Серия «Изучение сложных тем школьного курса математики»

П. Ф. Севрюков, А. Н. Смоляков

Векторы и координаты в решении задач школьного курса стереометрии

Углы между прямыми и плоскостями в пространстве

Расстояния между точками, прямыми и плоскостями в пространстве

Решение задач группы С Единого государственного экзамена

ШКОЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Серия «Изучение сложных тем школьного курса математики»

Учебно-методические материалы по математике

П. Ф. Севрюков, А. Н. Смоляков

ВЕКТОРЫ И КООРДИНАТЫ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ШКОЛЬНОГО КУРСА СТЕРЕОМЕТРИИ

Москва
Ставрополь
2008

УДК 514.113
ББК 74.262.21
С28

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор
А. Я. Симоновский;

кандидат физико-математических наук,
учитель математики высшей квалификационной категории
Т. В. Жаворонкова

Севрюков, П. Ф.

С28 Векторы и координаты в решении задач школьного курса стереометрии : учебное пособие / П. Ф. Севрюков, А. Н. Смоляков. — М. : Илекса ; НИИ Школьных технологий ; Ставрополь : Сервисшкола, 2008. — 164 с. — (Серия «Изучение сложных тем школьного курса математики»).

ISBN 978-5-93078-592-0

В данном пособии изложены методы решения стереометрических задач, основанные на применении векторов и метода координат. Такие задачи включены в варианты вступительных экзаменов в различные вузы, Единого государственного экзамена по математике, учебники для профильной школы и классов с углубленным изучением математики.

Предложены более ста тренировочных упражнений с ответами и комментариями; наиболее трудные упражнения сопровождаются вариантами решений.

Предназначено для учащихся 10–11 классов общеобразовательных и профильных школ, абитуриентов, учителей математики.

УДК 514.113
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-93078-592-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Две прямые в пространстве:

а) лежат в одной плоскости, при этом они могут иметь общую точку, т. е. пересекаться, или не иметь общей точки, тогда их называют параллельными;

б) не лежат в одной плоскости и, следовательно, не имеют общих точек, тогда их называют скрещивающимися.

Угол между двумя скрещивающимися прямыми равен углу, образованному двумя лучами, выходящими из одной точки, и параллельными этим скрещивающимся прямым.

Расстояние между скрещивающимися прямыми измеряется длиной их общего перпендикуляра между точками, расположенными на этих прямых. Это расстояние есть наименьшее.

2. Взаимное расположение прямой и плоскости

Прямая и плоскость называются взаимно перпендикулярными, если прямая перпендикулярна каждой прямой, принадлежащей плоскости.

Теорема 1. Признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Если прямая перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости, то эти прямая и плоскость взаимно перпендикулярны.

Прямую, пересекающую плоскость, но не перпендикулярную ей, называют наклонной к плоскости.

Углом между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и её ортогональной проекцией на эту плоскость (рис. 1). AC – наклонная, BC – проекция, $\angle ACB$ – угол между AC

и плоскостью π. Этот угол есть наименьший из всех углов, образованных этой прямой с любой другой прямой, лежащей в данной плоскости. Расстоянием от точки A до плоскости π называется длина перпендикуляра AB, проведённого из точки A к этой плоскости.

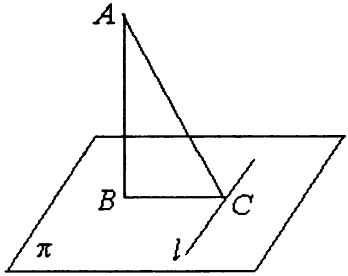


Рис. 1

Теорема 2. О трёх перпендикулярах.

Прямая l, лежащая в некоторой плоскости π, перпендикулярна наклонной, если она перпендикулярна её ортогональной проекции. Верна и обратная теорема.

Теорема 3. Признак параллельности прямой и плоскости.

Если прямая параллельна некоторой прямой, лежащей в плоскости, то и сама прямая параллельна этой плоскости.

Теорема 4.

Если через прямую l, параллельную плоскости p (рис. 2), провести другую плоскость α, пересекающую первую по прямой m, то прямые m и l также будут параллельны, т. е. $\begin{cases} l \parallel p, \\ l \in \alpha, \\ p \cap \alpha = m, \end{cases} \quad l \parallel m.$

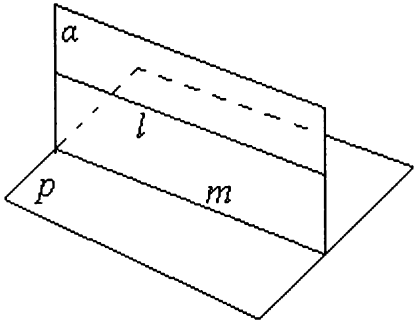


Рис. 2

3. Взаимное расположение плоскостей

Теорема 5. Признак параллельности двух плоскостей.

Если две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум пересекающимся прямым в другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Теорема 6.

Если две параллельные плоскости пересечь третьей плоскостью, то линии пересечения этих плоскостей будут также параллельны.

Теорема 7. Признак перпендикулярности плоскостей.

Если плоскость содержит перпендикуляр к другой плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

Двугранным углом называется, геометрическая фигура, образованная двумя полуплоскостями π и β, исходящими из одной прямой AB (рис. 3). Прямая AB называется ребром, а полуплоскости π и β – гранями двугранного угла.

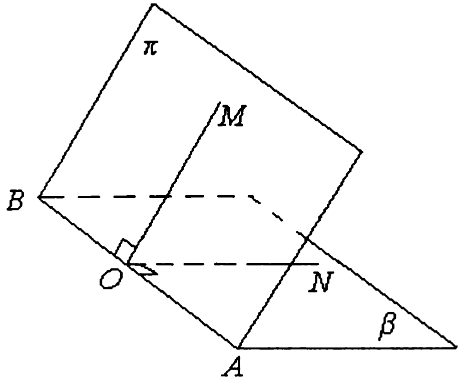


Рис. 3

Линейным углом двугранного угла называется угол, образованный двумя перпендикулярами, восстановленными к ребру из произвольной его точки и лежащими на гранях угла (рис. 3): $ON \in \beta$ и $ON \perp AB$, $OM \in \pi$ и $OM \perp AB$, $\angle MON$ – линейный.

Двугранный угол измеряется его линейным углом.

Теорема 8.

Плоскость, перпендикулярная ребру двугранного угла, перпендикулярна и его граням, т. е. если плоскость $MON \perp AB$, то плоскость $MON \perp \beta$ и $MON \perp \pi$ (рис. 3).

I. ПОНЯТИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ТЕОРЕМЫ, ФОРМУЛЫ, СВЯЗАННЫЕ С ВЕКТОРАМИ

Решение любой геометрической задачи на вычисление сводится, в сущности, к нахождению величин двух типов: расстояний и углов. Если в пространстве задан некоторый базис (в частности, прямоугольный), т. е. тройка некомпланарных векторов, то (на основании теоремы о разложении вектора по трём некомпланарным векторам) любой вектор пространства можно разложить по векторам этого базиса, причём единственным способом. Если известны длины векторов, образующих базис, углы между ними и разложение некоторого вектора по векторам этого базиса, то, используя свойства скалярного произведения, можно определить угол, образуемый им с любым другим вектором, разложение которого по векторам этого базиса известно.

Таким образом, векторы позволяют находить решения довольно широкого класса геометрических задач, а умение определять разложение вектора по базисным векторам является важнейшим фактором их решения.

Метод координат тесно связан с векторными методами: используя метод координат, мы можем легко переходить от векторных к скалярным (более понятным) соотношениям.

Используемые в дальнейшем обозначения:

$\vec{a}$; $\overrightarrow{AB}$ – векторы;

$|\vec{a}|$; $|\overrightarrow{AB}|$; a; AB – модули (длины) векторов;

a_1; a_2; a_3; a_x; a_y; a_z; x; y; z – координаты вектора a в некотором базисе;

$\vec{a}\cdot\vec{b}$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ – скалярное произведение векторов.

В школьных курсах математики и физики вектор определяется как направленный отрезок. Векторная величина определяется как величина, характеризующаяся модулем (величиной) и направлением. Кроме того, в курсе физики различаются векторы связанные и векторы скользящие.

Примечание. Не всякая величина, характеризующаяся модулем и направлением, является векторной. Обратимся к классическому примеру Н. Е. Жуковского, приведённому около ста лет назад для студентов мехмата Московского университета.

«Господа студенты, представьте, что на перекрёстке у здания университета стоит регулировщик. Он подсчитал, сколько повозок за 20 минут проехало мимо него по Охотному ряду в сторону Москвы-реки. Число есть, направление есть – нарисовал вектор. Подсчитал, сколько за то же время от Кремля мимо университета прошло повозок – нарисовал ещё один вектор. Далее попытался сложить два взаимно перпендикулярных вектора... Правильно, господа студенты, все повозки поехали в нашу университетскую столовую».

Для того чтобы величины были векторными, необходимо, чтобы они складывались по правилу параллелограмма. Это условие задаёт алгебру – действие над величинами.

Остановимся на некоторых известных положениях, которые нам будут необходимы для решения задач. Итак, у нас имеются векторы – направленные отрезки, которые складываются по правилу параллелограмма.

Запись $\overrightarrow{AB}$ означает, что рассматривается вектор, у которого начало – точка A, а конец – точка B.

Векторы в пространстве могут задаваться своими координатами. Пусть $\vec{a}$ – произвольный вектор пространства, в котором задана декартова система координат $Oxyz$ и A – точка пространства такая, что $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, тогда координаты вектора $\overrightarrow{OA}$ и будут координатами вектора $\vec{a}$. Если $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ – единичные векторы на осях x, y, z, то $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ и $\vec{a}\{a_x;a_y;a_z\}$.

Модуль (длина вектора) равна $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

Если даны две точки $A(a_x;a_y;a_z)$ и $B(b_x;b_y;b_z)$, то $\overrightarrow{AB}\{b_x-a_x;b_y-a_y;b_z-a_z\}$.

Если разложения векторов по осям базиса представимы в виде $\vec{a}=a_1\vec{i_1}+a_2\vec{i_2}+a_3\vec{i_3}$ и $\vec{b}=b_1\vec{i_1}+b_2\vec{i_2}+b_3\vec{i_3}$, то координаты векторов соответственно равны $\{a_1;a_2;a_3\}$ и $\{b_1;b_2;b_3\}$.

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ считаются равными, если они сонаправлены ($\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$) и их длины равны, т. е. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.

Два вектора равны тогда, и только тогда, когда равны их соответствующие координаты (в любом базисе).

Теорема 1. От любой точки пространства можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.

Векторы можно складывать по правилу параллелограмма $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (рис. 1) или по правилу треугольника $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (рис. 2).

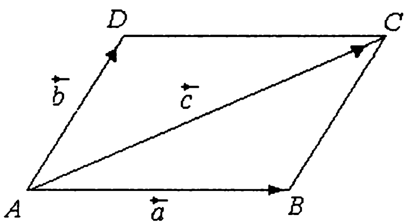


Рис. 1

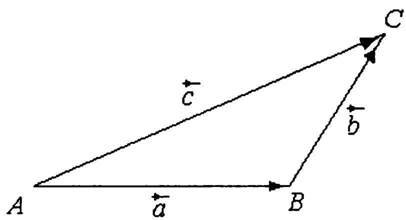


Рис. 2

Длина вектора суммы равна $c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$, где α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Теорема 2. Сумма $\vec{a} + \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не зависит от выбора точки A, от которой при сложении откладывается вектор $\vec{a}$.

Сумма векторов $\vec{a}\{a_1; a_2; a_3\}$и $\vec{b}\{b_1; b_2; b_3\}$ в координатной форме равна $\vec{a} + \vec{b} = \{a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3\}$.

Заметим, что $\overrightarrow{AB} = -1 \cdot \overrightarrow{BA}$; $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$.

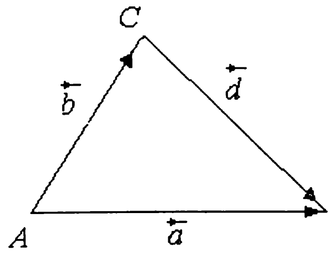


Рис. 3

Получаем правило вычитания векторов: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. При этом длина вектора разности равна $d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$.

Разность двух векторов в координатной форме имеет вид

$$\vec{a} - \vec{b} = \{a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3\}.$$

Умножение вектора на действительное отличное от нуля число даёт формулу: $\alpha \cdot \vec{a} = \{\alpha a_1; \alpha a_2; \alpha a_3\}$.

Определение 1. Скалярное произведение двух векторов равно произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) \quad . \qquad (1)$$

Определение 2. Если векторы имеют известные в декартовой системе координат координаты, т. е. $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ и $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, то их скалярное произведение равно сумме произведений соответствующих координат:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z . \qquad (2)$$

Следствие 1.

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} . \qquad (3)$$

Заметим, что в геометрических задачах часто приходится вычислять не угол между векторами, а угол между прямыми l_1 и l_2, содержащими эти векторы ($\vec{a} \in l_1$, $\vec{b} \in l_2$). Угол между прямыми обычно считается не превосходящим $\frac{\pi}{2}$, а косинус такого угла положителен. В силу того что $|\cos\varphi| = |\cos(\pi - \varphi)|$, для того, чтобы сразу получить для косинуса угла между прямыми положительное значение, будем пользоваться формулой

$$\cos(\widehat{l_1, l_2}) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Следствие 2. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины: $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ и $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

Определение 3. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются коллинеарными, если они параллельны одной и той же прямой (или лежат на одной прямой), при этом $\vec{a} = \alpha \cdot \vec{b}$ $(\alpha \neq 0)$.

Примечание. $\vec{0}$ считают коллинеарным любому вектору.

Свойство. У коллинеарных векторов $\vec{a}\{a_1; a_2; a_3\}$ и $\vec{b}\{b_1; b_2; b_3\}$ соответствующие координаты пропорциональны: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$.

Теорема 3. Пусть $\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{MB}$, где k – некоторое действительное число, отличное от -1, тогда точки A, B и M принадлежат одной прямой. Для произвольной точки O пространства справедливо равенство

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{k+1} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{k}{k+1} \cdot \overrightarrow{OB}.$$

Следствие 1. Если M – середина отрезка AB, то для любой точки пространства справедливо равенство

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right).$$

Следствие 2. Если M делит отрезок AB в отношении $\frac{m}{n}$, т. е. $AM : BM = m : n$, то для любой точки пространства

$$\overrightarrow{OM} = \frac{n}{m+n} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n} \cdot \overrightarrow{OB}.$$

Следствие 3. Если точки M и P делят соответственно отрезки AB и CD в равных отношениях, т. е. $AM : BM = CP : PD = m : n$, то:

$$\overrightarrow{MP} = \frac{n}{m+n} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{m}{m+n} \cdot \overrightarrow{BD}.$$

Определение 4. Компланарные векторы – векторы, параллельные одной и той же плоскости.

Теорема 4. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, из которых никакие два не коллинеарны, являются компланарными в том, и только в том, случае, когда существуют такие действительные числа x и y, что $\vec{c} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$.

Теорема 5. Любой вектор $\vec{p}$ пространства можно разложить по трём некомпланарным векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, причём коэффициенты разложения определяются единственным способом.

Проиллюстрируем применение некоторых из указанных положений на достаточно простых примерах.

Пример 1. Найти длину вектора $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, где $\vec{a} \perp \vec{b}$; $\vec{c} \perp \vec{b}$ и $\left(\widehat{\vec{a},\vec{c}}\right) = 60°$, $|\vec{a}| = 1$; $|\vec{b}| = 2$; $|\vec{c}| = 3$.

Решение.

$$\left|\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}\right| = \sqrt{\left(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}\right)^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{c} - 2\vec{b} \cdot \vec{c}}.$$

Поскольку $\vec{m}^2 = m^2$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$; $\left|\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}\right| = \sqrt{1+4+9-3} = \sqrt{11}$.

Ответ: $\sqrt{11}$.

Пример 2. Найти угол между векторами $\vec{a}+2\vec{b}$ и $2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$; $\vec{a}\perp\vec{b}$; $\vec{b}\perp\vec{c}$ и $\left(\widehat{\vec{a},\vec{c}}\right)=120°$.

Решение. Пусть φ – угол между данными векторами, тогда

$$\cos\varphi=\frac{\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\right)}{\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|\cdot\left|2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\right|}.$$

Находим последовательно:

$$\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\right)=2\vec{a}^{\,2}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+4\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}^{\,2}+2\vec{b}\vec{c}=2\cdot1-\frac{1}{2}-2=-\frac{1}{2},$$

$$\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5};$$

$$\left|2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\right|=\sqrt{4\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+\vec{c}^{\,2}+4\vec{a}\cdot\vec{c}}=\sqrt{4+1+1-2}=2.$$

Значит, $\cos\varphi=-\dfrac{1}{4\sqrt{5}}$.

Ответ: $\arccos\left(-\dfrac{1}{4\sqrt{5}}\right)$.

Пример 3. Для пространственных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$. Доказать, что $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Доказательство. После возведения в квадрат обеих частей данного равенства будем иметь $\vec{a}^{\,2}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^{\,2}=\vec{a}^{\,2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^{\,2}$, откуда $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, а это и означает, что $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Пример 4. Точки M и N делят отрезки AB и CD так, что $AM:MB=CN:ND=m:n$. Доказать, что $\overrightarrow{MN}=\dfrac{n}{m+n}\cdot\overrightarrow{AC}+\dfrac{m}{m+n}\cdot\overrightarrow{BD}$.

Доказательство. Пусть F – произвольная точка пространства.

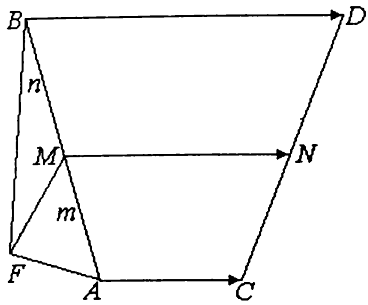


Рис. 4

По следствию 2 к теореме 3 $\overrightarrow{FN}=\frac{n}{m+n}\cdot\overrightarrow{FC}+\frac{m}{m+n}\cdot\overrightarrow{FD}$,

$\overrightarrow{FM}=\frac{n}{m+n}\cdot\overrightarrow{FA}+\frac{m}{m+n}\cdot\overrightarrow{FB}$. Вычитая второе равенство из первого, находим $\overrightarrow{FN}-\overrightarrow{FM}=\frac{n}{m+n}\cdot(\overrightarrow{FC}-\overrightarrow{FA})+\frac{m}{m+n}\cdot(\overrightarrow{FD}-\overrightarrow{FB})$;

$\overrightarrow{MN}=\frac{n}{m+n}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{m}{m+n}\cdot\overrightarrow{BD}$.

Пример 5. Известно, что $|\vec{a}|=1$; $|\vec{b}|=3$ и $|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-2\vec{b}|^2=50$. Найти угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение. Выполняя преобразования, получим

$2\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+5\vec{b}^2=50$; $2+45-6\cos\varphi=50$; $\varphi=120°$.

Ответ: 120°.

Пример 6. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. M – середина ребра AA_1, N – середина ребра BC. Найти угол между векторами $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{D_1B}$.

Решение. Введём базисные векторы (ими могут быть любые некомпланарные векторы, имеющие общее начало).

