре варианта:

№	a	b	c	d	e	f
1	1	4	5	2	3	6
2	1	4	5	3	2	6
3	1	4	6	2	3	5
4	1	4	6	3	2	5

Из них только первый случай соответствует условиям (1), остальные нужно отбросить.

Если $b = 5$, то так же получаем четыре варианта, из которых условиям (1) удовлетворяет только такой набор: $a = 1, b = 5, c = 3, d = 4, e = 2, f = 6$.

Если $b = 6$, получаем такие наборы: $a = 1, b = 6, c = 3, d = 2, e = 5, f = 4$ и $a = 1, b = 6, c = 2, d = 4, e = 3, f = 5$.

Ответ: Существуют четыре таких шестиугольника с последовательными сторонами: 1) 1, 4, 5, 2, 3, 6; 2) 1, 5, 3, 4, 2, 6; 3) 1, 6, 3, 2, 5, 4; 4) 1, 6, 2, 4, 3, 5. Однако первый и третий варианты — это два равных шестиугольника разной ориентации; то же относится и ко второму и четвертому вариантам (рис. 57, *б*).

90. Докажем, что $9^{8n+4} - 7^{8n+4}$ делится на 5. 9^{8n+4} оканчивается на 1 и 7^{8n+4} оканчивается на 1, поэтому их разность оканчивается на 0, т.е. делится на 5 (и даже на 10).

Докажем, что $9^{8n+4} - 7^{8n+4}$ делится на 4.

$9^{8n+4} - 7^{8n+4} = (9^{4n+2} - 7^{4n+2})(9^{4n+2} + 7^{4n+2}) = (9^{2n+1} - 7^{2n+1}) \times$
$\times (9^{2n+1} - 7^{2n+1})(9^{4n+2} + 7^{4n+2})$ — делится на 4 (и даже на 8).

Значит, $9^{8n+4} - 7^{8n+4}$ делится на 20 (и даже на 40).

91. Нетрудно доказать равенство углов, отмеченных на этом рисунке одинаковыми дугами. Следовательно, сумма углов A, B, C, D и E равна 45° (рис. 58).

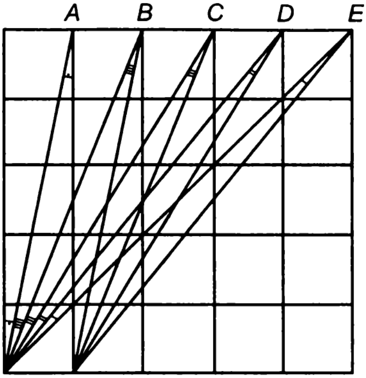


Рис. 58.

92. Наибольшее количество двузначных чисел, никакие два из которых в сумме не равны 100, равно 50. Это доказывается следующим образом. Каждое двузначное число от 10 до 90 (исключая число 50) имеет среди двузначных чисел ровно одно дополнение до 100. Поэтому из 40 пар этих чисел можно набрать не более 40 чисел, удовлетворяющих условию. Сверх этого можно выбрать еще 9 чисел от 91 до 99, не дающих в сумме 100 ни с какими двузначными числами, а также число 50.

Ответ: 50 копеек.

93. Можно доказать, что данная функция равна нулю при всех x, т.е. что после упрощений ее формула приобретает вид $y = 0$.

94. $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ $\quad \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ $\quad \frac{1}{6} = \frac{1}{9} + \frac{1}{18}$ $\quad \frac{1}{18} = \frac{1}{27} + \frac{1}{54}$

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{54}.$$

95. При обмене одной монеты на пять других общее число монет увеличивается на четыре монеты. Поэтому получить четное число монет у этого автомата нельзя. А если бы удалось получить x рублевых монет и x копеечных монет, то общее число монет оказалось бы равным $2x$, т.е. числом четным.

Ответ: Нельзя.

96. Нужно каждую таблетку разделить пополам, раскладывая половинки направо и налево. Сегодня нужно принять все половинки, лежащие справа, а завтра — лежащие слева.

97. Вырежем x пятиугольников и y шестиугольников. У них будет всего $5x + 6y$ вершин и столько же сторон. Сделаем из них покрышку мяча. При этом ребер окажется вдвое меньше, чем было всего сторон (две стороны склеиваются в одно ребро), а вершин втрое меньше (три вершины многоугольников склеиваются в одну вершину на покрышке). Граней же будет $x + y$. По теореме Эйлера получим уравнение $\frac{5x+6y}{3} - \frac{5x+6y}{2} + (x + y) = 2$, откуда $x = 12$.