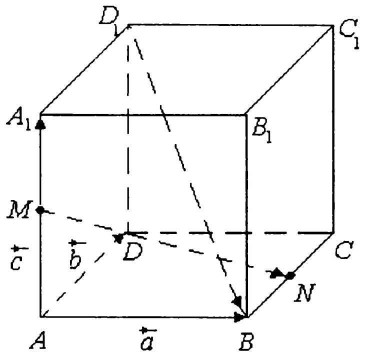


Рис. 5

Пусть $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$; $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$; $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$. Эти три вектора взаимно перпендикулярны, их попарные скалярные произведения равны нулю.

Очевидно, что $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=-\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$;

$\overrightarrow{D_1B}=\overrightarrow{D_1A_1}+\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}=-\vec{b}-\vec{c}+\vec{a}$.

Если φ – угол между векторами, тогда

$$\cos\varphi=\frac{\left(-\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\left(-\vec{b}-\vec{c}+\vec{a}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(-\vec{b}-\vec{c}+\vec{a}\right)^2}}=\frac{\frac{1}{2}\vec{c}^{\,2}+\vec{a}^{\,2}-\frac{1}{2}\vec{b}^{\,2}}{\sqrt{\vec{a}^{\,2}+\frac{1}{4}\vec{b}^{\,2}+\frac{1}{4}\vec{c}^{\,2}}\cdot\sqrt{\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+\vec{c}^{\,2}}}.$$

Поскольку скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины, и если длина ребра куба равна m, то $|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2=m^2$ и

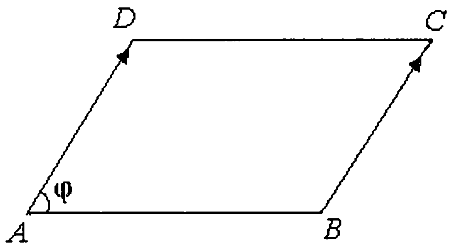
$$\cos\varphi=\frac{\frac{1}{2}m^2+m^2-\frac{1}{2}m^2}{\sqrt{\frac{3}{2}m^2}\cdot\sqrt{3m^2}}=\frac{1}{\frac{3}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$.

Пример 7. В системе координат $Oxyz$ заданы координаты трёх точек: $A(2;\ 1;\ 1)$; $B(-1;\ 0;\ 2)$; $C(1;\ -1;\ 1)$. Доказать, что они не лежат на одной прямой, и найти координаты такой точки D, что четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом. Найти площадь параллелограмма.

Решение. Если бы точки A, B и C лежали на одной прямой, то векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$ были бы коллинеарны, но $\overrightarrow{AB}\{-3;-1;1\}$; $\overrightarrow{BC}\{2;-1;-1\}$ и $\overrightarrow{AC}\{-1;-2;0\}$, пропорциональность координат отсутствует, поэтому точки A, B и C не лежат на одной прямой.

Пусть $D(x;\ y;\ z)$ – четвёртая вершина параллелограмма. Векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ равны (можно взять другую пару равных векторов), тогда $\{x-2;\ y-1;\ z-1\}=\{2;\ -1;\ -1\}$, откуда $x = 4$; $y = 0$; $z = 0$ и $\overrightarrow{AD}\{2;-1;-1\}$.



Если φ – угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$, тогда

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{AB}|} = \frac{-6+1-1}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{6}} = -\sqrt{\frac{6}{11}},\ \text{а}\ \sin\varphi = \sqrt{1-\frac{6}{11}} = \sqrt{\frac{5}{11}},$$

и $S_{ABCD} = AB\cdot AD\cdot\sin\varphi = \sqrt{11}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{\frac{5}{11}} = \sqrt{30}$.

Примечание. Можно заметить, что

$$S_{ABCD} = AB\cdot AD\sqrt{1-\frac{\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\right)^2}{\left(|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\right)^2}} = \sqrt{\left(|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\right)^2-\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\right)^2}.$$

Пример 8. Найти вектор $\vec{a}\{a_1;a_2;a_3\}$, коллинеарный вектору $\vec{b}\{2;3;-1\}$, если $\vec{a}\cdot\vec{b} = 28$.

Решение. Так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то $\frac{a_1}{2}=\frac{a_2}{3}=\frac{a_3}{-1}=\lambda$, откуда $a_1 = 2\lambda$; $a_2 = 3\lambda$; $a_3 = -\lambda$, тогда $4\lambda + 9\lambda + \lambda = 28$; $\lambda = 2$ и $\vec{a}\{4;6;-2\}$.

Ответ: $\vec{a}\{4;6;-2\}$.

Пример 9. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}\{3;2;2\}$ и $\vec{b}\{18;-22;-5\}$, образует с осью Oy тупой угол, причём $|\vec{x}|=14$. Найти координаты вектора $\vec{x}$.

Решение. Пусть $\vec{x}\{x_1;x_2;x_3\}$, тогда, согласно условию задачи, приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+2x_3=0,\\ 18x_1-22x_2-5x_3=0,\\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=196\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-34x_2-17x_3=0,\\ 3x_1+2x_2+2x_3=0,\\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=196\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_3=-2x_2,\\ x_1=\dfrac{2}{3}x_2,\\ \dfrac{4}{9}x_2^2+x_2^2+4x_2^2=196.\end{cases}$$

Итак, $\frac{49x_2^2}{9}=196$; $x_1 = \pm4$; $x_2 = \pm6$; $x_3 = \pm12$.

Пусть $\vec{x}\left\{4;6;-12\right\}$. На оси Oy возьмём единичный вектор $\vec{j}\{0;1;0\}$. $\vec{x}\cdot\vec{j}=6$; $6>0$, и угол, образуемый вектором $\vec{x}$ с осью Oy, острый. Пусть $\vec{x}\left\{-4;-6;12\right\}$, тогда $\vec{x}\cdot\vec{j}=-6$; $-6<0$ и $\vec{x}\left\{-4;-6;12\right\}$ – искомый вектор.

Ответ: $\vec{x}\left\{-4;-6;12\right\}$.

Упражнения.

1. Доказать верность равенства $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0$, если M – точка пересечения медиан треугольника ABC.

2. Доказать, что в пирамиде $SABC$ $\overrightarrow{SM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC})$, если M – точка пересечения медиан треугольника ABC.

3. Пусть O – точка пересечения медиан треугольника ABC и P – произвольная точка пространства. Доказать, что

$$PO^2=\frac{1}{3}(PA^2+PB^2+PC^2)-\frac{1}{9}(AB^2+BC^2+CA^2).$$

4. Дана сфера с центром O и радиусом R. В сечении сферы плоскостью вписан треугольник со сторонами a, b и c. Найти расстояние от центра сферы до точки пересечения медиан треугольника.

Указание. Воспользоваться формулой задачи 3 упражнений, заметив, что $PA=PB=PC=R$. *Ответ:* $\frac{1}{3}\sqrt{9R^2-(a^2+b^2+c^2)}$.

II. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО ТРЁМ ДАННЫМ НЕКОМПЛАНАРНЫМ ВЕКТОРАМ

Известно, что если в пространстве задан некоторый базис, т. е. тройка некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, то любой вектор $\vec{p}$ можно единственным образом разложить по векторам базиса так, что $\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$, где x_1, y_1, z_1 — коэффициенты разложения. Если при этом известны длины векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и углы между ними, то, определив скалярные произведения $\vec{a}^2$; $\vec{b}^2$; $\vec{c}^2$; $\vec{a}\cdot\vec{b}$; $\vec{a}\cdot\vec{c}$; $\vec{b}\cdot\vec{c}$, можно вычислить скалярный квадрат вектора $\vec{p}$:

$$\vec{p}^2 = (x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c})\cdot(x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}),$$

который равен квадрату его длины, а затем и саму длину вектора $\vec{p}$: $|\vec{p}| = \sqrt{\vec{p}^2}$. То же самое справедливо и для любого другого вектора $\vec{q} = x_2\vec{a} + y_2\vec{b} + z_2\vec{c}$.

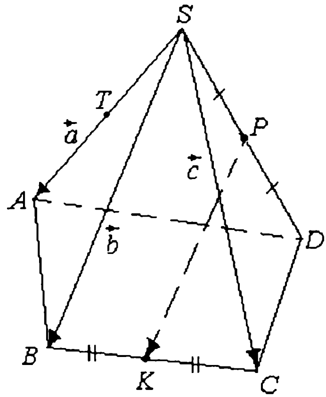
Прежде чем переходить к решению задач, напомним формулу квадрата суммы трёх чисел: $(l + m + n)^2 = l^2 + m^2 + n^2 + 2lm + 2ln + 2mn$. Если числа заменить векторами, то, согласно свойствам скалярного произведения, получим

$$(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c})^2 = x^2\vec{a}^2 + y^2\vec{b}^2 + z^2\vec{c}^2 + 2xy\vec{a}\cdot\vec{b} + 2xz\vec{a}\cdot\vec{c} + 2yz\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

Задача 1. Основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$ является параллелограмм $ABCD$. Точки P и K — середины рёбер SD и BC соответственно. Найдите разложение векторов $\overrightarrow{SD}$ и $\overrightarrow{PK}$ по векторам $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$.

Решение. $\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AD}$, но $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}$, поэтому $\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Поскольку K – середина ребра BC, $\overrightarrow{PK} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SK}$, но $\overrightarrow{PS} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{SD}$; $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}\right)$ (см. следствие 1 теоремы 3 раздела I), поэтому $\overrightarrow{PK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{SD} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}\right) = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c} - (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})) = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + 0 \cdot \vec{c}$.



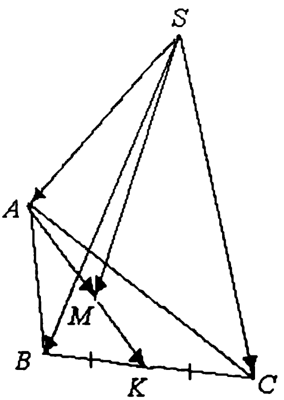
Примечание. Авторами в данной задаче умышленно представлен не совсем привычный рисунок: вид «картинки» зависит от вида проекции; а они и в учебниках не всегда одинаковы. Поставьте пирамиду на стол, отойдите от стола и взгляните на пирамиду сверху и немного сбоку. Именно такой вид вы получите.

Ответ: $\overrightarrow{SD} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{PK} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$.

Примечание. Заметим, что в разложении $\overrightarrow{PK}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коэффициент разложения при векторе $\vec{c}$ равен нулю, а это означает, в силу теоремы 4 раздела I, что векторы $\overrightarrow{PK}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ компланарны. Если заранее обратить внимание на то, что $PK \parallel BT$; $PK=BT$, где T – середина отрезка SA (отсюда $\overrightarrow{PK} = \overrightarrow{TB}$), то разложение вектора $\overrightarrow{PK}$ можно было бы найти проще. Но векторный метод тем и хорош, что, даже не обладая развитым пространственным воображением, а лишь зная основные определения и теоремы, можно получить правильный ответ (пусть и не всегда самым оптимальным путём).

Задача 2. Пусть M – точка пересечения медиан треугольника ABC, S – произвольная точка пространства. Найдите разложение вектора $\overrightarrow{SM}$ по векторам $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}$ и $\overrightarrow{SC}$.

Решение. Пусть K – середина ребра BC. Так как M – точка пересечения медиан треугольника ABC, точки A, M, K принадлежат одной прямой, причём в силу теоремы о точке пересечения медиан треугольника, $AM = \frac{2}{3}AK$. Согласно следствию 1 теоремы 3 раздела I, $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}\right)$.



Тогда:

$$\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{SA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{SA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{SK} - \overrightarrow{SA}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{SK} =$$
$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{SA} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}).$$

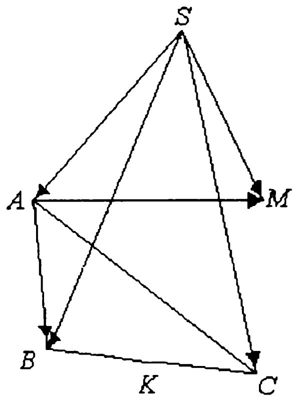
Ответ: $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$.

Примечание 1. Результат этой задачи нередко используется при решении многих задач по стереометрии, поэтому в дальнейшем будем применять его в качестве известного факта.

Примечание 2. Заметим, что сумма коэффициентов полученного разложения равна единице. Последнее оказывается справедливым не только для точки пересечения медиан треугольника ABC, но и для любой другой точки, лежащей в плоскости этого треугольника.

Задача 3. Пусть точка М принадлежит плоскости треугольника ABC, S – произвольная точка пространства. Докажите, что $\overrightarrow{SM} = x \cdot \overrightarrow{SA} + y \cdot \overrightarrow{SB} + z \cdot \overrightarrow{SC}$, где $x + y + z = 1$.

Решение. $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AM}$, но вектор $\overrightarrow{AM}$ можно разложить по двум неколлинеарным векторам плоскости ABC, например, $\overrightarrow{AM} = y \cdot \overrightarrow{AB} + z \cdot \overrightarrow{AC}$.



Тогда:

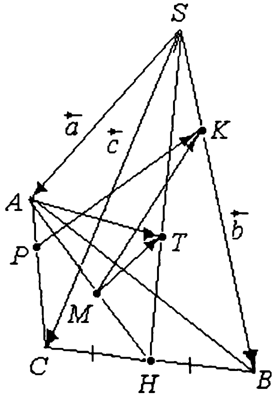
$$\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SA} + y \cdot \overrightarrow{AB} + z \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{SA} + y \cdot (\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}) + z \cdot (\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}) =$$

$$= (1 - y - z) \cdot \overrightarrow{SA} + y \cdot \overrightarrow{SB} + z \cdot \overrightarrow{SC} = x \cdot \overrightarrow{SA} + y \cdot \overrightarrow{SB} + z \cdot \overrightarrow{SC},$$

где $x = 1 - y - z$, т. е. $x + y + z = 1$, что и требовалось доказать.

Задача 4. В треугольной пирамиде $SABC$ точки M и T – точки пересечения медиан треугольников ABC и SBC соответственно, точки P и K принадлежат рёбрам AC и SB соответственно; $AP : PC = 1 : 2$; $SK : KB = 2 : 3$. Разложите векторы $\overrightarrow{PK}$, $\overrightarrow{AT}$, $\overrightarrow{MT}$ и $\overrightarrow{MK}$ по векторам $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$.

Решение.



$$\overrightarrow{PK}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{SA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{SB}=\frac{1}{3}(\vec{a}-\vec{c})-\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}.$$

Согласно задаче 2, $\overrightarrow{AT}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=$

$$=\frac{1}{3}(-\vec{a}+(\vec{b}-\vec{a})+(\vec{c}-\vec{a}))=-\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c};$$

$$\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{MS}+\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AT}=-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+\vec{a}-\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}=-\frac{1}{3}\vec{a},$$

так как $\overrightarrow{AT}=-\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$; $\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{MS}+\overrightarrow{SK}=-\overrightarrow{SM}+\frac{2}{5}\vec{b}$.

Согласно задаче 2, $\overrightarrow{SM}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$,

поэтому $\overrightarrow{MK}=-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+\frac{2}{5}\vec{b}=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{15}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}$.

Ответ: $\overrightarrow{PK}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}$; $\overrightarrow{AT}=-\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$; $\overrightarrow{MK}=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{15}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}$.

Примечание. Заметим, что равенство $\overrightarrow{MT} = -\frac{1}{3}\vec{a}$ означает параллельность отрезков MT и SA, причём $MT = \frac{1}{3}SA$. Этот факт (а значит, и соответствующее разложение) можно установить и без использования векторов, рассмотрев плоскость ASH (где H – середина отрезка BC) и воспользовавшись подобием треугольников THM и SHA. «Не заметив» этого факта, мы обошлись без дополнительного построения и ссылок на второй признак подобия треугольников: всё было сделано только при помощи векторной алгебры.

Упражнения.

1. Докажите, что для любых четырёх точек пространства A, B, C, D справедливо равенство $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=0$.

2. Точки пересечения медиан треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ совпадают. Докажите, что отрезки A_1A_2; B_1B_2; C_1C_2 параллельны некоторой плоскости.

3. Точка O является центром правильного n-угольника $A_1A_2...A_n$, точка M – произвольная точка пространства. Докажите, что $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{n}(\overrightarrow{MA_1}+...+\overrightarrow{MA_n})$.

4. В пространстве расположены два параллелограмма – $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$. Точки A, B, C, D являются серединами отрезков A_1A_2; B_1B_2; C_1C_2; D_1D_2 соответственно. Докажите, что если точки A, B, C, D не лежат на одной прямой, то четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм.

5. а) Пусть M – точка пересечения медиан треугольника ABC. Докажите, что $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0$.

б) В пространстве расположены два треугольника – $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Точки M_1 и M_2 – соответственно точки пересечения медиан треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Разложите вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ по векторам $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$, $\overrightarrow{C_1C_2}$.

6. Точка K – середина ребра DA тетраэдра $DABC$, M – точка пересечения медиан треугольника ABC, точка P принадлежит ребру BC, причём $BP : CP = 1 : 2$. Разложите по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{DA}$,

$\vec{b}=\overrightarrow{DB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{DC}$ векторы $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{KP}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PM}$.

7. Точка K – середина ребра C_1D_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, M – точка пересечения диагоналей грани BB_1C_1C, точка P принадлежит диагонали AC_1 параллелепипеда, причём $C_1P : AP = 2 : 1$. Разложите по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{AA_1}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AD}$ векторы $\overrightarrow{B_1D}$, $\overrightarrow{BD_1}$, $\overrightarrow{BK}$, $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{DM}$, $\overrightarrow{D_1M}$, $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{C_1P}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{DP}$, $\overrightarrow{D_1P}$, $\overrightarrow{PA_1}$, $\overrightarrow{PB_1}$, $\overrightarrow{PK}$, $\overrightarrow{MP}$.

8. Дана усечённая треугольная пирамида $ABCA_1B_1C_1$, в которой $AB : A_1B_1 = 5 : 2$. На рёбрах AA_1, AB, BC взяты соответственно точки K, M, P, причём $AK = KA_1$, $AM : AB = 2 : 7$, $BP : PC = 5 : 12$. Разложите по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{AA_1}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AC}$ векторы $\overrightarrow{C_1C}$, $\overrightarrow{CK}$, $\overrightarrow{C_1M}$, $\overrightarrow{KP}$, $\overrightarrow{B_1P}$.

Ответы и указания к решению упражнений.

1. *Указание.* $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}$.

2. *Указание.* Докажите, что $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=0$, и, следовательно, векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$, $\overrightarrow{C_1C_2}$ компланарны.

3. *Указание.* Докажите, что $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$.

4. *Указание.* Докажите, что $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2})$,

$\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{D_2C_2})$ и получите отсюда, что $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

5. а) *Указание.* Достройте треугольник MBC до параллелограмма $MBDC$ и докажите, что векторы $\overrightarrow{MD}$ и $\overrightarrow{MA}$ противоположные;

б) $\overrightarrow{M_1M_2}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2})$.

6. $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$; $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$; $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{c}$;

$\overrightarrow{KM} = -\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$; $\overrightarrow{KP} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$; $\overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$;

$\overrightarrow{PM} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$.

7. $\overrightarrow{B_1D} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{BD_1} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{BK} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$;

$\overrightarrow{AK} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$; $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$;

$\overrightarrow{D_1M} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$; $\overrightarrow{KM} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$; $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$;

$\overrightarrow{C_1P} = -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c}$; $\overrightarrow{PB} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}$; $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c}$;

$\overrightarrow{D_1P} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c}$; $\overrightarrow{PA_1} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}$; $\overrightarrow{PB_1} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}$;

$\overrightarrow{PK} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$; $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}$.