Не правда ли, неожиданно: число пятиугольников не зависит от общего числа многоугольников?

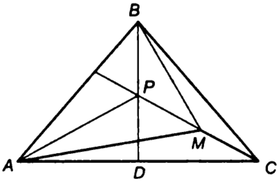


Рис. 59.

98. Проведем биссектрису BD и найдем точку P ее пересечения с прямой CM. Треугольники ABP и AMP равны по второму признаку. Значит, треугольник ABM равнобедренный с углом 40° при вершине, и его угол AMB равен 70° (рис. 59).

99. Проверкой устанавливаем:

$1! = 1^2$;

$1! + 2! = 3$ не является квадратом натурального числа;

$1! + 2! + 3! = 9 = 3^2$;

$1! + 2! + 3! + 4! = 33$ не является квадратом натурального числа.

Все следующие суммы также не являются квадратами натуральных чисел, так как оканчиваются цифрой 3.

Ответ: $\{(1; 1); (3; 3)\}$.

100. На каждое из семи мест можно поставить любую из пяти нечетных цифр. Поэтому всего таких телефонных номеров можно придумать 5^7.

Ответ: 78 125.

101. Сгруппируем в первом слагаемом средние и крайние члены, а затем перемножим полученные выражения, не расчленяя сумму $x^2 + 5x$:

$$(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1 = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + 1 =$$
$$= (x^2 + 5x)^2 + 10(x^2 + 5x) + 25 = (x^2 + 5x + 5)^2.$$

102. Наибольший размер квадрата 3×3. Таких квадратов может быть только два, тогда остается разделить на 6 квадратов оставшийся квадрат 3×3. Получается один квадрат 2×2 и пять квадратов 1×1.

Ответ: Два квадрата 3×3, один 2×2 и пять 1×1.

103. Пусть x — искомое число. Тогда $2x$ — точный квадрат. Значит, $2x$ делится на 4, а поэтому x делится на 2, т.е. $x = 2y$, где y — целое число.

Далее, $3x = 6y$ — точный куб, значит, $6y$ делится на 6^3, а поэтому y делится на 36, а x делится на 18.

Среди двузначных чисел, делящихся на 18, только 72 удовлетворяют обоим условиям.

Ответ: 72.

104. Для этого годятся любые одинаковые выпуклые четырехугольники (рис. 60) .

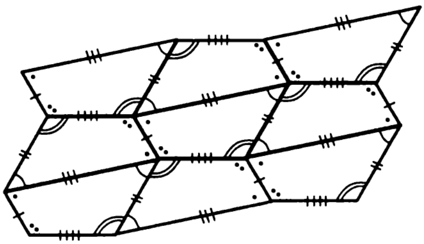


Рис. 60.

105. Будем понимать эту задачу как задачу на движение вниз по течению.

Обозначим через V ст/сек скорость эскалатора, а через S ст его длину. Тогда скорость Пети равна $V + 2$ (ст/сек), а скорость Вени равна $V + 3$ (ст/сек). Время движения Пети равно по условию $140 : 2 = 70$ (сек), а время движения Вени равно $168 : 3 = 56$ (сек).

И так как они пробежали один и тот же путь, то $(V + 2) \cdot 70 = (V + 3) \cdot 56$, откуда $V = 2$ (ст/сек), а значит, $S = 280$ (ст).

Ответ: 280 ступенек.

106. Произведение всех натуральных чисел от 1 до 1000 оканчивается столькими нулями, какова степень числа 5 в его разложении на простые множители. На 5 делятся 200 чисел из 1000, на 25 делятся 40 чисел, на 125 делятся 8 чисел, на 625 делится одно число. Значит, в этом произведении число 5 стоит в степени с показателем $200 + 40 + 8 + 1 = 249$.

Ответ: 249 нулей.

107. Решение проводится подбором. *Ответ:* $25 \times 25 = 625$.

108. Пусть одновременно с Красной Шапочкой, идущей домой от бабушки, выйдет навстречу ей мама. И пусть она идет в точности в том режиме, в каком вчера шла Красная Шапочка. Тогда в некоторый момент мама встретит Красную Шапочку. Место встречи и будет той точкой, мимо которой Красная Шапочка прошла в одно и то же время оба раза.

109. Пусть a, b и c три подряд идущих числа. Пусть a делится на b, а b делится на c. Тогда a делится на c. При этом числа a и c не соседние, так как чисел всего не 3, а 21.