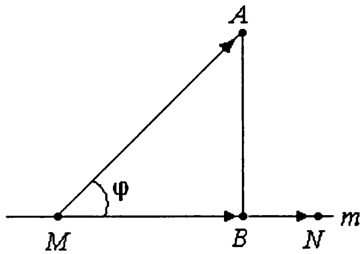
8. $\overrightarrow{C_1C} = -\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{c}$; $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c}$; $\overrightarrow{C_1M} = -\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b} - \frac{2}{5}\vec{c}$;

$\overrightarrow{KP} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{7}{12}\vec{b} + \frac{5}{12}\vec{c}$; $\overrightarrow{B_1P} = -\vec{a} + \frac{11}{60}\vec{b} + \frac{5}{12}\vec{c}$.

III. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

1-й способ. Будем считать, что известны координаты точек M и N прямой m. Пусть B – ортогональная проекция точки A на прямую m.

Используя условие коллинеарности векторов $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MN}$, а также условие перпендикулярности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MN}$, найдём координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.



В самом деле, так как векторы $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MN}$ коллинеарны, $\overrightarrow{MB} = a\overrightarrow{MN}$, но тогда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = a\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MA}$. Из условия перпендикулярности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MN}$ получаем уравнение для определения единственности неизвестной a в разложении вектора $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$, или $(a\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MA}) \cdot \overrightarrow{MN} = 0$.

Найдя из этого уравнения a, мы найдём разложение вектора $\overrightarrow{AB}$ по векторам выбранного базиса, а затем и длину AB, как длину вектора $\overrightarrow{AB}$, концы которого находятся в точках A и B.

Пример 1. Даны точки $M(1;\ 2;\ 3)$, $N(0;\ -1;\ 1)$ и $A(1;\ 1;\ 1)$. Найти расстояние от точки A до прямой MN.

Решение. Пусть $B(x; y; z)$ – проекция точки A на прямую MN, тогда $\overrightarrow{MB}\{x-1; y-2; z-3\}$, $\overrightarrow{AB}\{x-1; y-1; z-1\}$, $\overrightarrow{MN}\{-1;-3;-2\}$. Из сказанного выше следует, что должна быть справедливой система уравнений:

$$\begin{cases} -1(x-1)-3(y-1)-2(z-1)=0, \\ \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{-2}=\lambda; \end{cases} \begin{cases} -1+\lambda+1-6+9\lambda+3-6+4\lambda+2=0, \\ x=1-\lambda, \\ y=2-3\lambda, \\ z=3-2\lambda; \end{cases} \begin{cases} \lambda=\dfrac{1}{2}, \\ x=\dfrac{1}{2}, \\ y=\dfrac{1}{2}, \\ z=2. \end{cases}$$

Итак, $\overrightarrow{AB}\{-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};1\}$, $AB = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

2-й способ. Пусть $B(x; y; z)$ – ортогональная проекция точки A на прямую MN, тогда $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}=\alpha\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MA}$. Неизвестное число α находим из условия перпендикулярности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MN}$:

$$(\alpha\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MA})\cdot\overrightarrow{MN}=0; \quad \alpha\overrightarrow{MN}^2+\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MN}=0.$$

Этот способ удобно применять в случае, когда введение прямоугольной системы координат не рационально.

Пример 2. (МФТИ, 1984 г.)

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S $SA=4$. Точка D лежит на ребре SC и $CD=3$, расстояние от точки A до прямой BD равно 2. Найти объём пирамиды.

Решение. Выберем базис: $\overrightarrow{SA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{SB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{SC}=\vec{c}$. Пусть N – проекция точки A на прямую BD.

Имеем: $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{DN}-\overrightarrow{DA}=\alpha\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{SB}=-\frac{1}{4}\vec{c}+\vec{b}$;

$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{SA}=-\frac{1}{4}\vec{c}+\vec{a}$.

Выполняя замену, получим:

$$\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{4}\alpha\vec{c}+\alpha\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}-\vec{a}=-\vec{a}+\alpha\vec{b}+\frac{1}{4}(1-\alpha)\vec{c}.$$

Векторы $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{DB}$ перпендикулярны, а поэтому

$$(-\vec{a}+\alpha\vec{b}+\frac{1}{4}(1-\alpha)\vec{c})\cdot(-\frac{1}{4}\vec{c}+\vec{b})=0.$$

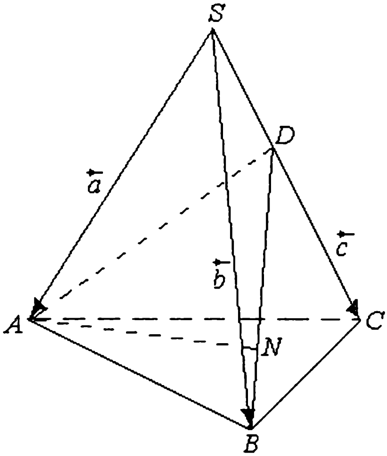


Рис. 1

Обозначим плоский угол при вершине пирамиды через φ, тогда:

$$\frac{1}{4}\cdot 16\cos\varphi - 16\cos\varphi - \frac{1}{4}\alpha\cdot 16\cos\varphi + 16\alpha - \frac{1}{16}(1-\alpha)\cdot 16 +$$
$$+\frac{1}{4}\cdot 16(1-\alpha)\cos\varphi = 0,$$ откуда $(17\alpha-1)-8\cos\varphi(1+\alpha)=0.$ (1)

Находим длину AN: $\overrightarrow{AN}^2=(-\vec{a}+\alpha\vec{b}+\frac{1}{4}(1-\alpha)\vec{c})^2$, раскрывая скобки, имеем $16\alpha^2-32\alpha\cos\varphi+16-8(1-\alpha)^2\cos\varphi+1-2\alpha+$ $+\alpha^2=17\alpha^2-2\alpha+17-8(1+\alpha)^2\cos\varphi=4.$ (2)

Из (1) получаем $\cos\varphi=\dfrac{17\alpha-1}{8(1+\alpha)}$, поэтому равенство (2) после подстановки $\cos\varphi$ принимает вид $17\alpha^2-2\alpha+13-(\alpha+1)(17\alpha-1)=0$, откуда $\alpha=\dfrac{7}{9}$ и $\cos\varphi=\dfrac{55}{64}$.

Далее легко находится высота пирамиды SO. Поскольку O — центр треугольника ABC, $\overrightarrow{SO}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+4\vec{c}\right)$ и

$$\left|\overrightarrow{SO}\right| = \frac{1}{3}\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}+4\vec{c}\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{48+96\cos\varphi} = \frac{1}{2}\sqrt{58}.$$

При нахождении ребра основания заметим, что $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2 = \left|\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{a}\right|^2 - 2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\varphi = 16+16-2\cdot 4\cdot\frac{55}{65} = \frac{9}{2}.$$

Объём пирамиды $V_{SABC} = \frac{1}{3}\frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\sqrt{3}}{4}\left|\overrightarrow{SO}\right| = \frac{3\sqrt{174}}{16}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{174}}{16}$ куб. ед.

Примечание. Пример может быть решен и 1-м способом, однако при решении возникают технические трудности.

Задача 1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На ребре AB взята точка M так, что $AM : MB = 2 : 1$, а на ребре A_1D_1 точка N взята так, что $A_1N : ND_1 = 3 : 1$. Расстояние от точки O пересечения диагоналей куба до прямой MN равно $\frac{10\sqrt{2}}{17}$. Найти объём куба.

Решение.

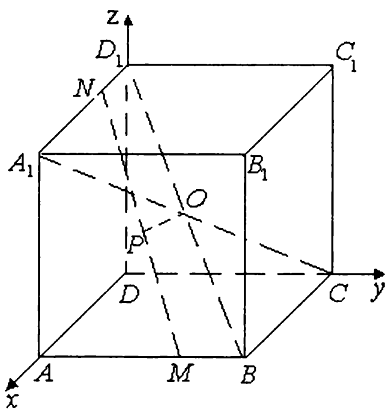


Рис. 2

1. При решении этой задачи воспользуемся первым способом.

Пусть сторона куба равна a. Запишем координаты некоторых точек: $A(a;\ 0;\ 0)$, $B(a;\ a;\ 0)$, $C(0;\ a;\ 0)$, $D(0;\ 0;\ 0)$, $A_1(a;\ 0;\ a)$, $D_1(0;\ 0;\ a)$, $C_1(0;\ a;\ a)$, $B_1(a;\ a;\ a)$, $M(a;\ \frac{2}{3}a;\ 0)$, $N(\frac{1}{4}a;\ 0;\ a)$, $O(\frac{1}{2}a;\ a;\ a)$. $P(x;\ y;\ z)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки O на отрезок NM.

Имеем далее: $\overrightarrow{OP}\left\{x-\frac{a}{2};\ y-\frac{a}{2};\ z-\frac{a}{2}\right\}$; $\overrightarrow{NM}\left\{\frac{3}{4}a;\ \frac{2}{3}a;-a\right\}$; $\overrightarrow{NP}\left\{x-\frac{1}{4}a;\ y;\ z-a\right\}$. Поскольку векторы $\overrightarrow{NM}$ и $\overrightarrow{NP}$ коллинеарны, получаем $\dfrac{x-\frac{1}{4}a}{\frac{3}{4}a}=\dfrac{y}{\frac{2}{3}a}=\dfrac{z-a}{-a}=t$, откуда $x = \frac{3}{4}at + \frac{1}{4}a$; $y = \frac{2}{3}at$; $z =-at + a$. (*)

Так как $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{NM}=0$,

поэтому $\left(x-\frac{a}{2}\right)\cdot\frac{3}{4}a+\left(y-\frac{a}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}a-\left(z-\frac{a}{2}\right)\cdot a=0.$

Разделив почленно последнее равенство на a, получим

$\left(x-\frac{a}{2}\right)\cdot\frac{3}{4}+\left(y-\frac{a}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}-\left(z-\frac{a}{2}\right)=0$ или

$$\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}t+\frac{1}{4}\right)a-\frac{3}{8}a+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}at-\frac{a}{3}+at-a+\frac{a}{2}=0.$$

Ещё раз разделив на a и выполняя преобразования, получим $t=\frac{147}{289}$. Следовательно, $x = \frac{365}{578}a$; $y = \frac{98}{289}a$; $z = \frac{142}{289}a$. Тогда

$$\overrightarrow{OP}\left\{\frac{38}{289}a;\ -\frac{93}{578}a;\ -\frac{5}{578}a\right\},\ \left|\overrightarrow{OP}\right|=\frac{5\sqrt{2}}{34}a.$$

По условию $\frac{5\sqrt{2}}{34}a=\frac{10\sqrt{2}}{17}$, поэтому $a = 4$ и $V = 64$.

2. Решим задачу вторым способом.

Введём базис $\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}$; $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$; $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$. Пусть ребро куба имеет длину a. Имеем $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1N}=-\frac{2}{3}\vec{b}+\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{c}$. Если $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{MN}$, то

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OD_1}+\overrightarrow{D_1N}+\overrightarrow{NP}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c}-\vec{b})-\frac{1}{4}\vec{c}+\delta\overrightarrow{NM}=$$
$$=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{2}{3}\delta\vec{b}-\delta\vec{a}-\frac{3}{4}\delta\vec{c}=$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\delta\right)\vec{a}+\left(\frac{2}{3}\delta-\frac{1}{2}\right)\vec{b}+\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\delta\right)\vec{c}.$$

Так как $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{MN}=0$;

$$-\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\delta-\frac{1}{2}\right)a^2+\left(\frac{1}{2}-\delta\right)a^2+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\delta\right)a^2=0$$

Разделив на a^2, после преобразований получим $\delta=\frac{147}{289}$. Дальнейшие вычисления дают $OP^2=\frac{200}{16\cdot289}a^2$. По условию $\frac{200}{16\cdot289}a^2=\frac{200}{289}$, тогда $a = 4$ и $V = 64$.

Ответ: 64 кв. ед.

Задача 2. В правильной треугольной пирамиде величина плоского угла при вершине равна φ, а перпендикуляр, опущенный из основания высоты пирамиды на боковое ребро, равен p. Найти объём пирамиды.

Решение. Пусть $\overrightarrow{SA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{SB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{SC}=\vec{c}$, тогда $\overrightarrow{SO}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$.

Имеем, что $\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SK}=-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+t\vec{c}$ (заметим, что векторы $\overrightarrow{SC}$ и $\overrightarrow{SK}$ коллинеарны, а потому $\overrightarrow{SK}=t\overrightarrow{SC}=t\vec{c}$).

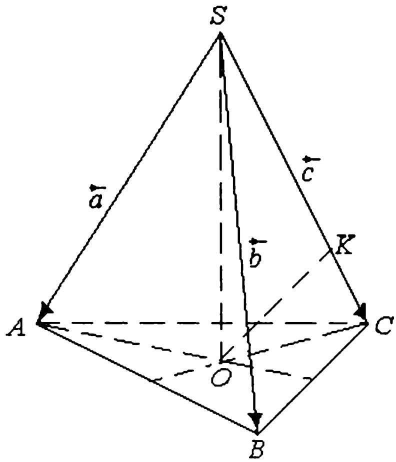


Рис. 3

$\overrightarrow{OK}^2 = p^2$, $\overrightarrow{OK}^2 = \left(\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SK}\right)^2 = (t\vec{c} - \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}))^2$. Пусть боковое ребро пирамиды равно a, тогда

$$t^2a^2 - \frac{2}{3}t(a^2\cos\varphi + a^2\cos\varphi + a^2\cos\varphi) + \frac{1}{9}(3a^2 + 6a^2\cos\varphi) =$$

$$= t^2a^2 - 2ta^2\cos\varphi + \frac{1}{3}a^2(1 + 2\cos\varphi) = p^2. \qquad (*)$$

Так как $\overrightarrow{OK} \perp \overrightarrow{SC}$, $\left(-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+t\vec{c}\right)\cdot\vec{c}=0$; $-\frac{1}{3} - (a^2\cos\varphi + a^2\cos\varphi + a^2) + ta^2 = 0$, откуда после упрощения получаем $t = \frac{1}{3}(2\cos\varphi + 1)$. Заменяя в равенстве (*) t его значением, будем иметь:

$$\frac{1}{9}(2\cos\varphi + 1)2a^2 - \frac{2}{3}(2\cos\varphi + 1)a^2\cos\varphi + \frac{1}{3}a^2(2\cos\varphi + 1) = p^2;$$

$$a^2(2\cos\varphi + 1)\ \frac{4}{9}(1 - \cos\varphi) = p^2;$$

откуда $a = \dfrac{\frac{3}{2}p}{\sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{1+2\cos\varphi}} = \dfrac{3p}{2\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{2+4\cos\varphi}}$.

Поскольку $\overrightarrow{SO} = \frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$; $SO^2 = \frac{1}{9}(3a^2+6a^2\cos\varphi) = \frac{1}{3}a^2(2\cos\varphi+1)$

и $SO = \dfrac{1}{\sqrt{3}}a\sqrt{1+2\cos\varphi} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{3p}{2\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{2+4\cos\varphi}}\sqrt{1+2\cos\varphi} = \dfrac{p\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2}}$.

И далее $V = \dfrac{9p^3}{128\sqrt{2}\sin^3\frac{\varphi}{2}\cos\left(30^0+\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(30^0-\frac{\varphi}{2}\right)}$.

Ответ: $\dfrac{9p^3}{128\sqrt{2}\sin^3\frac{\varphi}{2}\cos\left(30^0+\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(30^0-\frac{\varphi}{2}\right)}$.

Задача 3. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$, в котором $AB = 2$, $AD = \sqrt{3}$, $\angle BAD = \frac{\pi}{6}$. Точка K является серединой ребра D_1C_1, расстояние от вершины B_1 призмы до прямой CK равно $\sqrt{\frac{7}{8}}$. Найти площадь боковой поверхности.

Решение. Выберем в качестве базисных векторов векторы $\overrightarrow{CD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CC_1} = \vec{c}$, обозначим $|\vec{c}| = CC_1 = c$ и найдём скалярные произведения необходимых нам для вычислений векторов: $\vec{a}^2 = 4$; $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}^2 = 3$; $\vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c} = 0$; $\vec{c}^2 = c^2$.

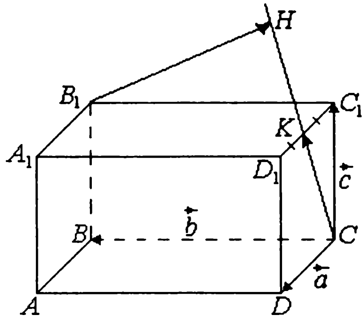


Рис. 4

Пусть $B_1H \perp CK$, $H \in CK$. Поскольку векторы $\overrightarrow{CH}$ и $\overrightarrow{CK}$ коллинеарны, $\overrightarrow{CH} = x\ \overrightarrow{CK} = x\ (\overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1K}) = x\left(\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \frac{1}{2}x(\vec{a} + 2\vec{c})$.

$$\overrightarrow{B_1H} = \overrightarrow{CH} - \overrightarrow{CB_1} = \frac{1}{2}x(\vec{a} + 2\vec{c}) - (\vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{2}(x\vec{a} - 2\vec{b} + 2(x-1)\vec{c}).$$

Так как $B_1H \perp CK$, $\overrightarrow{B_1H} \cdot \overrightarrow{CK} = 0$,

поэтому $\frac{1}{2}(x\vec{a} - 2\vec{b} + 2(x-1)\vec{c}) \cdot \left(\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}\right) = 0$, откуда

$$4x - 6 + 4c^2(x - 1) = 0. \qquad (*)$$

Поскольку $\left|\overrightarrow{B_1H}\right| = \sqrt{\frac{7}{8}}$, $\left|\overrightarrow{B_1H}\right|^2 = \frac{7}{8}$, откуда

$\frac{1}{4}(x^2\vec{a}^2 + 4\vec{b}^2 + 4(x-1)^2\vec{c}^2 - 4x\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{7}{8}$, а значит,

$$4x^2 + 12 + 4(x - 1)2c^2 - 12x = \frac{7}{2}. \qquad (**)$$

Уравнения (*) и (**) определяют систему двух уравнений с двумя неизвестными x и c:

$$\begin{cases} 2x - 3 + 2c^2(x-1) = 0, \\ x^2 - 3x + (x-1)^2c^2 + 3 = \frac{7}{8}; \end{cases} \quad \begin{cases} 2(x-1) + 2c^2(x-1) = 1, \\ (x-1)^2 - (x-1) + (x-1)^2c^2 + 1 = \frac{7}{8}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)(c^2+1)=\dfrac{1}{2}, \\ (x-1)^2(c^2+1)-(x-1)=-\dfrac{1}{8}; \end{cases} \begin{cases} (x-1)(c^2+1)=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{2}(x-1)-(x-1)=-\dfrac{1}{8}; \end{cases} \begin{cases} c^2=1, \\ x=\dfrac{5}{4}; \end{cases} \begin{cases} c=1, \\ x=\dfrac{5}{4}. \end{cases}$$

Итак, $CC_1 = 1$, и определение площади боковой поверхности теперь не составит большого труда: $S = CC_1 \cdot 2(CD + CB) = 2(\sqrt{3}+2)$.

Ответ: $2(\sqrt{3}+2)$.

Примечание. В этой задаче мы при решении придерживались стандартного алгоритма нахождения расстояния от точки до прямой; полученная система двух уравнений сразу привела к получению ответа.

Упражнения.

1. Пары точек A и A_1, B и B_1, лежащих в одной плоскости, расположены симметрично относительно одной прямой. Доказать, что эти четыре точки лежат на одной окружноси или же на одной прямой.

2. На сколько дальше центр верхнего основания куба удалён от вершины нижнего основания, чем от его стороны?