Но что будет, если среди данных чисел нет таких трех подряд идущих чисел a, b и c, что a делится на b и c делится на a. То есть среди трех таких чисел два крайних всегда делятся на среднее: a делится на b и c делится на b, причем среди них нет равных чисел. Тогда должно быть $a > b$, $b < c$ и т.д., т.е. знаки неравенства между соседними числами должны непременно чередоваться. Но это невозможно, так как чисел нечетное число, а значит, знаков неравенства между ними тоже нечетное число.

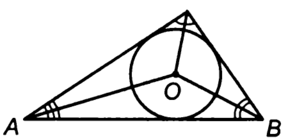


Рис. 61.

110. Если угол AOB — острый или прямой, то сумма углов OAB и OBA больше или равна 90°. И так как AO и BO — биссектрисы углов A и B треугольника, то сумма этих двух углов больше или равна 180°, что невозможно (рис. 61).

111. Все 13 утверждений противоречат друг другу. Поэтому истинным может быть только одно из них. Остальные 12 — ложные. Значит, истинно одно (двенадцатое) утверждение.

112. Нужно сколотить треугольник из трех трехметровых досок и определить, где он помещается на участке между деревьями. Вариант: хозяину участка, его жене и дочери образовать живой треугольник с помощью девятиметровой веревки с узлами через каждые 3 метра, а затем походить по участку для определения места клумбы.

113. Если бы это было возможно, то число и его квадрат имели бы вместе 10 знаков. Если число трехзначное, т.е. больше или равно 100 и меньше 1000, то его квадрат больше или равен 10 000 и меньше 1 000 000, т.е. имеет от 5 до 6 знаков. Этого мало. Значит, само число должно быть, по крайней мере, четырехзначно. Но тогда его квадрат, по крайней мере, семизначен, а это слишком много.

Ответ: Нельзя.

114. *Ответ:* 6 человек; задача решается несложным подбором.

115. Ни один автомат не меняет НОД данной пары чисел. Поэтому из пары взаимно простых чисел (19; 86) пару (12; 21) получить нельзя. А пара взаимно простых чисел (13; 31) получается сведением данной пары (19; 86) к паре (1; 1) и затем пары (1; 1) к паре (13; 31): (19; 86) $\Rightarrow$ (19; 67) $\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ (19; 10) $\Rightarrow$ (10; 19) $\Rightarrow$ (10; 9) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (9; 10) $\Rightarrow$ (9; 1) $\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ (1; 1), а путь от (1; 1) к (13; 31) получается обращением пути (13; 31) $\Rightarrow$ (1; 1).

116. Число n^2 должно быть четырехзначным, а n^3 шестизначным. Поэтому число n должно быть двузначным, большим числа 33. При этом число n не может оканчиваться на 0, 1, 5, 6, так как иначе его квадрат и куб будут заканчиваться одной и той же цифрой. Остается перебрать около 30 двузначных чисел n. С помощью калькулятора находим ответ: $69^2 = 4761$, $69^3 = 328\,509$.

117. (Рис. 62.) Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, M — центр вписанной в него окружности. Если M и O симметричны относительно прямой AC, то точка O лежит вне треугольника, на серединном перпендикуляре к отрезку AC. Значит, O также лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AC. Из сказанного следует, что треугольник ABC — тупоугольный равнобедренный.

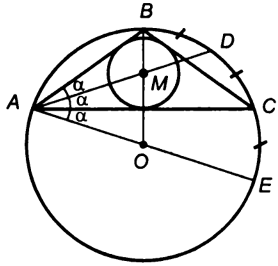


Рис. 62.

Продолжив AM и AO до пересечения с окружностью в точках D и E, получим три равные дуги — BD, DC и CE, каждая из которых вдвое меньше дуги AB. Сумма этих четырех дуг равна полуокружности, так что дуга AB равна 72°. Поэтому каждый из углов BAC и ACB равен 36°, а угол ABC равен 108°.

Ответ: 36°, 36° и 108°.

118. Решение подбором.

Например, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 7 + 8$. Здесь $n = 5$, $m = 8$.

119. *Ответ:* 1) 90°, 45°, 45°; 2) 72°, 36°, 36° (рис. 63).