3. Показать, что если пирамида имеет равные по длине боковые рёбра, то вокруг неё можно описать сферу, и радиус этой сферы равен квадрату длины ребра, делённому на удвоенную длину высоты пирамиды.

4. Все плоские углы при вершине D треугольной пирамиды $DABC$ равны $\dfrac{\pi}{3}$, $DA = 2$, $DB = 4$, $DC = 3$. Точки P, M, K являются серединами рёбер DA, DB и BC соответственно. Найти расстояние от точки M до прямой PK.

5. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ с вершиной D длина бокового ребра DA равна 2. Точка К делит ребро BC в отношении 2:1, считая от вершины B. Расстояние от вершины A до прямой DK равно $\dfrac{\sqrt{62}}{4}$. Найти длину высоты DH пирамиды (H – основание высоты).

6. Доказать, что объём конуса равен третьей части произведения боковой поверхности на расстояние от центра основания до образующей.

7. Основаниями усечённой пирамиды служат правильные треугольники. Прямая, соединяющая середину одной стороны верхнего основания с серединой параллельной ей стороны нижнего основания, перпендикулярной ей стороны нижнего основания, перпендикулярна плоскостям основания оснований. Большее боковое ребро равно l и составляет с плоскостью основания угол, равный α. Найти длину отрезка, соединяющего центры верхнего и нижнего основания.

8. В треугольной пирамиде $PABC$ боковое ребро PB перпендикулярно плоскости основания ABC и равно 12, $AB = BC = 7$, $AC = 4$. Сфера, центр O которой лежит на ребре AB, касается плоскостей граней PAC и PBC. Найти расстояние от центра O до ребра PB.

Ответы и комментарии к упражнениям.

2. На $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{2}$.

4. $\sqrt{\dfrac{11}{12}}$.

5. Существуют две пирамиды, удовлетворяющие условиям задачи: высота одной равна 1, высота второй – $\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{46}{3}}$.

7. $\dfrac{1}{3}\sqrt{5-4\cos 2\alpha}$.

8. $\dfrac{7}{4}\left(7-\sqrt{21}\right)$.

IV. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ И ПРЯМОЙ ДО ПЛОСКОСТИ

Если точка не принадлежит плоскости, то расстояние от этой точки до плоскости, как известно, равно длине перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

Если известен объём V пирамиды и площадь S её основания, то высота h пирамиды определяется по формуле

$$h = \frac{3V}{S}.$$

Эта высота и есть не что иное, как расстояние от вершины пирамиды до плоскости её основания.

Но чаще всего в задачах не задаются ни объём, ни площадь. В этом случае построение перпендикуляра из точки на плоскость проводится следующим образом.

Нужно через точку провести плоскость, перпендикулярную данной плоскости. Затем из данной точки опустить перпендикуляр на линию пересечения этих двух плоскостей. Длина этого перпендикуляра и есть расстояние от точки до плоскости.

Мы при решении задач будем использовать векторы, обращаясь для комментариев к другим способам.

Рассмотрим два способа нахождения расстояния от точки до плоскости и их применение при решении сложных геометрических задач.

Покажем на конкретном примере первый способ нахождения расстояния от точки до плоскости.

Задача 1. Плоскость α содержит точки $A(1;1;0)$, $B(-1;0;1)$, $C(1;1;1)$. Определить расстояние от точки $M\,(1;-1;1)$ до плоскости α.

Решение. Прежде всего, покажем, что точки A, B и C определяют плоскость. Для этого достаточно показать, что, например, векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ неколлинеарные. Имеем, что $\overrightarrow{AB}\{-2;-1;1\}$; $\overrightarrow{AC}\{0;0;1\}$.

Отсутствует пропорциональность соответствующих координат, поэтому векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ неколлинеарные.

Замечание. Убедиться в том, что точки *A*, *B* и *C* образуют плоскость, можно иначе. Достаточно заметить, что угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ отличен от нуля, то есть проверить выполнение неравенства $\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|}\neq 1$. В нашем случае это условие выполняется.

Пусть $F(x;y;z)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость α, тогда $\overrightarrow{MF}\{x-1;y+1;z-1\}$. Так как $\overrightarrow{MF}\perp\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MF}\perp\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MF}\perp\overrightarrow{AF}$, то скалярные произведения $\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{AF}=0$. Для определения *x*, *y* и z имеем систему уравнений

$$\begin{cases}-2(x-1)-(y+1)+(z-1)=0,\\ z-1=0,\\ (x-1)^2+y^2-1+z(z-1)=0.\end{cases}$$

Система одним из решений имеет (1; -1; 1). При этих значениях вектор $\overrightarrow{MF}=\vec{0}$. Это будет верным для случая, когда точка *M* лежит в плоскости α, поэтому $x\neq 1$, $y\neq 1$, $z=1$.

$$\begin{cases}y+1=-2(x-1),\\ z=1,\\ (x-1)^2-2(x-1)(y-1)=0,\end{cases}\qquad (*)$$

откуда, с учетом, что $x\neq 1$, находим $x=\dfrac{1}{5}$; $y=\dfrac{3}{5}$; $z=1$ и

$$\overrightarrow{MF}\left\{-\frac{4}{5};\frac{8}{5};0\right\};\ \left|\overrightarrow{MF}\right|=\sqrt{\frac{16}{25}+\frac{65}{25}+0}=\frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Примечание. Укажем другой способ нахождения координат точки *F*. Точка *F* лежит в плоскости (*ABC*), поэтому вектор $\overrightarrow{AF}$

линейно выражается через векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$, то есть найдутся такие числа α и β, при которых $\overrightarrow{AF}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$. В координатной форме это равенство имеет вид

$\alpha\{-2;-1;1\}+\beta\{0;0;1\}=\{x-1;y-1;z\}$;

$\{-2\alpha;-\alpha;\alpha+\beta\}=\{x-1;y-1;z\}$.

Тогда $x=1-2\alpha$; $y=1-\alpha$; $z=\alpha+\beta$. Подставляя вместо x и y найденные значения в первое уравнение системы (*), находим

$\alpha=\frac{2}{5}$; $\beta=\frac{3}{5}$. Далее $x=\frac{1}{5}$; $y=\frac{2}{5}$; $z=1$, и $\overrightarrow{MF}=\left\{-\frac{4}{5};\ \frac{8}{5};\ 0\right\}$.

$\left|\overrightarrow{MF}\right|=\sqrt{\frac{16}{25}+\frac{65}{25}+0}=\frac{4}{\sqrt{5}}$.

Ответ: $\frac{4}{\sqrt{5}}$.

Уравнение плоскости, проходящей через точку $N(x_0;y_0;z_0)$ ***и перпендикулярной вектору*** $\vec{n}\{a;b;c\}$.

Пусть $M(x;y;z)$ – точка, находящаяся на плоскости, тогда $\overrightarrow{NM}\{x-x_0;y-y_0;z-z_0\}$ и, поскольку $\overrightarrow{NM}\perp\vec{n}$, $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$. Уравнение плоскости можно представить в виде $ax+by+cz+d=0$, где $d=-(ax_0+by_0+cz_0)$.

Задача 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;1;0)$, $B(-1;0;1)$, $C(1;1;1)$.

Решение. Подставляя координаты точек A, B и C в уравнение $ax+by+cz+d=0$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases}a+b+d=0,\\-a+c+d=0,\\a+b+c+d=0,\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}a+b=-d,\\a-c=d,\\a+b+c=-d,\end{cases}\quad\text{откуда}\quad\begin{cases}a=d,\\b=-2d,\\c=0,\end{cases}$$

и уравнение плоскости $dx-2dy+d=0$. Разделив на $d \neq 0$, получаем $x-2y+1=0$.

Получим формулу нахождения расстояния от точки $M(x_0;\ y_0;\ z_0)$ до плоскости α: $ax+by+cz+d=0$. Пусть $M_1(x_1;y_1;z_1)$ – основание перпендикуляра MM_1 в плоскости α. Очевидно, что вектор $\overrightarrow{MM_1}$ коллинеарен вектору $\vec{n}\left\{a;\,b;\,c\right\}$, поэтому $\frac{x_1-x_0}{a}=\frac{y_1-y_0}{b}=\frac{z_1-z_0}{c}=\lambda$, откуда $x_1=a\lambda+x_0$; $y_1=b\lambda+y_0$; и $z_1=c\lambda+z_0$ так как точка M принадлежит плоскости α, $a(a\lambda+x_0)+b(b\lambda+y_0)+c(c\lambda+z_0)+d=0$, откуда $\lambda=-\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}$.

Искомое расстояние MM_1 найдем по формуле расстояния между двумя точками:

$$MM_1=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}=\sqrt{\lambda^2\left(a^2+b^2+c^2\right)}=|\lambda|\sqrt{a^2+b^2+c^2}=$$

$$=\left|-\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}\right|\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\left|\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|.$$

Решим теперь задачу 1, вспомнив, что нами уже было получено уравнение плоскости $x-2y+1=0$.

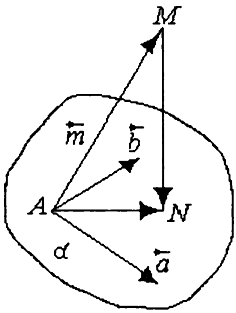
$$d=\frac{|1\cdot1-2\cdot(-1)+0\cdot1+1|}{\sqrt{1+4}}=\frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Способ векторного нахождения расстояния от точки до плоскости.

Пример. Пусть дана плоскость α с базисом $\vec{a}$, $\vec{b}$, точка A, принадлежащая плоскости α, точка M, не лежащая в плоскости α. Найти расстояние от точки M до плоскости α.

Решение. Пусть $\overrightarrow{AM}=\vec{m}$, а N – ортогональная проекция точки M на плоскость α. Тогда $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{m}$. Неизвестные координаты x и y найдём из условия, что $\overrightarrow{MN} \perp \vec{a}$ и $\overrightarrow{MN} \perp \vec{b}$,

то есть $\begin{cases} (x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{m}) \cdot \vec{a} = 0, \\ (x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{m}) \cdot \vec{b} = 0. \end{cases}$ Кроме того, $MN = \sqrt{(x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{m})^2}$.



Задача 3. Сторона основания правильной треугольной призмы равна a, а боковое ребро — b. Найти расстояние от точки M до плоскости $A_1C_1F_1$, где M — середина ребра BC, а F — середина ребра BB_1.

Решение*. 1-й способ.* Введем прямоугольную систему координат так, как показано на рис. 1.

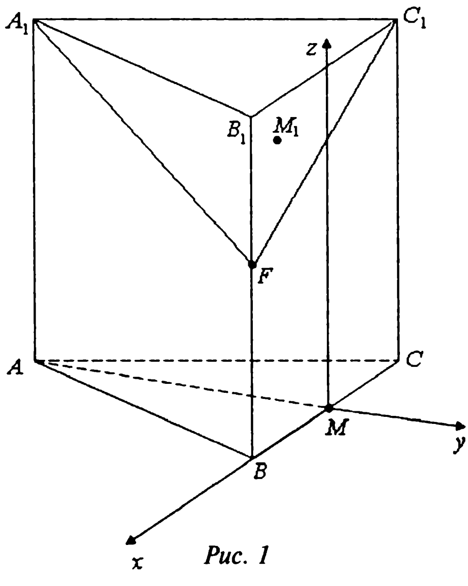


Рис. 1

Легко заметить, что $A_1\left(0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; b\right)$, $C_1\left(-\frac{a}{2}; 0; b\right)$,

$F\left(\frac{a}{2}; 0; \frac{b}{2}\right)$, $\overrightarrow{A_1C_1}\left\{-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right\}$; $\overrightarrow{C_1F}\left\{a;\ 0; -\frac{b}{2}\right\}$.

Пусть M_1 – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость A_1C_1F, тогда $\overrightarrow{MM_1}\{x; y; \mathrm{z}\}$, где координаты точки $M_1(x; y; \mathrm{z})$.

Используя условие $\overrightarrow{MM_1} \perp (A_1C_1F)$, получаем

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = 0, \\ \overrightarrow{MM_1} \cdot \overrightarrow{C_1F} = 0, \\ \overrightarrow{MM_1} \cdot \overrightarrow{C_1M_1} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{a}{2}x + \frac{a\sqrt{3}}{2}y = 0, \\ ax - \frac{b}{2}\mathrm{z} = 0, \\ \left(x + \frac{a}{2}\right)x + y^2 + (\mathrm{z} - b)\mathrm{z} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{x}{\sqrt{3}}, \\ \mathrm{z} = \frac{2a}{b}x, \\ \left(x + \frac{a}{2}\right)x + \frac{x^2}{3} + \frac{2a}{b}x\left(\frac{2a}{b}x - b\right) = 0. \end{cases}$$

Разделив третье уравнение системы на очевидное $x \neq 0$, получаем $x + \frac{a}{2} + \frac{x}{3} + \frac{4a^2}{b^2}x - 2a = 0$; $x\left(\frac{4}{3} + \frac{4a^2}{b^2}\right) = \frac{3a}{2}$; $x = \frac{9ab^2}{8\left(b^2 + 3a^2\right)}$.

Так как $\left(x + \frac{a}{2}\right)x + y^2 + \mathrm{z}(\mathrm{z} - b) = 0$, то $x^2+y^2+z^2=zb-\frac{a}{2}x=2ax-\frac{a}{2}x=\frac{3}{2}ax$, и $x^2+y^2+z^2=\frac{27a^2b^2}{16\left(b^2+3a^2\right)}$.

Извлекая из обеих частей равенства квадратный корень, получаем:

$$MM_1=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{3\sqrt{3}ab}{4\sqrt{b^2+3a^2}}.$$

2-й способ. Составим уравнение плоскости, проходящей через точки $F\left(\frac{a}{2};0;\frac{b}{2}\right)$, $A_1\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};b\right)$, $C_1\left(-\frac{a}{2};0;b\right)$. Подставляя в уравнение $mx+ny+cz+d=0$ координаты точек F, A_1 и C_1, приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} m\frac{a}{2}+c\frac{b}{2}+d=0, \\ -\frac{a\sqrt{3}}{2}n+bc+d=0, \\ -m\frac{a}{2}+bc+d=0. \end{cases}$$

Складывая первое и третье уравнения системы, получим $\frac{3bc}{2}+2d=0$, откуда $c=-\frac{4d}{3b}$; $m\frac{a}{2}-\frac{2d}{3}+d=0$; $m=-\frac{2d}{3a}$; $-\frac{a\sqrt{3}}{2}n-\frac{4d}{3}+d=0$; $-\frac{a\sqrt{3}}{2}n=\frac{d}{3}$; $n=-\frac{2d}{3\sqrt{3}a}$.

Уравнение плоскости: $-\frac{2d}{3a}x-\frac{2d}{3\sqrt{3}a}y-\frac{4d}{3b}z+d=0$ или $\frac{2}{3a}x+\frac{2}{3\sqrt{3}a}y+\frac{4}{3b}z-1=0$.

Так как $M(0;0;0)$, используя формулу расстояния от точки до плоскости, получаем

$$d=\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{9a^2}+\frac{4}{27a^2}+\frac{16}{9b^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{12b^2+4b^2+48a^2}{27a^2b^2}}}=\frac{3\sqrt{3}ab}{4\sqrt{b^2+3a^2}}.$$

3-й способ. Введём для призмы (рис. 2) базис: $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{BB_1}=\vec{c}$. Пусть M_1 – ортогональная проекция точки M на плоскость A_1FC_1. Имеем, что $\overrightarrow{MM_1}=\overrightarrow{FM_1}-\overrightarrow{FM}=x\overrightarrow{FC_1}+y\overrightarrow{FA_1}-\overrightarrow{FM}$, но $\overrightarrow{FC_1}=\overrightarrow{FB_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{b}$; $\overrightarrow{FA_1}=\overrightarrow{FB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}=\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{a}$ и

$\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BM}=-\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}$. Итак,

$$\overrightarrow{MM_1}=\frac{1}{2}x\vec{c}+x\vec{b}+\frac{1}{2}y\vec{c}+y\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}=y\vec{a}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\vec{b}+\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}\right)\vec{c}.$$

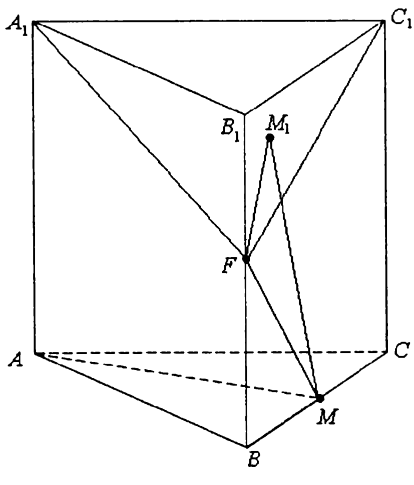


Рис. 2

Поскольку $\overrightarrow{MM_1} \perp \overrightarrow{FC_1}$ и $\overrightarrow{MM_1} \perp \overrightarrow{FA_1}$,

$$\begin{cases} \left(y\vec{a}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\vec{b}+\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}\right)\vec{c}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{b}\right)=0; \\ \left(y\vec{a}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\vec{b}+\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}\right)\vec{c}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{a}\right)=0. \end{cases}$$

Раскрываем скобки и учитываем, что $\vec{a}\perp\vec{c}$; $\vec{b}\perp\vec{c}$; $(\vec{a}\,^\wedge\ \vec{b})=60°$; $|\vec{a}|=|\vec{b}|=a$; $|\vec{c}|=b$. Получаем систему

$$\begin{cases} \frac{1}{2}ya^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)a^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}\right)b^2=0; \\ ya^2+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)a^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}\right)b^2=0. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим после упрощения $y = x - \frac{1}{2}$. Заменяя y полученным значением в первом уравнении системы, будем иметь $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)a^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)a^2+\frac{1}{4}\left(2x+\frac{1}{2}\right)b^2=0$, откуда $x = \frac{6a^2-b^2}{4(b^2+3a^2)}$, далее $y = -\frac{3b^2}{4(b^2+3a^2)}$, и тогда $\overrightarrow{MM_1}=-\frac{3b^2}{4(b^2+3a^2)}\vec{a}-\frac{3b^2}{4(b^2+3a^2)}\vec{b}+\frac{9a^2}{4(b^2+3a^2)}\vec{c}$. После преобразований получаем

$$\left|\overrightarrow{MM_1^2}\right|=\frac{9b^4a^2}{16(b^2+3a^2)^2}+\frac{9b^4a^2}{16(b^2+3a^2)^2}+\frac{9b^4a^2}{16(b^2+3a^2)^2}+$$

$$+\frac{81a^4b^2}{16(b^2+3a^2)^2}=\frac{27b^4a^2+81a^4b^2}{16(b^2+3a^2)^2}=\frac{27a^2b^2(b^2+3a^2)}{16(b^2+3a^2)^2}=\frac{27a^2b^2}{16(b^2+3a^2)}.$$

$$MM_1 = \frac{3\sqrt{3}ab}{4\sqrt{b^2+3a^2}}.$$

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{3}ab}{4\sqrt{b^2+3a^2}}$.

Задача 4. (МГУ, 1977 г., физический факультет)

Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \| BB_1 \| CC_1 \| DD_1$) равна 1. На ребре взята точка так, что $AE = \frac{1}{3}$, а на ребре BC взята точка F так, что длина отрезка EF равна $\frac{1}{4}$. Через центр куба, точки E и F проведена плоскость α. Найти расстояние от вершины B_1 до плоскости α.

Решение. Введем прямоугольную систему координат так, как показано на рис. 3.