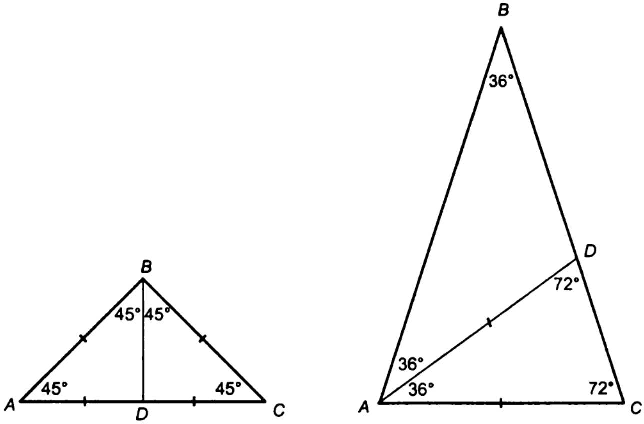


Рис. 63.

Невозможность других решений устанавливается так. Пусть ABC — равнобедренный треугольник с основанием AC. Разделить его на два треугольника можно двумя способами: проведя прямую BD через вершину B или прямую AD (или CD) через вершину угла при основании.

В первом случае должны получиться равнобедренные треугольники ABD и CBD. И при этом не может получиться, что $AB = BD$ и чтобы $BD = BC$ (так как $AB = BC$). Если предположить, что $AB = BD$, то останется допустить, что $CD = BC$, но тогда $AC = AB + BC$, что невозможно. Остается предположить, что $AD = BD = DC$. Отсюда получается: $\angle ABC = \angle A + \angle C$, а значит, $\angle ABC = 90°$, $\angle A = \angle C = 45°$.

Во втором случае получается, что $AC = AD = BD$. Обозначим через x величину угла C. Тогда $\angle B = 180° - 2x$, $\angle ADC = x$, $\angle DAC = 180° - 2x$. А значит, $\angle A = x$ и в то же время $\angle A = \angle BAD + \angle DAC = \angle B + \angle DAC = 360° - 4x$.

Отсюда $x = 360° - 4x$, $x = 72°$.

Других вариантов быть не может.

120. Разложим данное выражение на простые множители:

$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 6! \cdot 7! \cdot 8! \cdot 9! \cdot 10! = 2^{38} \cdot 3^{17} \cdot 5^7 \cdot 7^4$.

Разделив это число на 15, получим $2^{38} \cdot 3^{16} \cdot 5^6 \cdot 7^4 = (2^{19} \cdot 3^8 \cdot 5^3 \cdot 7^2)^2$.

121. Обозначим через k отношение скоростей наших старушек. Тогда пути, пройденные ими от рассвета до полудня, относятся как k. Значит, отрезки времени их движения после встречи относятся как k^2. Но это отношение равно 9/4. Поэтому $k = 3/2$. Отсюда уже не трудно получить результат.

Ответ: Рассвет был в 6^{00}.

122.

1) $2^{64} - 1 \approx 2^{64} = 2^4 \cdot 2^{60} = 16 \cdot (2^{10})^6 = 16 \cdot 1024^6 > 16 \cdot 1000^6$ — 20-значное число.

2) $2^{64} - 1 < 2^{64} < 10^{20}$, так как $2^{16} < 10^5 \Leftrightarrow 64 \cdot 1024 < 10^5$.

Ответ: $2^{64} - 1$ — 20-значное число.

123. x — число долларов, y — число евро. $27x + 35y = 1000$. x делится на 5, $x = 5t$, $27 \cdot 5t + 35e = 1000$, $27t + 7e = 200$, откуда $t \leqslant 8$.

$$e = \frac{200 - 27t}{7} = 28 - 4t + \frac{4 + t}{7}.$$

Значит, $t = 3$, $x = 15$, $y = 17$.

124. $a^2 - b = b^2 - c$, $a^2 - b^2 = b - c$, $a + b = \dfrac{b - c}{a - b}$, $a + b + 1 = \dfrac{a - c}{a - b}$.

Аналогично $b + c + 1 = \dfrac{b - a}{b - c}$, $c + a + 1 = \dfrac{c - b}{c - a}$.

Следовательно,

$$(a + b + 1)(b + c + 1)(c + a + 1) = \frac{a - c}{a - b} \cdot \frac{b - a}{b - c} \cdot \frac{c - b}{c - a} = -1.$$

125. Решить эту задачу можно по-разному. Вот один из способов.

Перенумеруем все 12 монет.

Первое взвешивание: $1 + 2 + 3 + 4 \vee 5 + 6 + 7 + 8$. Рассмотрим две возможности: когда наступило равновесие и когда оно не наступило.