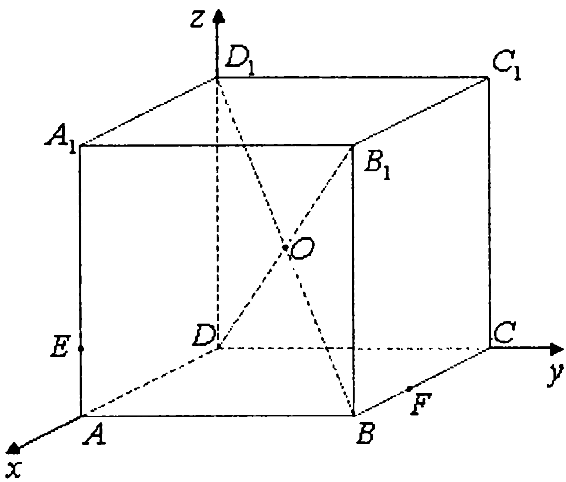


Рис. 3

Тогда $E\left(1;0;\frac{1}{3}\right)$, $F\left(\frac{3}{4};1;0\right)$, $O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $B_1(1;1;1)$.

Напишем уравнение плоскости (EOF).

$$\begin{cases} x+\frac{1}{3}z+d=0, \\ \frac{3}{4}x+y+d=0, \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z+d=0. \end{cases}$$

Решая данную систему, находим $x=-\frac{8}{11}d,\ y=-\frac{5}{11}d,\ z=-\frac{9}{11}d,$ и уравнение плоскости принимает вид $-\frac{8}{11}x-\frac{5}{11}y-\frac{9}{11}z+1=0$ или $8x+5y+9z-11=0$.

Используя формулу нахождения расстояния от точки до плоскости, получим

$$d=\frac{8+5+9-11}{\sqrt{64+25+81}}=\frac{11}{\sqrt{170}}.$$

Замечание. Решить эту задачу первым из рассмотренных нами способов будет нелегко с вычислительной точки зрения. Советуем попробовать решить эту задачу чисто векторным способом.

Задача 5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты две точки: K — середина ребра C_1D_1 и M — середина ребра BC. Найти отношение объемов пирамиды MCA_1K и данного куба.

Решение. Так как все кубы подобны, то искомое отношение не будет зависеть от длины ребра, которую примем равной 1.

Примечание. Можно, конечно, считать длину ребра равной a; потом в процессе преобразования выражений при решении системы уравнений эта постоянная сократиться. «Единица» только упрощает решение.

Введем прямоугольную систему координат как показано на рис. 4.

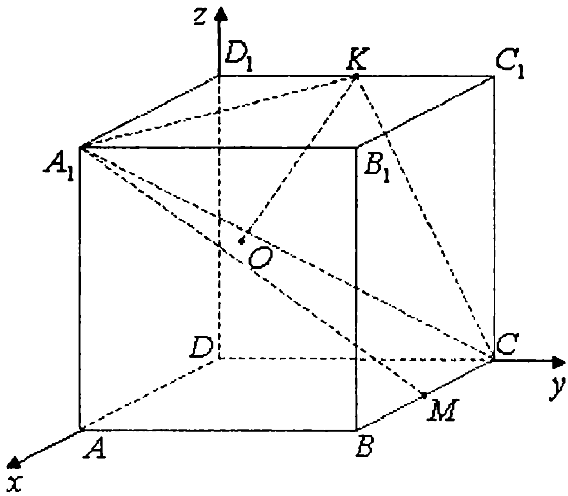


Рис. 4

В качестве основания пирамиды можно взять любой треугольник. Возьмем треугольник A_1CM. Тогда высота пирамиды – это перпендикуляр, опущенный из точки K на плоскость (A_1CM), уравнение которой напишем.

Имеем $A_1(1;0;1)$, $M\left(\frac{1}{2};1;0\right)$, $C(0;1;0)$.

Подставляя координаты этих точек в уравнение плоскости $ax+by+cz+d=0$, находим

$$\begin{cases} a+c+d=0, \\ \frac{1}{2}a+b+d=0, \\ b+d=0, \end{cases}$$

откуда $a=0$, $b=-d$, $c=-d$ и $-y-z+1=0$, $y+z-1=0$ – уравнение плоскости.

Координаты точки $K\left(0;\frac{1}{2};1\right)$, поэтому $KO=\frac{\left|\frac{1}{2}+1-1\right|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Найдем площадь треугольника A_1CM. Находим стороны:

$$A_1M=\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+(0-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+2}=\frac{3}{2},$$

$$A_1C=\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{3}\,,\quad MC=\frac{1}{2}.$$

Применяя теорему косинусов, имеем

$$A_1C^2=A_1M^2+MC^2-2\,A_1M\cdot MC\cos\angle AMC\,;$$

$$3=\frac{9}{4}+\frac{1}{4}-2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos\angle AMC\,;\ \cos\angle AMC=-\frac{1}{3}\ \text{ и}$$

$$\sin\angle AMC=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$S_{\Delta AMC}=\frac{1}{2}A_1M\cdot MC\sin\angle AMC=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{4}.\quad V_{ABCD}=1\,;$$

$$V_{AKCM}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{24}.$$

Ответ: $\frac{1}{24}$.

Задача 6. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Через точки A, B и середину ребра SC проведена плоскость. Определить, в каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды.

Решение.

Способ 1. Сечение пирамиды плоскостью легко строится (рис. 5).

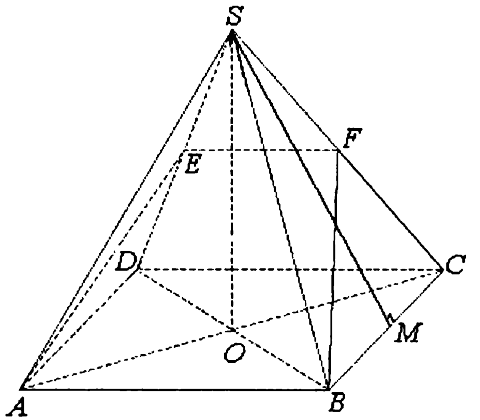


Рис. 5

Примем сторону основания пирамиды равной a, а высоту $-h$. Найдем площадь трапеции $SABFE$, поскольку в дальнейшем будем искать объем пирамиды $SABFE$. Из $\triangle SOC$ находим, что

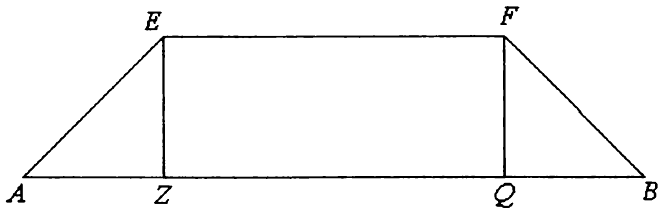
$SC = \sqrt{h^2 + \dfrac{a^2}{2}}$, а из $\triangle SMC$ имеем

$$\cos\angle SCM = \frac{a}{2\sqrt{h^2 + \dfrac{a^2}{2}}} = \frac{a}{\sqrt{4h^2 + 2a^2}}.$$

Далее из $\triangle FBC$ по теореме косинусов находим

$$FB^2 = a^2 + \frac{a^2}{8} + \frac{h^2}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2h^2 + a^2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a^2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2h^2 + a^2}} =$$

$$= \frac{9a^2}{8} + \frac{h^2}{4} - \frac{a^2}{2} = \frac{5a^2}{8} + \frac{1}{4}h^2.$$



Трапеция $ABFE$ — равнобедренная $AZ = BQ = \frac{a}{4}$, $EZ \perp AB$ и $FQ \perp AB$. Из $\triangle FQB$ по теореме Пифагора имеем $FQ = \sqrt{\frac{5a^2}{8} + \frac{1}{4}h^2 - \frac{a^2}{16}} = \frac{\sqrt{9a^2 + 4h^2}}{4}$. Площадь трапеции равна $\frac{3a\sqrt{9a^2 + 4h^2}}{16}$.

Способ 2. Предложим другой подход к решению задачи.

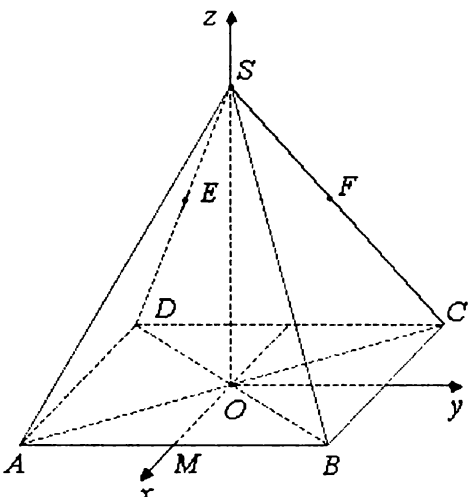


Рис. 6

Введем прямоугольную систему координат в пространстве и поместим в нее пирамиду (рис. 6). Найдем расстояние от точки S до плоскости ABF.

Легко увидеть, что $A\left(\frac{a}{2};-\frac{a}{2};0\right)$, $B\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$, $F\left(-\frac{a}{4};\frac{a}{4};\frac{h}{2}\right)$, $S(0;0;h)$.

Составим уравнение плоскости ABF: $mx+ny+cz+d=0$, тогда

$$\begin{cases} ma+na+2d=0, \\ ma-na+2d=0, \\ am-an-2hc-4d=0, \end{cases}$$

откуда $n=0$, $m=-\frac{2d}{a}$, $-2d-2hc-4d=0$, $c=-\frac{3d}{h}$.

Уравнение плоскости $-\frac{2d}{a}x-\frac{3d}{h}z+d=0$ или $\frac{2}{a}x+\frac{3}{h}z-1=0$. Используя формулу расстояния от точки до плоскости, находим

$$d=\frac{\left|\frac{3}{h}h-1\right|}{\sqrt{\frac{4}{a^2}+\frac{9}{h^2}}}=\frac{2ah}{\sqrt{4h^2+9a^2}}.$$

Объем пирамиды $SABFE$ равен

$\frac{1}{3}\cdot\frac{3a\sqrt{9a^2+4h^2}}{16}\cdot\frac{2ah}{\sqrt{9a^2+4h^2}}=\frac{1}{8}a^2h$ и, следовательно, составляет $\frac{1}{8}a^2h:\frac{1}{3}a^2h=\frac{3}{8}$ объема данной пирамиды и искомое отношение равно $\frac{3}{5}$.

Способ 3. Для сравнения приведем иное, без применения векторов, решение. Проведем через высоту SO плоскость MSP (рис. 7), перпендикулярную ребру AB.

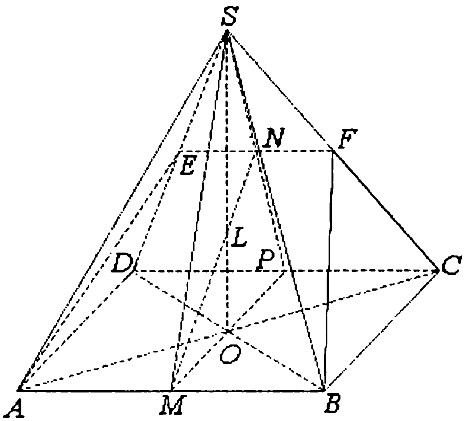


Рис. 7

Пусть MN – линия пересечения этой плоскости с плоскостью сечения. Очевидно, что MN – высота трапеции $ABFE$, поскольку она соединяет середины оснований. Так как плоскость $ABFE$ содержит прямую $AB\perp(MSN)$, то $(MSN)\perp(ABF)$, а поэтому перпендикуляр, опущенный из вершины S на плоскость $ABFE$, лежит в плоскости MSN и перпендикулярен отрезку MN. Следовательно, высота пирамиды $SABFE$ совпадает с высотой треугольника MSN. Займемся нахождением этой высоты.

Последовательно находим $SM=SP=\sqrt{n^2+\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{4}}=\sqrt{n^2+\frac{a^2}{4}}$,

$SN=\frac{1}{2}\sqrt{n^2+\frac{a^2}{4}}$.

Применим к $\triangle SMN$ теорему косинусов:
$MN^2=MS^2+SN^2-2MS\cdot SN\cos\angle MSN$;

$$\frac{9a^2+4h^2}{16}=h^2+\frac{a^2}{4}+\frac{1}{4}\left(h^2+\frac{a^2}{4}\right)-\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}\cdot\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}\cdot\cos\angle MSN;$$

$$9a^2+4h^2=16h^2+4a^2+4h^2+a^2-4(4h^2+a^2)\cos\angle MSN;$$

$$\cos\angle MSN = \frac{a^2 - 4h^2}{4h^2 + a^2}; \sin\angle MSN = \sqrt{1-\left(\frac{a^2 - 4h^2}{4h^2 + a^2}\right)^2} = \frac{4ah}{4h^2 + a^2};$$

$$S_{\Delta MSN} = \frac{1}{2} SM \cdot SN \sin\angle MSN = \frac{1}{2} SL \cdot MN; \text{ откуда}$$

$$SL = \frac{SM \cdot SN \sin\angle MSN}{MN} =$$

Дальнейшие рассуждения очевидны.

Задача 7. На продолжении ребра ST за точку T правильной четырехугольной пирамиды $SPQRT$ с вершиной S взята точка B так, что расстояние от этой точки до плоскости SPQ равно $\frac{9\sqrt{7}}{2}$ см. Найти длину отрезка BT, если $QR = 12$ см, $SR = 10$ см.

Решение.

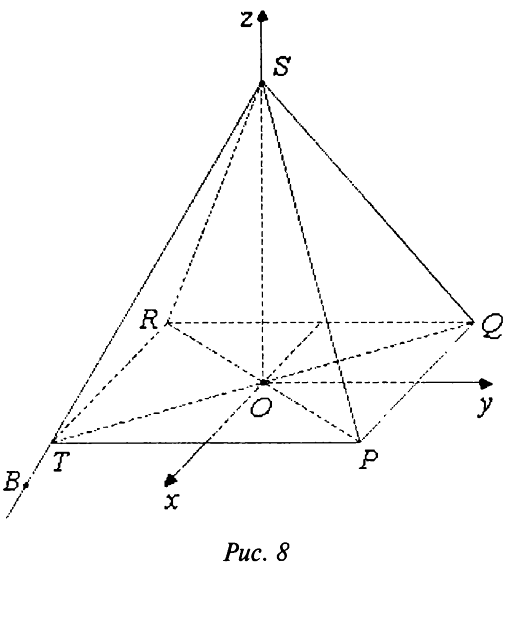


Рис. 8

Поместим пирамиду в прямоугольную систему координат, как показано на рис. 8.

Очевидно, что $TO = \frac{1}{2}TQ = \frac{1}{2}12\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ см. Из прямоугольного треугольника STO имеем $SO = \sqrt{100-72} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ см.

Находим координаты некоторых вершин пирамиды: $T(6;-6;0)$, $P(6;6;0)$, $Q(-6;6;0)$, $S\left(0;0;2\sqrt{7}\right)$; и пусть точка имеет координаты $(x_0; y_0; z_0)$.

Составим уравнение плоскости SPQ: $ax + by + cz + d = 0$.

$$\begin{cases} 6a + 6b + d = 0, \\ -6a + 6b + d = 0, \\ 2\sqrt{7}c + d = 0, \end{cases}$$

откуда $b = -\frac{d}{6}$, $a = 0$, $c = -\frac{d}{2\sqrt{7}}$ и уравнение плоскости принимает вид $-\frac{d}{6}y - \frac{d}{2\sqrt{7}}z + d = 0$, $\frac{1}{6}y + \frac{1}{2\sqrt{7}}z - 1 = 0$.

Векторы $\overrightarrow{ST} = \left\{6;-6;-2\sqrt{7}\right\}$ и $\overrightarrow{TB} = \{x_0 - 6; y_0 + 6; z_0\}$ коллинеарные, а поэтому $\frac{x_0 - 6}{6} = \frac{y_0 + 6}{-6} = \frac{z_0}{-2\sqrt{7}} = \lambda$, $x_0 = 6\lambda + 6$, $y_0 = -6\lambda - 6$, $z_0 = -2\sqrt{7}\lambda$, причем $\lambda > 0$.

По полученной ранее формуле расстояния от точки до плоскости находим

$$d = \frac{|-\lambda - 1 - \lambda - 1|}{\sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{28}}} = \frac{|2\lambda + 2|\,6\sqrt{7}}{4} = |\lambda + 1|\,3\sqrt{7}.$$

Согласно условиям, имеем уравнение $|\lambda+1|3\sqrt{7}=\frac{9\sqrt{7}}{2}$, $|\lambda+1|=1{,}5$, отсюда $\lambda=0{,}5$ или $\lambda=-2{,}5$.

Для $\lambda=0{,}5$, $x_0=9$, $y_0=-9$, $z_0=-\sqrt{7}$ и $\overrightarrow{BT}=\left\{3;-3;\sqrt{7}\right\}$, $|\overrightarrow{BT}|=\sqrt{9+9+7}=5$. Второе значение λ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 5.

Задача 8. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной 1. Найти расстояние между плоскостями AB_1C и A_1DC_1.

Решение.

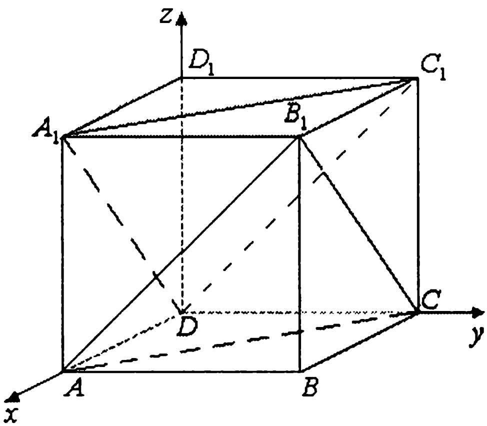


Рис. 9

Куб поместим в прямоугольную систему координат так, как показано на рис. 9.

Плоскости AB_1C и A_1DC_1 параллельны, так как, например, $A_1D \parallel B_1C$ и $AC \parallel A_1C_1$, $A_1C_1 \cap A_1D = A_1$.

Для плоскости AB_1C: $A(1;0;0)$, $C(0;1;0)$, $B_1(1;1;1)$, и уравнение плоскости ищем в виде $ax+by+cz+d=0$, тогда, после подстановки в нее координат точек A, C и B_1, получаем систему

$$\begin{cases} a+d=0, \\ b+d=0, \\ a+b+c+d=0; \end{cases} \quad \begin{cases} a=-d, \\ b=-d, \\ c=d. \end{cases}$$

Легко получить, что $x+y-z-1=0$.

Аналогично получаем уравнение плоскости A_1DC_1: $x+y-z=0$.

Ищем расстояние от любой точки, принадлежащей одной плоскости, до другой плоскости (эти плоскости параллельны). Возьмем точку $M(2;1;2)$, принадлежащей плоскости AB_1C, и находим расстояние от нее до плоскости A_1DC_1:

2

$$d=\frac{|2+1-2|}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Примечание. Авторы умышленно не рассматривали задачи на нахождение расстояния от прямой до плоскости. Ясно, что эта задача имеет решение только тогда, когда прямая параллельна плоскости. Взяв произвольную точку прямой (сначало необходимо показать, что прямая параллельна плоскости) и найдя расстояние от этой точки до плоскости, мы определим расстояние от прямой до плоскости.

Упражнения.

1. Высота правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна H, а сторона основания равна a. Вычислить расстояние от центра основания до плоскости SCD.

2. В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник ABC. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и равно b. Вычислить расстояние от вершины C до плоскости BAS, если угол между этой плоскостью и плоскостью основания равен α.