1) Если $1 + 2 + 3 + 4 = 5 + 6 + 7 = 8$, то все монеты 1–8 настоящие, а фальшивая среди монет 9–12. Тогда вторым взвешиванием может

быть $1 + 2 + 3 \vee 9 + 10 + 11$. Если $1 + 2 + 3 = 9 + 10 + 11$, то фальшивая монета 12, и третьим взвешиванием $1 \vee 12$ мы устанавливаем, легче она или тяжелее настоящей монеты. Если $1 + 2 + 3 \neq 9 + 10 + 11$, то фальшивая монета среди 9–11, и мы знаем, тяжелее она или легче настоящей. Третьим взвешиванием в этом случае может быть $9 \vee 10$.

2) Пусть, например, $1 + 2 + 3 + 4 < 5 + 6 + 7 + 8$. Тогда монеты 9–12 настоящие, а фальшивая монета находится среди 1–4 (более легкая) или среди 5–8 (более тяжелая). Второе взвешивание: $1 + 2 + 5 \vee 3 + 4 + 6$. Если $1 + 2 + 5 = 3 + 4 + 6$, то фальшивая монета (более тяжелая) 7 или 8. Третье взвешивание, например, $7 \vee 8$. Если $1 + 2 + 5 < 3 + 4 + 6$, то фальшивая монета (более легкая) 1 или 2 либо (более тяжелая) 6. Третье взвешивание: $1 \vee 2$. Если же $1 + 2 + 5 > 3 + 4 + 6$, то фальшивая монета (более легкая) 3 или 4 либо (более тяжелая) 5. Третье взвешивание: $3 \vee 4$.

126. Резать нужно по линиям, разделяющим прямоугольники 2×1. Тогда квадрат разделится на два прямоугольника, в каждом из которых будет четное число единичных квадратов. Способов разрезать квадрат на такие прямоугольники всего 10. При разрезании квадрата таким образом не может быть разрезано нечетное число прямоугольников 2×1, так как оказалось бы, что оба получившиеся из квадрата куска содержат нечетное число единичных квадратов. Один прямоугольник 2×1 перекрывает только один разрез. Значит, чтобы перекрыть все 10 разрезов, нужно иметь хотя бы 20 прямоугольников 2×1, а их только 18.

127. Выигрывает первый. Он должен взять 4 камня из первой кучки. Если второй после этого возьмет все камни из какой-либо кучки, то первый уравнивает число камней в двух оставшихся кучках и выигрывает. Если второй уравняет число камней в двух каких-нибудь кучках, то первый оставляет его с этими камнями и выигрывает. В остальных случаях первый своим вторым ходом может добиться одного из трех положений: $1 + 2 + 3$, либо $1 + 4 + 5$, либо $2 + 4 + 6$, после чего его выигрыш обеспечен.

128. Пусть один из стоящих правдивый. Присвоим ему № 1. Пусть его сосед № 2 — правдивый. Тогда № 3 — лжец, № 4 — правдивый, № 5 — правдивый, № 6 — лжец, № 7 — правдивый. Однако

№ 7 должен быть лжецом. Полученное противоречие показывает, что правдивых среди этих людей быть не может.

Ответ: 7.

129. Подсчитаем число кратчайших путей, ведущих из A в каждую из остальных точек. В точку $Б$ ведет один путь (вправо), в точку $В$ один путь (вправо), в точку $Г$ один путь (вверх), в точку $Д$ один путь (вперед). В точку $Е$ можно прийти одним путем через точку $Г$ и одним путем через точку $Д$, итого два пути. И т.д.. В точку $М$ можно прийти шестью путями через точку $З$, тремя путями через точку $К$ и тремя путями через точку $Л$ — итого 12 (рис. 64).

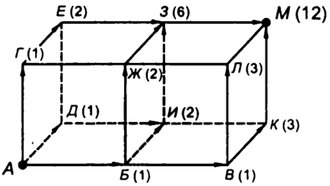


Рис. 64.

130. В однозначных числах единиц и девяток одинаковое число, в двузначных — тоже, в трехзначных — тоже. А в четырехзначных числах от 1000 до 1099 единица встречается в каждом числе, а девятка только 38 раз. Так что единиц будет больше.

131. Лист бумаги А6 имеет размеры около 15 × 10 см. Сделайте в нем прорези, показанные на рис. 65 (в уменьшенном виде). Получится отверстие нужного размера.

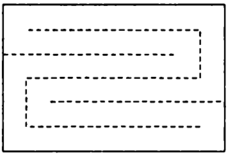


Рис. 65.

132. Определим, сколько нулей на конце числа 1199!, для чего найдем, на какую степень числа 5 делится это число.