3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вычислить расстояние от вершины B_1 до плоскости ACD_1, если $AB = a$, $AD = c$, $AA_1 = b$.

4. Правильный треугольник спроецирован на плоскость β; вершины треугольника отстоят от этой плоскости на расстоянии 10, 15 и 17. Вычислить расстояние от центра треугольника до плоскости β.

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ a и $a\sqrt{3}$ – стороны основания, а h – высота. Вычислить расстояние от точки C до плоскости AB_1D_1.

6. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a. Боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом $\frac{\pi}{3}$. Вычислить расстояние от середины стороны основания до боковой грани.

7. В наклонном параллелепипеде плоские углы при одной из вершин равны $\frac{\pi}{4}$. Длины рёбер равны a, b и c. Вычислить расстояния от центра основания до боковых граней.

8. Диагонали AB_1 и CB_1 двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ составляют с диагональю AC основания $ABCD$ углы, соответственно равные α и β. Вычислить расстояние от вершины B до плоскости треугольника AB_1C, если $AA_1 = a$.

9. В правильной четырёхугольной пирамиде $TABCD$ с высотой, равной 5, и стороной основания, равной 4, проведена плоскость, проходящая через медиану CM боковой грани TCD параллельно апофеме грани TAB. На каком расстоянии от этой плоскости находится центр основания пирамиды?

10. В наклонной треугольной призме площадь одной из боковых граней равна m^2, а расстояние от этой грани до противоположного ребра равно $2a$. Вычислить объём пирамиды.

11. Через сторону AB ромба $ABCD$ проведена плоскость p так, что проекции диагоналей ромба на эту плоскость равны 8 и 2, а проекции сторон ромба на эту плоскость равны 5 и 3. Вычислить расстояние от стороны CD до плоскости p.

12. Высота четырёхугольной пирамиды $TABCD$ равна h и проецируется в центр прямоугольного основания $ABCD$. Вычислить расстояние между прямой AB и плоскостью TCD, если $AD = a$.

Ответы к упражнениям.

1. $\dfrac{Ha}{\sqrt{a^2+4H^2}}$.

2. $b\operatorname{tg}\alpha\sin\beta$.

3. $\dfrac{2abc}{\sqrt{b^2(a^2+c^2)+a^2c^2}}$.

4. 14.

5. $\dfrac{2\sqrt{3}ah}{\sqrt{4h^2+3a^2}}$.

6. $\dfrac{3a}{2\sqrt{13}}$.

7. $\dfrac{a}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}$; $\dfrac{b}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}$.

8. $a\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta}$.

9. $\dfrac{10}{19}$.

10. $a\,m^2$.

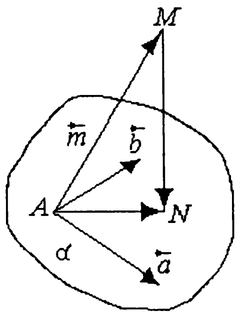
11. 4.

12. $\dfrac{ah}{\sqrt{4h^2+a^2}}$.

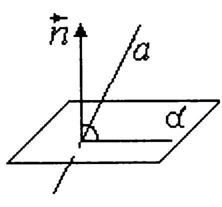
V. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

Угол между прямой a и плоскостью α – это угол между прямой и её проекцией на плоскость.

Угол между прямой AM и плоскостью α равен углу между векторами $\vec{m}$ и $\overrightarrow{AN} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис плоскости α. Имеем ввиду, что $x\vec{a} + y\vec{b} \neq 0$, так как в противном случае $MN \perp \alpha$.



Угол между вектором нормали $\vec{n}$ (перпендикулярным к плоскости α) и прямой a дополняет угол между прямой и плоскостью до 90°.



$$\sin(\vec{a}\hat{;}\alpha) = |\cos(\vec{n}\hat{;}\vec{a})|.$$

Задача 1. В пирамиде $SABCD$ ребро SD перпендикулярно плоскости ABC, основание $ABCD$ – прямоугольник. Точка M – середина ребра SC, $\frac{AB}{CD} = \sqrt{3}$. Найти угол между прямой MD и плоскостью SBC.

Решение. *Способ 1.* Ребро SD перпендикулярно плоскости ABC, SC – наклонная, DC – проекция SC на плоскость ABC. Поскольку $BC \perp DC$, $BC \perp SC$, т. е. прямая перпендикулярна двум прямым, пересекающимся в точке C, поэтому ребро BC перпендикулярно плоскости SDC.

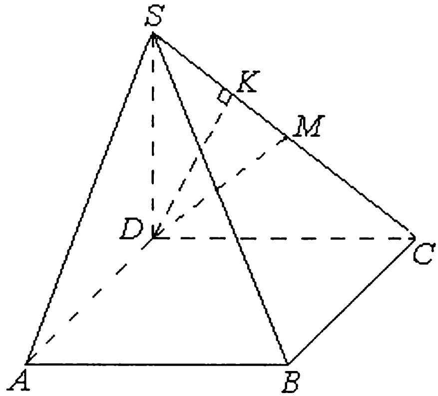


Рис. 1

Так как плоскость SBC проходит через прямую BC, а прямая BC перпендикулярна плоскости SDC, то плоскости SBC и SDC взаимно перпендикулярны.

Проведём в плоскости SDC $DK \perp SC$, тогда $DK \perp (SBC)$. Найдём KMD. M – середина гипотенузы SC в прямоугольном треугольнике SDC, поэтому $DM=SM$. По условию $\frac{DC}{SD} = \sqrt{3}$, но тогда треугольник SDM – равносторонний. Искомый угол KMD равен 60°.

Способ 2. Введём прямоугольную систему координат как показано на рис. 2.

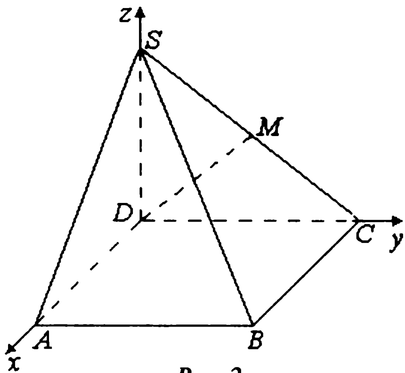


Рис. 2

Пусть $DS = a$, $DA = b$, тогда $DC = a\sqrt{3}$, и координаты необходимых для решения точек: $S(0;\ 0;\ a)$, $C(0;\ a;\ 0)$, $B(b;\ a;\ 0)$, $M\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}\right)$.

Уравнение плоскости SBC будем искать в виде $mx + ny + cz + d = 0$, где $(m;\ n;\ c)$ – координаты вектора нормали (подробнее о методе координат в разделе X). Плоскость проходит через точки S, B и C, подстановка их координат в уравнение плоскости даёт:

$$\begin{cases} ac + d = 0, \\ na\sqrt{3} + d = 0, \\ mb + na\sqrt{3} + d = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} c = -\dfrac{d}{a}, \\ n = -\dfrac{d}{a\sqrt{3}}, \\ mb - d + d = 0; \end{cases}$$

$m = 0$ и $-\frac{d}{a\sqrt{3}}y - \frac{d}{a}z + d = 0;\ -\frac{d}{a\sqrt{3}}y - \frac{d}{a}z + d = 0;$

$y + \sqrt{3}z - a\sqrt{3} = 0$ – уравнение плоскости. Вектор нормали к плоскости $\vec{n}\left\{0; 1; \sqrt{3}\right\}$, $\overrightarrow{DM}\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}\right)$. Определим угол между вектором нормали и вектором $\overrightarrow{DM}$: $\cos\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha = 30°$. Угол между прямой и плоскостью дополняет полученный угол до прямого и равен 60°.

Ответ: 60°.

Задача 2. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро равно $\sqrt{3}$, а сторона основания равна $2\sqrt{2}$. Найти угол между боковым ребром SA и плоскостью боковой грани SBC.

Решение. *Способ 1.* Поместим пирамиду в прямоугольную систему координат (рис. 3) так, что точка O – центр треугольника, лежащего в основании.

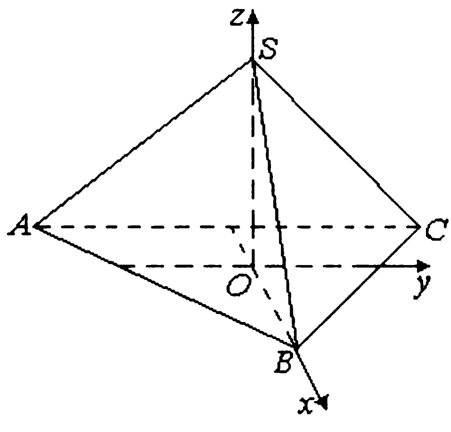


Рис. 3

O – точка пересечения медиан, тогда координаты точек будут:

$$S\left(0;0;\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ B\left(\frac{2\sqrt{2}}{3};0;0\right),\ C\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}};\sqrt{2};0\right),\ A\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}};-\sqrt{2};0\right).$$

Уравнение плоскости SBC, как и в задаче 1, будем искать в виде $mx + ny + cz + d = 0$, где $(m;\ n;\ c)$ – координаты вектора нормали. Плоскость проходит через точки S, B и C, подстановка их координат в уравнение плоскости даёт:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}}c + d = 0, \\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}m + d = 0, \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}m + \sqrt{2}n + d = 0; \end{cases} \begin{cases} c = -\sqrt{3}d, \\ m = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}d, \\ \sqrt{2}n = -d + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)d = -\frac{3}{2}d; \end{cases} \begin{cases} c = -\sqrt{3}d, \\ m = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}d, \\ n = -\frac{3}{2\sqrt{2}}d. \end{cases}$$

Уравнение плоскости принимает вид $-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}x - \frac{3}{2\sqrt{2}}y - \sqrt{3}z + 1 = 0$; $\sqrt{3}x + 3y + 2\sqrt{6}z - 2\sqrt{2} = 0$, и вектор нормали $\vec{n}\{\sqrt{3};3;2\sqrt{6}\}$; вектор $\overrightarrow{AS}\left\{\sqrt{\frac{2}{3}};\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.

Далее легко находится угол между найденными векторами:
$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{3+9+24}\cdot\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, он равен синусу угла наклона бокового ребра SA к плоскости боковой грани SBC: $\varphi = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Способ 2. Сделаем некоторые дополнительные построения, как показано на рис. 4.

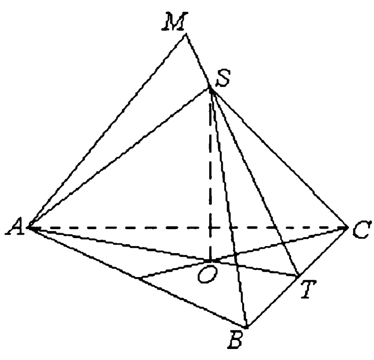


Рис. 4

$BC \perp AT$, $BC \perp ST$, тогда ребро BC перпендикулярно плоскости AST, а поэтому плоскости AST и SBC взаимно перпендикулярны. Поскольку линией пересечения этих плоскостей является ST, то проведя $AM \perp ST$, получим, что отрезок AM перпендикулярен плоскости SBC, и проекцией отрезка AS на плоскость SBC является отрезок SM.

Для нахождения угла ASM дважды запишем выражения для площади треугольника AST: $S_{\Delta AST} = \frac{1}{2} SO \cdot AT = \frac{1}{2} AM \cdot ST$;

$$AM = \frac{SO \cdot AT}{ST} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{6}}{1} = \sqrt{2}; \ \sin\angle ASM = \frac{AM}{AS} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ответ: $\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Примечание. Задачу можно решить и по-другому, если заметить, что $V_{SATC} = \frac{1}{3} AM \cdot S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2} V_{SABC}$.

Задача 3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = \sqrt{3}$, $AA_1 = \sqrt{2}$, $BC = 1$. На стороне AB взята точка N такая, что $AN : NB = 1 : 2$. Найти угол между прямой A_1N и плоскостью AA_1C_1.

Решение.

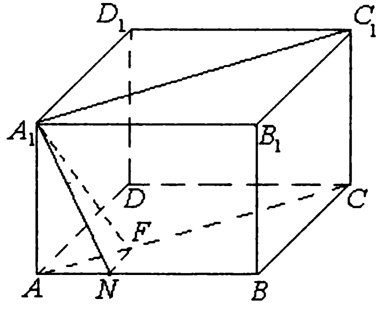


Рис. 5

Способ 1. В плоскости ABC проведём $NF \perp AC$. Кроме того, как всякий отрезок, лежащий в основании, отрезок NF перпендикулярен вертикальному ребру AA_1, поэтому (поскольку AC и AA_1 пересекаются в точке A) NF перпендикулярен и плоскости AA_1C_1. Далее имеем, что A_1F — проекция прямой A_1N на плоскость AA_1C_1 и необходимо найти NA_1F.

Заметим, что $\triangle AFN \sim \triangle ABC$, поэтому $\dfrac{NF}{BC} = \dfrac{AN}{AC}$, откуда

$$NF = \frac{BC \cdot AN}{AC} = \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}.\ \angle NFA_1 = 90°.$$

Из прямоугольного треугольника NA_1F имеем

$$\sin \angle NA_1F = \frac{NF}{A_1N} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{2 + \frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{14}.$$ Угол равен $\arcsin \dfrac{\sqrt{7}}{14}$.

Способ 2. Теперь воспользуемся методом координат. Пусть вершина D совпадает с началом координат, а DA, DC и DD_1 лежат на осях координат.

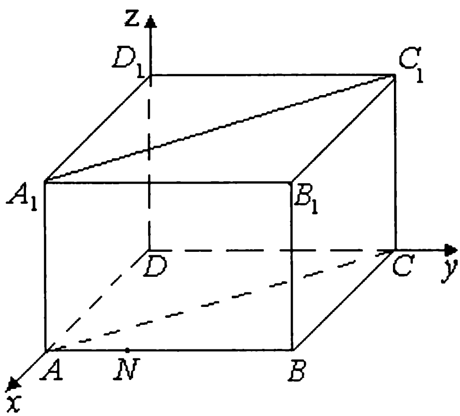


Рис. 6

Найдём координаты некоторых вершин параллелепипеда:

$D(0;\ 0;\ 0)$, $A(1;\ 0;\ 0)$, $A_1(1;\ 0;\ \sqrt{2})$, $C(0;\ \sqrt{3};\ 0)$, $N\left(1; \frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right)$,

где $a > 0$.

Как и ранее, напишем уравнение плоскости AA_1C_1 в виде $mx + ny + cz + d = 0$, решив систему уравнений

$$\begin{cases} m + d = 0, \\ \sqrt{3}n + d = 0, \\ m + \sqrt{2}c + d; \end{cases} \quad \begin{cases} m = -d, \\ n = -\dfrac{d}{\sqrt{3}}, \\ c = 0. \end{cases}$$

Уравнение плоскости $-dx - \frac{1}{\sqrt{3}}\ dy + d = 0; x + \frac{1}{\sqrt{3}} y - 1 = 0$, тогда вектор нормали $\vec{n}\{1; \frac{1}{\sqrt{3}}; 0\}$. Отметим, что $\overrightarrow{A_1N}\left\{0; \frac{\sqrt{3}}{3};\ -\sqrt{2}\right\}$, тогда косинус угола между вектором нормали и прямой A_1N равен: $\cos\alpha = \dfrac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{1}{3}+2}} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{7}}$.

Он соответствует синусу угла между этой прямой и плоскостью AA_1C_1.

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{7}}{14}$.

Задача 4. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с прямыми плоскими углами при вершине S на ребре SA взята точка M так, что $SM : AM = 1 : 3$, а на ребре SC взята такая точка F, что $SF = FC$. Через ребро основания BC и точку M проведена плоскость. Какой угол образует прямая FM с этой плоскостью?

Решение.

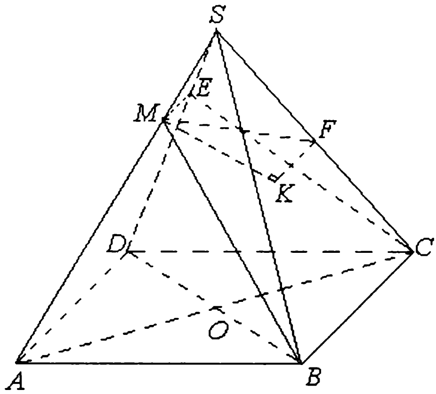


Рис. 7

$BCEM$ – сечение, являющееся трапецией. Пусть K – проекция точки F на плоскость MBC. Выберем базис – три некомпланарных вектора: $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{MK} = x\overrightarrow{ME} + y\overrightarrow{MB}$ – разложение вектора $\overrightarrow{MK}$ по двум векторам плоскости MBC. Кроме того, $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{SE} - \overrightarrow{SM} = \frac{1}{4}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a}$; $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AM} =$

$\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SD} - \overrightarrow{AM} = \vec{c} - \vec{b} + \frac{3}{4}\vec{a}$; $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{SF} - \overrightarrow{SM} = \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{a}$.

Далее имеем, что

$$\overrightarrow{FK} = \overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MF} = x\left(\frac{1}{4}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a}\right) + y\left(\vec{c} - \vec{b} + \frac{3}{4}\vec{a}\right) - \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{4}\vec{a} =$$

$$= \left(-\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y + \frac{1}{4}\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{4}x - y\right)\vec{b} + \left(y - \frac{1}{2}\right)\vec{c}.$$

Заметим, что $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} = 0$. Кроме того $\overrightarrow{FK} \perp \overrightarrow{ME}$ и $\overrightarrow{FK} \perp \overrightarrow{MB}$, а поэтому $\overrightarrow{FK}\cdot\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{FK}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$. Получаем систему

$$\begin{cases}\left(\left(-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y+\frac{1}{4}\right)\vec{a}+\left(\frac{1}{4}x-y\right)\vec{b}+\left(y-\frac{1}{2}\right)\vec{c}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}\right)=0,\\ \left(\left(-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y+\frac{1}{4}\right)\vec{a}+\left(\frac{1}{4}x-y\right)\vec{b}+\left(y-\frac{1}{2}\right)\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{c}-\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{a}\right)=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y+\frac{1}{4}\right)\left|\vec{a}^2\right|-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}x-y\right)\left|\vec{b}^2\right|=0,\\ \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y+\frac{1}{4}\right)\left|\vec{a}^2\right|-\left(\frac{1}{4}x-y\right)\left|\vec{b}^2\right|+\left(y-\frac{1}{2}\right)\left|\vec{c}^2\right|=0.\end{cases}$$

Поскольку $\left|\vec{a}^2\right|=\left|\vec{b}^2\right|=\left|\vec{c}^2\right|\neq 0,$

$$\begin{cases}-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}x+y=0,\\ -\frac{3}{16}x+\frac{9}{16}y+\frac{3}{16}-\frac{1}{4}x+y+y-\frac{1}{2}=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}-2x+7y+1=0,\\ -3x+9y+3-4x+32y-8=0;\end{cases}\begin{cases}2x-7y-1=0,\\ 7x-41y+5=0.\end{cases}$$

Решая последнюю систему, получаем $x=\frac{76}{33}$, $y=\frac{17}{33}$. Далее находим $\overrightarrow{MK}=\left(-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y+\frac{1}{4}\right)\vec{a}+\left(\frac{1}{4}x-y\right)\vec{b}+\left(y-\frac{1}{2}\right)\vec{c}=$

$$=\left(-\frac{19}{33}+\frac{15}{44}+\frac{1}{4}\right)\vec{a}+\left(\frac{19}{33}-\frac{17}{33}\right)\vec{b}+\left(\frac{17}{33}-\frac{1}{2}\right)\vec{c}=\frac{8}{33}\vec{a}+\frac{2}{33}\vec{b}+\frac{1}{66}\vec{c}.$$

Пусть m – длина бокового ребра пирамиды, тогда

$\left|\overrightarrow{MK}\right|=\sqrt{\frac{1}{33^2}\left(64+4+\frac{1}{4}\right)m^2}=\frac{1}{66}\sqrt{273}m$, при этом

$$|\overrightarrow{MF}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{a}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}}m = \frac{\sqrt{5}}{4}m.$$

После нахождения скалярного произведения определяем

$$\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{MF} = \left(\frac{8}{33}\vec{a} + \frac{2}{33}\vec{b} + \frac{1}{66}\vec{c}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) = -\frac{2}{33}m^2 + \frac{1}{132}m^2 = -\frac{7}{132}m^2$$

косинус угла наклона между прямой FM и секущей плоскостью:

$$\cos\varphi = \frac{-\frac{7}{132}m^2 \cdot 66 \cdot 4}{\sqrt{273} \cdot \sqrt{5}} = -\frac{14}{\sqrt{1369}}.$$

Напомним, что углом между прямой и плоскостью считается не тупой угол, а острый, поэтому искомый угол равен

$$\pi - \arccos\left(-\frac{14}{\sqrt{1365}}\right).$$

Ответ: $\pi - \arccos\left(-\frac{14}{\sqrt{1365}}\right)$.