Каждое 5-е число натурального ряда добавляет одну пятерку в разложении, таких чисел у нас 239. Каждое 25-е число добавляет еще одну пятерку, таких чисел у нас 47. Каждое 125-е число добавляет еще одну пятерку, таких чисел у нас 9. Каждое 625-е число добавляет еще одну пятерку, такое число у нас одно. Значит, в разложении числа 1199 имеются 296 пятерок. Поэтому число 1199! оканчивается 296-ю нулями. Определить цифру, стоящую на 297-м месте от конца, было бы затруднительно. Ясно только, что она четная.

Ответ: $\overline{00000...0}$ с 296-ю цифрами.

133. Из условия ясно, что Глеб набрал не менее 0,5 очка. Всего в турнире разыгрываются 6 очков. И все игроки набрали разное число очков. Значит, Андрей должен набрать 2,5 очка, откуда и получаются результаты: А — 2,5, Б — 2, В — 1, Г — 0,5 очков (рис. 66).

	Андрей	Борис	Виктор	Глеб	Очки	Место
Андрей		1	1	$\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	1
Борис	0		1	1	2	2
Виктор	0	0		1	1	3
Глеб	$\frac{1}{2}$	0	0		$\frac{1}{2}$	4

Рис. 66.

134. Пусть А — один из этих шести людей. Возможны две взаимоисключающие ситуации: 1) А знаком хотя бы с тремя из остальных пяти; 2) А знаком не более чем с двумя из них. В первом случае возможны два варианта: 1а) Ни один из трех знакомых с А людей не знаком с двумя другими; тогда существует тройка попарно незнакомых (эти трое). 1б) Хотя бы двое из трех знакомых с А людей знакомы между собой; тогда существует тройка попарно знакомых (эти двое и А). Во втором случае также возможны два варианта: 2а) трое незнакомых с А попарно знакомы; тогда существует тройка попарно знакомых (эти трое). 2б) Хотя бы двое из трех незнакомых с А не знакомы между собой; тогда существует тройка попарно незнакомых (эти двое и А).

135. Пусть M — общая точка отрезков a и b, N — общая точка отрезков a и c, P — общая точка отрезков b и c. Если все три точки совпадают, то все три отрезка имеют общую точку. Пусть точки M и N не совпадают и точка P принадлежит отрезку MN (совпадает с одной из них либо лежит внутри отрезка). Так как M и N принадлежат отрезку a, то P принадлежит отрезку a. Но P принадлежит также отрезкам b и c. Следовательно, у всех трех отрезков есть общая точка.

136. Надо из номера школы взять число 11 (оно же — первое простое, на которое делится 1199) и умножить сначала на 25, а потом на 18. Получатся числа 275 и 198, которые вслед за числом 4 дают номер телефона школы.

137. Первое взвешивание: $1 + 10 \vee 4 + 7$. Если $1 + 10 > 4 + 7$, то второе взвешивание: $1 + 10 \vee 2 + 3$. Если $1 + 10 = 4 + 7$, то второе взвешивание: $1 + 10 \vee 5 + 6$. Если $1 + 10 < 4 + 7$, то второе взвешивание: $1 + 10 \vee 8+ 9$.

138. $1199 = 11 \cdot (111 - 1 - 1)$.

139. Задача имеет несколько решений. Очень поучительно то, которое представлено на рисунке: мы дополняем фигуру до прямоугольника и проводим прямую через центр этого прямоугольника и центр дополнительной фигуры (рис. 67).

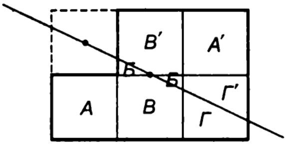


Рис. 67.

140. Если у данного числа первая цифра больше 1, то умножение на 6 приводит к увеличению числа разрядов. А если первая цифра 1, то, читая его справа налево, мы получим нечетное число, т.е. число, не делящееся на 6.

Ответ: Таких чисел нет.

141. Выиграет Снегурочка. Для своего выигрыша она должна первым ходом стереть одну букву «о». Тогда на доске останется шесть единичных букв и по две буквы «м» и «о». На ходы Деда Мороза Снегурочка должна отвечать такими же ходами, сохраняя «четность» позиции. А именно, если Дед Мороз стирает единичную букву, то и Снегурочка стирает единичную букву, если он стирает буквы «о» или «м», то она стирает столько же букв «м» или «о».

142. Назовем операцию перехода от n к $2n$ операцией $А$, операцию перехода от $2n$ к n — операцией $Б$, операцию перехода от n к $3n + 1$ — операцией $В$, операцию перехода от $3n + 1$ к n —операцией $Г$.