Упражнения.

1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ через сторону основания AB и середину M ребра CC_1 проведена плоскость. Найти угол между прямой A_1C и плоскостью (ABM), если $AB = 1$, $AA_1 = 2$.

2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M – середина ребра AA_1, а точка N принадлежит ребру DD_1 так, что $DN : D_1N = 3 : 2$. Найти угол между прямой MN и плоскостью (DBB_1).

3. Ребро тетраэдра $ABCD$ равно 6. На рёбрах DA, DB и DC взяты точки M, N, P так, что $DM = MA$, $DN : NB = 1 : 2$, $DP : PC = 2 : 1$. Найти угол между ребром DA и плоскостью (MNP).

Ответы.

1. $\arcsin\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{35}}$. 2. $\arcsin\frac{10}{\sqrt{202}}$. 3. $\arcsin 0,8\sqrt{\frac{2}{3}}$.

VI. ЗАДАЧИ ОБ ОТНОШЕНИЯХ ОТРЕЗКОВ

Рассмотрим следующую группу задач – задачи об отношениях отрезков. Это довольно распространённый тип задач, в которых требуется определить, в каком отношении данная плоскость делит какой-либо отрезок. Как правило, такая плоскость является секущей плоскостью некоторого многогранника, а отрезком, упомянутым выше, служит или одно из рёбер многогранника, или высота (реже встречаются другие отрезки). При решении подобных задач следует выбрать тройку базисных векторов (обычно связанных с многогранником, например выходящих из одной вершины). Затем необходимо ввести подлежащие определению неизвестные. Их в большинстве случаев три: одно позволяет найти искомое отношение, а два других – коэффициенты в условии компланарности некоторых трёх векторов, принадлежащих данной плоскости. После этого, получив двумя способами разложение какого-либо вектора по базисным, нужно, используя единственность разложения (см. теорему 5 раздела I), приравнять коэффициенты в разложениях и получить три уравнения с тремя введёнными неизвестными. Рассмотрим несколько характерных задач.

Задача 1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 1. Точка M – середина ребра A_1D_1, N – точка на ребре BC такая, что $BN : NC = 1 : 2$. В каком отношении прямая MN делится плоскостью AA_1C?

Решение. Уравнение плоскости имеет вид: $mx + ny + cz + d = 0$. (*)

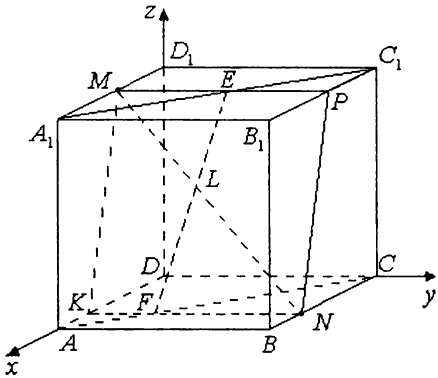


Рис. 1

Напишем уравнение плоскости AA_1C. Так как $A(1;\ 0;\ 0;)$, $C(0;\ 1;\ 0)$, $A_1(1;\ 0;\ 1)$, получаем систему $\begin{cases} m+d=0, \\ n+d=0, \\ m+c+d=0, \end{cases}$ откуда $m=n=-d$ и $c=0$.

Мы ищем уравнение плоскости в виде (*), получаем: $x+y-1=0$.

Заметим, что $M\left(\frac{1}{2};0;1\right)$, $N\left(\frac{2}{3};1;0\right)$, $\overrightarrow{MN}\left\{\frac{1}{6};1;-1\right\}$. Пусть $L(a;\ b;\ l)$ – точка пересечения прямой MN с плоскостью AA_1C_1, тогда $a+b-1=0$, и поскольку векторы $\overrightarrow{ML}$ и $\overrightarrow{MN}$ коллинеарны, их координаты пропорциональны:

$$\frac{a-\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}}=\frac{b}{1}=\frac{l-1}{-1}=\lambda.$$

Получаем $a=\frac{1}{6}\lambda+\frac{1}{2}$, $b=\lambda$; $l=-\lambda+1$ и, так как $a+b-1=0$, имеем $\frac{1}{6}\lambda+\frac{1}{2}+\lambda-1=0$; $\lambda=\frac{3}{7}$. Ясно, что $L\left(\frac{4}{7};\frac{3}{7};\frac{4}{7}\right)$.

Найдём расстояния между парами точек (длины векторов $\overrightarrow{ML}$ и $\overrightarrow{LN}$):

$$ML=\sqrt{\left(\frac{4}{7}-\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^2}=\frac{1}{7}\sqrt{\frac{1}{4}+18}=\frac{\sqrt{73}}{14},$$

$$LN=\sqrt{\left(\frac{4}{7}-\frac{2}{3}\right)^2+2\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^2}=\frac{1}{7}\sqrt{\frac{4}{9}+32}=\frac{1}{21}\sqrt{292}.$$

Окончательно получаем $\frac{MN}{LN}=\frac{\sqrt{73}}{14}\cdot\frac{21}{\sqrt{292}}=\frac{3}{4}$.

Ответ: $\frac{3}{4}$.

Примечание 1. Прямая MN пересекает плоскость AA_1C в точке L, поскольку координаты этой точки удовлетворяют уравнению прямой.

Примечание 2. Задача может быть решена и без использования векторов. Для этого достаточно заметить, что $MPNK$ — ромб, $\triangle MEL$ подобен $\triangle FLN$, тогда $\dfrac{ML}{LN}=\dfrac{ME}{FN}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}=\dfrac{3}{4}$.

Очевидно, что такой подход гораздо проще, но и предложенная задача не была трудной. При решении более сложных задач приходится выполнять довольно сложные дополнительные построения.

Задача 2. На серединах рёбер AB, CC_1, A_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки M, N и P. Пересекает ли прямая BD_1 плоскость MNP? В каком отношении (если прямая плоскость пересекает) точка пересечения делит диагональ BD_1?

Решение. Введём системы координат как показано на рис. 2. В силу подобия всех кубов примем длину его ребра за единицу.

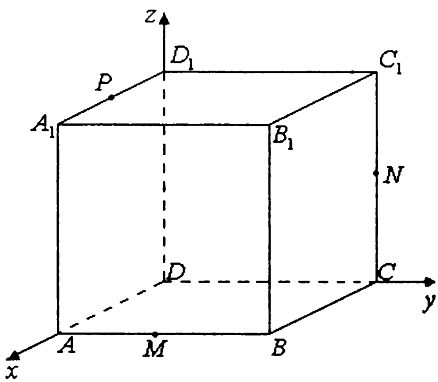


Рис. 2

Точки M, N и P определяют плоскость. Координаты точек, фигурирующих в условии задачи: $A(1;\,0;\,0)$, $B(1;\,1;\,0)$, $C(0;\,1;\,0)$, $A_1(1;\,0;\,1)$, $C_1(0;\,1;\,1)$, $D_1(0;\,0;\,1)$, $M\left(1;\frac{1}{2};0\right)$, $P\left(\frac{1}{2};0;1\right)$, $N\left(0;1;\frac{1}{2}\right)$.

Найдём уравнение плоскости MNP, которую при решении задачи с использованием метода координат нет необходимости строить. Как и в задаче 1, уравнение плоскости будем искать в виде $mx + ny + cz + d = 0$. Для трёх точек, через которые проведена эта плоскость, получим систему уравнений

$$\begin{cases} m + \dfrac{1}{2}n + d = 0, \\ n + \dfrac{1}{2}c + d = 0, \\ \dfrac{1}{2}m + c + d = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2m + n + 2d = 0, \\ 2n + c + 2d = 0, \\ m + 2c + 2d = 0. \end{cases}$$

Система даёт $m = n = c = -\dfrac{2}{3}d$, откуда $2x + 2y + 2z - 3 = 0$ – искомое уравнение плоскости.

Предположим, что прямая BD_1 пересекает плоскость MNP в точке $K(l; p; f)$. В силу коллинеарности векторов $\overrightarrow{BD_1}\{-1; -1; 1\}$ и $\overrightarrow{BK}\{l-1; p-1; f\}$ имеем

$$\frac{l-1}{-1} = \frac{p-1}{-1} = \frac{f}{1} = \lambda,$$

откуда $l - 1 = -\lambda$, $p - 1 = -\lambda$, $f = \lambda$, и $l = 1 - \lambda$, $p = 1 - \lambda$, $f = \lambda$.

Поскольку точка $K(1-\lambda; 1-\lambda; \lambda)$ принадлежит плоскости, должно выполняться равенство $2 - 2\lambda + 2 - 2\lambda + 2\lambda - 3 = 0$, откуда $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

Значит, диагональ BD_1 пересекает плоскость MNP в точке $K\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.

Далее находим $\overrightarrow{KD_1}\left\{-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right\}$, $\overrightarrow{KB}\left\{\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right\}$. Не делая вычислений, можно сказать, что $|\overrightarrow{KD_1}| = |\overrightarrow{KB}|$, а искомое отношение равно единице.

Ответ: пересекает; делит отрезок в отношении 1:1.

Задача 3. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ на рёбрах AB и BB_1 взяты точки P и K соответственно, причём $AP = 3 \cdot PB$, $B_1K = 4 \cdot BK$. Пусть O является точкой пересечения диагоналей грани BB_1CC_1. Найдите, в каком отношении плоскость PKO делит ребро AC.

Решение. Пусть плоскость PKO пересекает ребро AC в точке M и пусть $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BB_1} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$ – базисные векторы. Поскольку векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны, $\overrightarrow{AM} = x \cdot \overrightarrow{AC} = x\,(\vec{c} - \vec{a})$.

Итак, $\overrightarrow{AM} = -x \cdot \vec{a} + x \cdot \vec{c}$. (*)

С другой стороны, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KM} = -\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} + \overrightarrow{KM}$. (**)

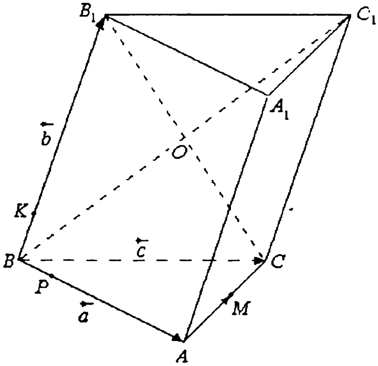


Рис. 3

По условию задачи точки K, O, M, P принадлежат одной плоскости, векторы $\overrightarrow{KO}$, $\overrightarrow{KM}$ и $\overrightarrow{KP}$ компланарны. Поэтому в силу теоремы 4 раздела I,

$$\overrightarrow{KM} = y \cdot \overrightarrow{KP} + z \cdot \overrightarrow{KO} = y \cdot (\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BP}) + z \cdot (\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BO}) =$$

$$= y \cdot \left(-\frac{1}{5}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{a}\right) + z \cdot \left(-\frac{1}{5}\vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})\right),$$

где y и z – некоторые числа.

Итак, $\overrightarrow{AM} = \left(-1 + \frac{1}{4}y\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}y + \frac{3}{10}z\right)\vec{b} + \frac{1}{2}z\vec{c}$ с учётом (**).

В силу единственности разложения вектора $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ получаем из соотношений (*) и (**), приравнивая соответствующие коэффициенты, следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -1+\frac{1}{4}y=-x, \\ \frac{1}{5}-\frac{1}{5}y+\frac{3}{10}z=0, \\ \frac{1}{2}z=x. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $y = 4 - 4x$, из третьего $-z = 2x$. Подставляя эти выражения во второе уравнение, получим $\frac{1}{5}-\frac{1}{5}(4-4x)+\frac{3}{5}x=0$, откуда $x = \frac{3}{7}$, т. е. $AM : AC = 3 : 7$, а значит, $AM : MC = 3 : 4$.

Ответ: 3 : 4.

Примечание. Заметим, что неизвестные y и z играли в решении вспомогательную роль. Определять их совсем не обязательно.

Задача 4. На рёбрах SA, AB, BC и CS треугольной пирамиды $SABC$ взяты точки K, P, M и T соответственно. Доказать, что эти точки принадлежат одной плоскости в том и только в том случае, если

$$\frac{SK}{KA}\cdot\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CT}{TS}=1. \qquad (*)$$

Решение.

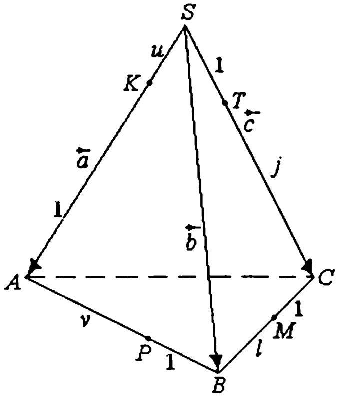


Рис. 4

Пусть точки K, P, M, T принадлежат одной плоскости. Введём обозначения: $\overrightarrow{SA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{SB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{SC}=\vec{c}$, $\dfrac{SK}{SA}=u$, $\dfrac{AP}{AB}=v$, $\dfrac{BM}{MC}=l$, $\dfrac{CT}{TS}=j$ и докажем, что

$$u\cdot v\cdot l\cdot j=1. \tag{1}$$

В самом деле, выбрав точки K, P, M и T так, чтобы выполнялись соотношения:

$$\overrightarrow{AP}=\frac{v}{v+1}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{v}{v+1}(\vec{b}-\vec{a}), \tag{2}$$

$$\overrightarrow{SK}=\frac{u}{u+1}\overrightarrow{SA}=\frac{u}{u+1}\vec{a},\ \overrightarrow{ST}=\frac{1}{j+1}\vec{c},\ \overrightarrow{TC}=\frac{j}{j+1}\vec{c},\ \overrightarrow{CM}=\frac{1}{l+1}(\vec{b}-\vec{c}).$$

С другой стороны, $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KT}+\overrightarrow{TP}$, но $\overrightarrow{TP}=x\cdot\overrightarrow{TK}+y\cdot\overrightarrow{TM}$, поскольку векторы $\overrightarrow{TP}$, $\overrightarrow{TK}$ и $\overrightarrow{TM}$ компланарны. Поэтому:

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KT}+x\cdot\overrightarrow{TK}+y\cdot\overrightarrow{TM}=-\frac{1}{u+1}\vec{a}+(1-x)\overrightarrow{KT}+y\cdot\overrightarrow{TM}=$$

$$=-\frac{1}{u+1}\vec{a}+(1-x)(\overrightarrow{ST}-\overrightarrow{SK})+y(\overrightarrow{TC}+\overrightarrow{CM})=$$

$$=-\frac{1}{u+1}\vec{a}+(1-x)\left(\frac{1}{j+1}\vec{c}-\frac{u}{u+1}\vec{a}\right)+y\left(\frac{j}{j+1}\vec{c}+\frac{1}{l+1}(\vec{b}-\vec{c})\right).$$

Отсюда:

$$\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{u+1}(1+(1-x)u)\vec{a}+y\cdot\frac{1}{l+1}\vec{b}+$$

$$+\left((1-x)\frac{1}{j+1}+y\cdot\frac{j}{j+1}-y\cdot\frac{1}{l+1}\right)\vec{c}. \tag{3}$$

Приравнивая, в силу единственности разложения коэффициенты при векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ в правых частях соотношений (2) и (3), получим

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{u+1}-(1-x)\dfrac{u}{u+1}=-\dfrac{v}{v+1}, \\ y\cdot\dfrac{1}{l+1}=\dfrac{v}{v+1}, \\ (1-x)\dfrac{1}{j+1}+y\cdot\dfrac{j}{j+1}-y\cdot\dfrac{1}{l+1}=0. \end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы найдём

$1-x=\left(\dfrac{v}{v+1}-\dfrac{1}{u+1}\right)\cdot\dfrac{u+1}{u}$, из второго — $y=\dfrac{v}{v+1}\cdot(l+1)$.

Подставив выражения $1-x$ и y в третье уравнение системы, получим $\left(\dfrac{v}{v+1}-\dfrac{1}{u+1}\right)\cdot\dfrac{u+1}{u}\cdot\dfrac{1}{j+1}+\dfrac{v}{v+1}(l+1)\dfrac{j}{j+1}=\dfrac{v}{v+1}$,

откуда $\dfrac{1}{j+1}\cdot\dfrac{uv-1}{(v+1)(u+1)}\cdot\dfrac{u+1}{u}+\dfrac{v\cdot j(l+1)}{(v+1)(j+1)}=\dfrac{v}{v+1}$, поэтому $uv-1+uvj(l+1)=uv(j+1)$. Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получаем $u\cdot v\cdot l\cdot j=1$, что и требовалось доказать.

Примечание 1. Пусть соотношение (1) выполняется. Предположим, что точка M не принадлежит плоскости KPT. Плоскость KPT пересекает ребро BC пирамиды в точке M_1, отличной от точки M, и пусть $BM_1 : M_1C = l_1$. Тогда в силу предыдущего $u\cdot v\cdot l_1\cdot j=1$, а значит (так как по условию имеет место соотношение (1)), $l_1=1$, т. е. точки M и M_1 делят ребро BC в одном и том же отношении, что означает совпадение этих точек. Итак, наше предположение привело к противоречию, и, следовательно, точки M, K, T, P принадлежат одной плоскости. Задача решена.

Примечание 2. Соотношение (*) достаточно просто для запоминания. Точки K, P, M, T принадлежат звеньям замкнутой пространственной ломаной (пространственного четырёхугольника). Мысленно двигаясь по сторонам этого четырёхугольника (начинать движение можно из любой его вершины по любому из двух возможных путей), следует брать соответствующие отношения в качестве множителей левой части формулы (1). Например,

$$\begin{array}{ccccccccc} C & \to & B & \to & A & \to & S & \to & C \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \end{array}$$

$$\frac{CM}{MB} \cdot \frac{BP}{PA} \cdot \frac{AK}{KS} \cdot \frac{ST}{TC} = 1.$$

Примечание 3. Результат задачи 3, в которой по трём данным отношениям нужно определить четвёртое, является простым следствием задачи 4 (обе эти задачи разобраны в [5]). В самом деле, если в задаче 3 рассмотреть треугольную пирамиду B_1BAC, то согласно задаче 4

$$\frac{B_1K}{KB} \cdot \frac{BP}{PA} \cdot \frac{AM}{MC} \cdot \frac{CO}{OB_1} = 1,$$

откуда

$$\frac{AM}{MC} = \frac{KB}{B_1K} \cdot \frac{PA}{PB} \cdot \frac{OB_1}{CO} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3}{4}.$$

Задача 5. На рёбрах DA, DB и DC треугольной пирамиды $DABC$ взяты точки M, N и K так, что $AM = MD$, $\frac{DN}{NB} = \frac{2}{3}$, $\frac{DK}{KC} = \frac{1}{3}$. Пусть O – точка пересечения медиан треугольника ABC. В каком отношении плоскость MNK делит отрезок DO?