Число 2 получается из 1 операцией $А$, затем так же получается из 2 число 4, а из 4 число 8. Из числа 2 операцией $В$ получается число 7. Теперь нам придется выхо-

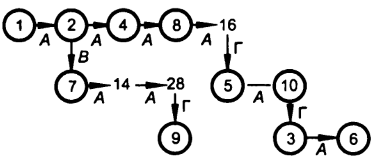


Рис. 68.

дить за пределы первого десятка. Операцией A получим из 8 число 16, а из 16 операцией Γ получим число 5. Все эти и все остальные шаги приведены на схеме (рис. 68).

143. Подбором находим, что $x = 1$ является корнем. Затем убеждаемся, что при натуральных x функция в левой части уравнения — убывающая.

144. Угловая скорость минутной стрелки в 12 раз больше скорости часовой стрелки. Пусть часовая стрелка прошла после 5 часов x делений. Тогда минутная стрелка прошла $12x$ делений. С другой стороны, известно, что за это время (пока часовая стрелка двигалась от цифры 5 по направлению к цифре 6) минутная стрелка прошла 25 делений от цифры 12 до цифры 5 и еще $x - 3$ деления от цифры 5. Значит, $12x = x + 22$, откуда $x = 2$.

Ответ: 5 часов 24 минуты.

145. Число при делении на 9 дает тот же остаток, что и его сумма цифр. Оба данные числа дают при делении на 9 одинаковый остаток, а значит, их разность делится на 9.

146. Пусть n — число сторон выпуклого многоугольника. Из каждой его вершины можно провести $n - 3$ диагонали (так как из вершины нельзя провести диагональ только в две соседние вершины и в нее саму). Значит, всего в выпуклом n-угольнике имеется $\frac{n(n-3)}{2}$ диагонали. Из условия имеем: $\frac{n(n-3)}{2} = 2n$.

Ответ: $n = 7$.

147. Число сторон такого многоугольника не может равняться 3, так как у треугольника вообще нет диагоналей. Оно может равняться 4 и 5, как следует из рис. 69, *а*. Докажем, что при большем числе сторон все диагонали выпуклого многоугольника не могут быть равными. Пусть AB — сторона выпуклого многоугольника с числом сторон, большим или равным 6. Тогда у него есть две вершины, не соседние с вершинами A и B. Назовем их E и F (рис. 69, *б*). Проведем в них диагонали из A и из B. Получатся два треугольника — ABE и ABF. Они содержат общее основание AB, они равные и равнобедренные (так как диагонали $AE = BE = AF = BF$), они расположены в одной полуплоскости относительно AB (так как много-

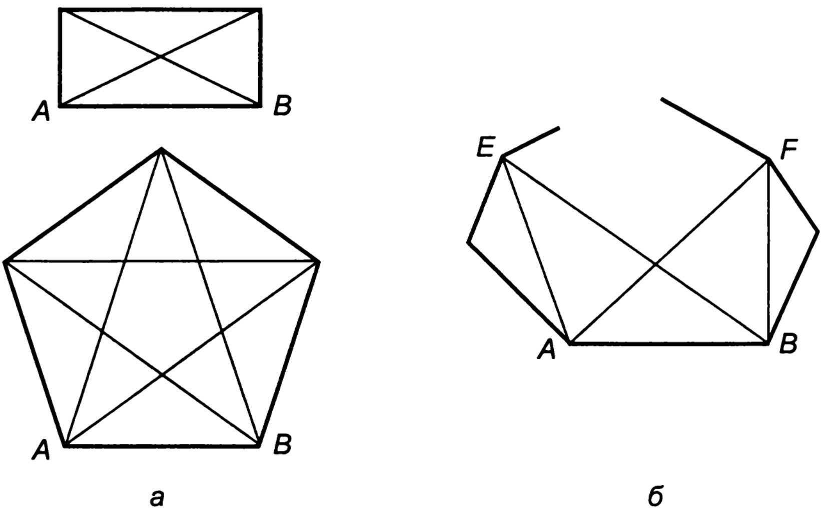


Рис. 69.

угольник выпуклый). Следовательно, они совпадают. Так что точки E и F не могут быть различными.

148. Это неверно. Среди чисел 1, 2, 3, 4, 5, 10 нет такой пары, так как среди них нет двух чисел, оканчивающихся на одну и ту же цифру, и так как сумма последних цифр не равна 10 ни у каких двух чисел.

149. Разделим данный квадрат на четыре одинаковых квадратика. Диагональ каждого из них будет равна $AC : 2$. Любые две точки одного и того же квадратика удалены друг от друга не более, чем на длину его диагонали, т.е. на $AC : 2$.

У нас всего пять точек, поэтому какие-нибудь две из них будут принадлежать одному и тому же квадратику, т.е. будут удалены друг от друга не более, чем на $AC : 2$.

150. Квадрат числа может оканчиваться только на 0, 1, 4, 5, 6 и 9. Значит, четвертая степень числа на 4 оканчиваться не может.

151. Минутная стрелка занимает одно и то же положение каждый час и только через каждый час. Часовая стрелка совершит поворот на 180° и сольется с минутной через 6 часов.

Ответ: 6 часов.

152. Мы знаем, что $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 = 2^{10} - 1$, значит, $2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 = 2^{10} - 4$. Осталось увеличить на 4 сумму в левой части последнего равенства. Заменим для этого второе и третье слагаемые, сумма которых равна 24, на сумму $3^3 + 1^4$, равную 28.

Ответ: $a = d = e = f = g = h = k = 2$, $b = 3$, $c = 1$.

153. $2^2 + 10^3 + 2^4 + 1^6 + 1^7 + 1^8 + 1^9 = 2^{10}$.

154. (Рис. 70.) Назовем точки буквами A, D, C, D, E и F. Пусть из точки A видны все остальные точки, кроме B. Тогда на отрезке AB должна лежать одна из остальных четырех точек. Пусть это будет точка C. Далее, пусть из точки C видны все точки, кроме точки D. Тогда отрезок CD не должен лежать на одной прямой с точками A и B, а одна из точек E и F должна лежать между точками C и D. Чтобы из точки E не была видна точка F, нужно расположить этот отрезок так, чтобы на нем лежала точка A или точка B.

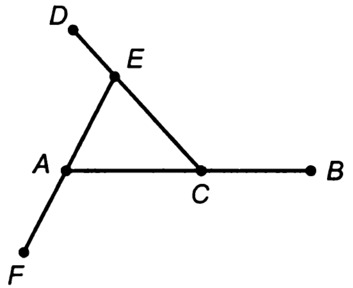


Рис. 70.

155. Перенумеруем все 12 монет.

Первое взвешивание: $1 + 2 + 3 + 4 \vee 5 + 6 + 7 + 8$. Рассмотрим два случая: когда наступило равновесие и когда оно не наступило.

1) Если чаши весов уравнялись, то все монеты 1–8 настоящие, и фальшивая монета находится среди монет 9–12.

Второе взвешивание: $1 + 2 + 3 \vee 9 + 10 + 11$. Если наступило равновесие, то фальшивая монета 12, и мы третьим взвешиванием $1 \vee 12$ устанавливаем ее сравнительный вес.

Если во втором взвешивании не наступило равновесие, то мы знаем, что фальшивая монета находится среди монет 9–11, и знаем, легче она или тяжелее настоящей монеты. В этом случае третье взвешивание $9 \vee 10$ решает все проблемы.

2) Пусть, например, $1 + 2 + 3 + 4 < 5 + 6 + 7 + 8$. Тогда монеты 9–12 настоящие, и либо фальшивая монета находится среди 1–4 и она легкая, либо фальшивая монета находится среди 5–8 и она тяжелая.

Второе взвешивание: $1 + 2 + 5 \vee 4 + 6 + 9$.

Если весы уравнялись, то фальшивая монета среди монет 3, 7, 8.

Третье взвешивание: $7 \vee 8$ решает проблемы.

Если при втором взвешивании оказалось, что $1 + 2 + 5 < 4 + 6 + 9$, то либо фальшивая монета 1 или 2 (легкая), либо это монета 6 (тяжелая).

Третье взвешивание: $1 \vee 2$.

Оглавление

Левитас Герман Григорьевич

Нестандартные задачи по математике в 7–11 классах

Научный редактор *В.Т. Лисичкин*
Редактор *И.С. Алексеева*

Подписано в печать 08.10.2008. Формат 60×88/16.
Усл.-печ. л. 3,91. Тираж 3000 экз.

ООО «Илекса», 105187, г. Москва, Измайловское шоссе, 48а,
сайт: www.ilexa.ru, E-mail: real@ilexa.ru,
факс 8(495) 365-30-55, телефон 8(495) 984-70-83

Заказ № 96
Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО "ИМИРА"
143980, Московская обл, г. Железнодорожный,
ул. Керамическая, д. 3

Г.Г. Левитас

Нестандартные задачи по математике

7–11

ISBN 978-5-89237-189-6

392 371896