Решение. В качестве базисных векторов возьмём векторы $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$.

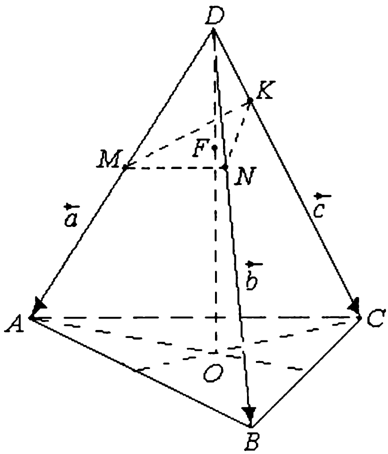


Рис. 5

Пусть плоскость MNK пересекает отрезок DO в точке F. Векторы $\overrightarrow{DF}$ и $\overrightarrow{DO}$ коллинеарны, а поэтому $\overrightarrow{DF} = \lambda\overrightarrow{DO}$. Поскольку O – точка пересечения медиан $\triangle ABC$, тогда $\overrightarrow{DO} = \frac{1}{3}\lambda(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ (см. задачу 2 раздела I) и

$$\overrightarrow{DF} = \frac{1}{3}\lambda(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}). \qquad (1)$$

Точка F принадлежит плоскости MNK, поэтому $\overrightarrow{MF} = x\overrightarrow{MK} + y\overrightarrow{MN}$. Далее имеем, что

$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}\vec{a} + x\left(\overrightarrow{DK} - \overrightarrow{DM}\right) + y\left(\overrightarrow{DN} - \overrightarrow{DM}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\vec{a} + x\left(\frac{1}{4}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) + y\left(\frac{2}{5}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \frac{1}{2}(1 - x - y)\vec{a} + \frac{2}{5}y\vec{b} + \frac{1}{4}x\vec{c} \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что

$\frac{1}{3}\lambda\vec{a} + \frac{1}{3}\lambda\vec{b} + \frac{1}{3}\lambda\vec{c} = \frac{1}{2}(1 - x - y)\vec{a} + \frac{2}{5}y\vec{b} + \frac{1}{4}x\vec{c}$. Из условия единственности разложения любого вектора по трём некомпланарным векторам получаем

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\lambda = \frac{1}{2}(1-x-y), \\ \frac{1}{3}\lambda = \frac{2}{5}y, \\ \frac{1}{3}\lambda = \frac{1}{4}x; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{3}\lambda = \frac{1}{2}\left(1-\frac{4}{3}\lambda-\frac{5}{6}\lambda\right), \\ y = \frac{5}{6}\lambda, \\ x = \frac{4}{3}\lambda, \end{cases} \quad \text{откуда } \lambda = \frac{6}{17}.$$

Итак, $\frac{DF}{DO} = \frac{6}{17}$ и $\frac{DF}{FO} = \frac{6}{11}$.

Ответ: $\frac{DF}{FO} = \frac{6}{11}$.

Упражнения.

1. В основании четырёхугольной пирамиды $MABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Плоскость делит рёбра MA, MB и MD пирамиды соответственно в отношениях: а) 2:1, 3:1, 4:1; б) 1:2, 2:3, 3:4, считая от вершины M. Найти, в каком отношении, считая от вершины M, эта плоскость делит ребро MC.

2. На ребре A_1C_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка P так, что $A_1P : PC_1 = 3 : 7$. Точка М принадлежит диагонали AC_1 грани AA_1C_1C, причём $AM : AC_1 = 5 : 7$. Плоскость, проходящая через точку пересечения диагоналей грани ABB_1A_1 и через точки M и P, пересекает ребро A_1B_1 в точке K. Найти отношение $A_1K : KB_1$.

3. На диагонали AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка K так, что $AK : KC_1 = 3 : 4$. Точка M принадлежит диагонали AB_1 грани AA_1B_1B, точка P является точкой пересечения диагоналей грани AA_1D_1D. Известно, что $AM : MB_1 = 2 : 3$. Найти, в каком отношении плоскость MPK делит ребро AA_1.

4. В основании усечённой пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$. Известно, что $A_1B_1 : AB = 1 : 2$. На ребре DD_1 взята точка K так, что $D_1K : DK = 2 : 1$. Найти, в каком отношении плоскость, проходящая через вершину B_1, середину ребра AA_1 и точку K, делит ребро CC_1 пирамиды.

5. Сторона основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$ равна 1, а высота пирамиды равна $\sqrt{2}$. На рёбрах PA и PC взяты точки K и M соответственно, причём $AK : KP = 1 : 3$, $CM = PM$. Найти, в каком отношении плоскость DKM делит ребро PB.

6. Точки T и P – соответственно середины рёбер B_1C_1 и CD параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка K принадлежит ребру BC, причём $CK : KB = 1 : 3$. Найти, в каких отношениях плоскость, проходящая через середину отрезка BT параллельно прямым PK и DC_1, делит отрезки AC_1, B_1D, A_1C.

7. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на ребре AC взята точка M, на диагонали BD_1 – точка K так, что $\angle KMC = \frac{\pi}{3}$, $\angle MKB = \frac{\pi}{4}$. Найти, в каком отношении точки M и K делят отрезки AC и BD_1.

8. Плоскость проходит через точки пересечения диагоналей AA_1B_1B и BB_1C_1C параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и делит ребро BB_1 в отношении 1:2, считая от вершины B. Доказать, что точка D принадлежит этой плоскости.

Ответы и указания.

1. а) 12:1, б) 6:5.
2. 6:35.
3. 6:7, считая от вершины A.
4. 1:13, считая от вершины C_1.
5. 4:3.
6. 1:1.
7. $AM : MC = 2 - \sqrt{2}$.
8. Предположите, что указанная плоскость пересекает ребро DD_1 в точке K, положите $D_1K : D : D_1 = x$ и докажите, что $x = 1$.

VII. УГОЛ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

Все необходимые для данного раздела формулы представлены в разделе I. При необходимости мы будем на них ссылаться при решении задач.

Задача 1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ M – середина ребра AA_1, N – такая точка ребра CC_1, что $C_1N : NC = 1 : 2$. Найти угол между прямой MN и диагональю D_1B.

Решение. В силу подобия всех кубов примем длину ребра куба равной единице.

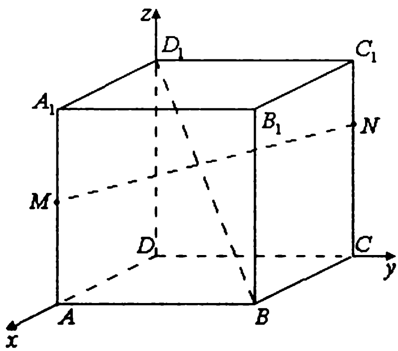


Рис. 1

Координаты необходимых точек: $M\left(1; 0; \frac{1}{2}\right)$, $N\left(0; 1; \frac{2}{3}\right)$, $B(1; 1; 0)$ и $D_1(0; 0; 1)$. Находим координаты векторов:

$\overrightarrow{MN}\left\{-1; 1; \frac{1}{6}\right\}$, $\overrightarrow{D_1B}\{1; 1; -1\}$.

Поскольку угол между двумя векторами определяется по формуле

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Угол между прямыми – наименьший из смежных углов, полученных при пересечении, поэтому

$$\cos\varphi = \frac{\left|-1+1-\frac{1}{6}\right|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{1+1+\frac{1}{36}}} = \frac{1}{\sqrt{219}}.$$

Ответ: $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{219}}$.

Задача 2. Пусть $ABCD$ – тетраэдр, в котором $AB = AD = BD = 3$, $BC = CD = 4$, $AC = 2$. Найти угол между прямыми AB и CD.

Решение. Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$,

тогда $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{b}$, а φ – искомый угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, тогда $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}-\vec{b}|} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}-\vec{b}|}$.

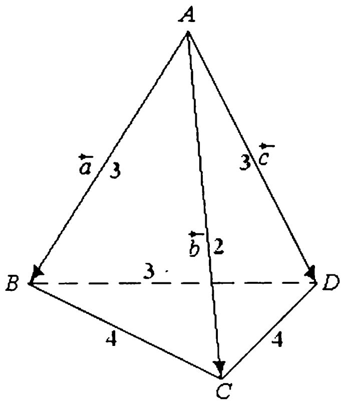


Рис. 2

Так как $\triangle ABC$ — равносторонний, то $\vec{a}\cdot\vec{c}=3\cdot 3\cdot\cos 60^\circ = \frac{9}{2}$.
Находим угол CAB, применяя к треугольнику BCA теорему косинусов: $16 = 9 + 4 - 12\cdot\cos\angle A$, $\cos\angle A = -\frac{1}{4}$ и

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{2};\quad \left|\vec{c}-\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\vec{c}-\vec{b}\right)^2}=\sqrt{\vec{c}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}-2\vec{c}\cdot\vec{b}}=$$

$$=\sqrt{9+4-2\cdot 3\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)}=\sqrt{9+4+3}=4$$ (заметим, что $\angle DAC$ =

$= \angle BAC$). Имеем далее, что $\cos\varphi=\dfrac{\frac{9}{2}+\frac{3}{2}}{3\cdot 4}=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$ и $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

Замечание. Для учащихся вошло в привычку всегда располагать в основании пирамиды треугольник ABC, хоть расположение на чертеже геометрического тела выполняется произвольно с учётом условия задачи. Иногда простой разворот чертежа существенно облегчает решение задачи. Будем обращать на это внимание в решаемых задачах.

Задача 3. В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ точка K — середина ребра B_1C_1, $AA_1 : AB : AC=3 : 4 : 5$. Найти угол BAC, если известно, что прямые AK и A_1B взаимно перпендикулярны.

Решение. Пусть $\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\angle BAC=\alpha$. Примем векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ за базисные и вычислим попарные скалярные произведения векторов, считая, что $AA_1= 3p$, где p — некоторое число (из условия следует, что $AB = 4p$, $AC = 5p$): $\vec{a}^{\,2}=9p^2$;
$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=0$; $\vec{b}^{\,2}=16p^2$; $\vec{c}^{\,2}=25p^2$; $\vec{b}\cdot\vec{c}=20p^2\cos\alpha$.

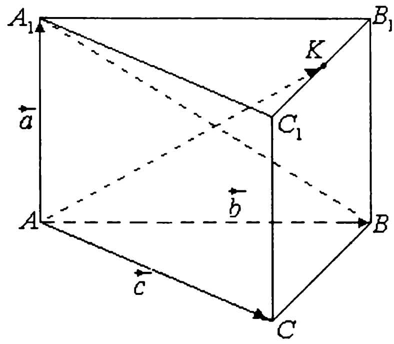


Рис. 3

Имеем: $\overrightarrow{A_1B} = \vec{b} - \vec{a}$;

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{AB_1}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} + \vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}(2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).$$

Из условия перпендикулярности векторов $\overrightarrow{A_1B}$ и $\overrightarrow{AK}$ следует, что $\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{AK} = 0$, т. е. $(\vec{b} - \vec{a}) \cdot \frac{1}{2} \cdot (2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0$, тогда $2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} - 2\vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$, отсюда $16p^2 + 20p^2\cos\alpha - 18p^2 = 0$. Сокращая на p^2 и приводя подобные члены, получим $20\cos\alpha - 2 = 0$; $\cos\alpha = \frac{1}{10}$; $\alpha = \arccos\frac{1}{10}$.

Ответ: $\angle BAC = \arccos\frac{1}{10}$.

Примечание. Заметим, что в задачах, в которых заданы не длины рёбер некоторого многогранника, а их отношения, можно считать длину меньшего из рёбер равной любому числу (мы так уже не один раз поступали с кубами) и выражать длины всех остальных рёбер через это число. Поскольку от увеличения (или уменьшения) каждого из рёбер в несколько раз, величины углов не изменятся! Это целесообразно делать для того, чтобы упростить вычисления. Кроме того, отметим тот факт, что базис в этой задаче не был определён полностью (угол между базисными векторами $\vec{b}$ и $\vec{c}$ являлся неизвестной величиной), но условие перпендикулярности прямых AK и A_1B позволило исключить эту неопределённость. Таким же образом следует поступать и при решении более сложных задач.

Задача 4. В треугольной пирамиде $DABC$ ребро DA образует с рёбрами AC и AB углы $\frac{\pi}{3}$. $DA = 6$, $AB = AC = 4$. Точки P и K являются серединами рёбер DA и BC соответственно. $PK = 3$. Найти угол между прямыми DK и BP.

Решение. Пусть $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\angle BAC = \alpha$. Примем векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ за базис и вычислим попарные скалярные произведения векторов: $\vec{a}^2 = 36$; $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c} = 12$; $\vec{b}^2 = \vec{c}^2 = 16$; $\vec{b}\cdot\vec{c} = 16\cos\alpha$.

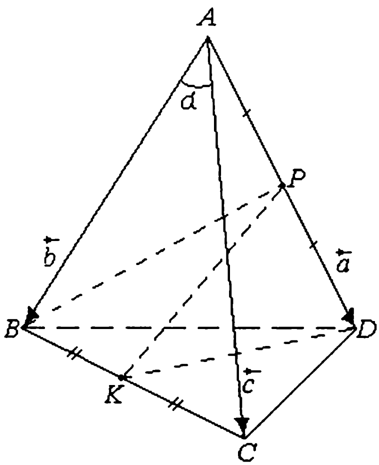


Рис. 4

$$\overrightarrow{PK} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).$$

Тогда:

$$|\overrightarrow{PK}| = \frac{1}{2}\sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{c} - 2\vec{a}\cdot\vec{c} - 2\vec{a}\cdot\vec{b}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{36+16+16-24-24+32\cos\alpha} =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{20+32\cos\alpha} = \sqrt{5+8\cos\alpha}.$$

$$\overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).$$

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{a} - 2\vec{b}).$$

$$|\overrightarrow{DK}| = \frac{1}{2}\sqrt{4\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{c} - 4\vec{a}\cdot\vec{c} - 4\vec{a}\cdot\vec{b}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{144+16+16-48-48+16} = 2\sqrt{6}.$$

$$\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\sqrt{\vec{a}^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 4\vec{b}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{36+48+64} = \sqrt{13}.$$

$$\overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}(-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\cdot\frac{1}{2}(\vec{a} - 2\vec{b}) =$$

$$= \frac{1}{4}(-2\vec{a}^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{b} - 2\vec{b}^2 + \vec{a}\cdot\vec{c} - 2\vec{b}\cdot\vec{c}) =$$

$$\frac{1}{4} = (-72 + 48 + 12 - 32 + 12 - 16) = -12.$$

Следовательно, $\cos\widehat{\overrightarrow{DK}, \overrightarrow{BP}} = \dfrac{|\overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{BP}|}{|\overrightarrow{DK}|\cdot|\overrightarrow{BP}|} = \dfrac{12}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{13}} = \sqrt{\dfrac{6}{13}}$

и $\widehat{\overrightarrow{DK}, \overrightarrow{BP}} = \arccos\sqrt{\dfrac{6}{13}}$.

Ответ: $\arccos\sqrt{\dfrac{6}{13}}$.

Задача 5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Известно, что $F \in AA_1$; $FA:FA_1=2:1$; $P \in CC_1$; $CP:PC_1=2:3$; $M \in AB$, $AM=MB$; $N \in D_1C_1$; $D_1N:NC_1=1:2$. Доказать, что прямые MN и FP – скрещивающиеся.

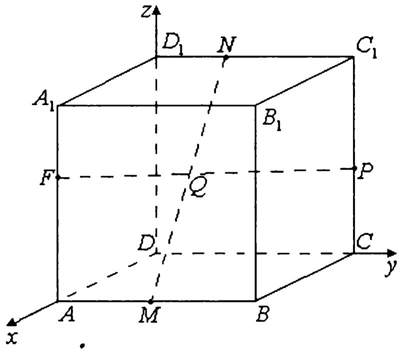


Рис. 5

Доказательство. Опять предположим, что длина ребра куба равна единице. Запишем координаты точек M, F, P, N: $M\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$, $N\left(0; \frac{1}{3}; 1\right)$, $F\left(1; 0; \frac{2}{3}\right)$, $P\left(0; 1; \frac{2}{5}\right)$. Предположим, что прямые FP и MN пересекаются, а Q – точка пересечения этих прямых, её координаты $Q(x; y; z)$.

Находим $\overrightarrow{FP}\left\{-1; 1; -\frac{4}{15}\right\}$ и $\overrightarrow{FQ}\left\{x-1; y; z-\frac{2}{3}\right\}$. В силу коллинеарности этих векторов имеем соотношения

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-\frac{2}{3}}{-\frac{4}{15}} = \beta. \qquad (1)$$

$\overrightarrow{MN}\left\{-1; -\frac{1}{6}; 1\right\}$, $\overrightarrow{MQ}\left\{x-1; y-\frac{1}{2}; z\right\}$, и поскольку эти векторы коллинеарны,

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{6}}=\frac{z}{1}=\lambda. \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) получаем систему

$$\begin{cases} x=-\lambda+1=-\beta+1, \\ y=-\frac{1}{6}\lambda+\frac{1}{2}=\beta, \\ z=-\frac{4}{15}\beta+\frac{2}{3}=\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=\beta, \\ -\frac{1}{6}\lambda+\frac{1}{2}=\lambda, \\ -\frac{4}{15}\lambda+\frac{2}{3}=\lambda. \end{cases}$$

Последняя система уравнений решений не имеет, поэтому прямые FP и MN не пересекаются.

Примечание. Они также не могут быть параллельны. При их параллельности векторы $\overrightarrow{FP}$ и $\overrightarrow{MN}$ должны иметь пропорциональные координаты, что невозможно:

$$\frac{-1}{-1}\neq\frac{1}{-\frac{1}{6}}\neq\frac{-\frac{4}{15}}{1}.$$

Примечание. Во всех задачах, рассмотренных выше, в качестве базисной выбиралась тройка векторов, выходящих из одной вершины. Однако такой выбор не всегда является предпочтительным. Вычисления тем проще, чем больше попарных скалярных произведений базисных векторов равны нулю. Ещё раз напомним, что за базис можно принимать любые три некомпланарные вектора, причём при выборе базиса следует по возможности руководствоваться тремя основными критериями: возможно более полного определения базиса (все попарные скалярные произведения), относительной простоты разложения искомых векторов по базисным, количество нулей в скалярных произведениях векторов.

Задача 6. Ребро AD треугольной пирамиды $DABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC, $DA = \sqrt{3}$, $AB = 2$, $BC = 3$, $AC = \sqrt{13}$. Точки P и K – середины рёбер DC и BC соответственно. Найти угол между прямыми AK и BP.

Решение. Пусть $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BA} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$ – базисные векторы. Попарные скалярные произведения векторов равны: $\vec{a}^2 = 3$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$; $\vec{b}^2 = 4$; $\vec{c}^2 = 9$ (обратим внимание на то, что $\angle ABC = 90^0$, поскольку $AC^2 = AB^2 + BC^2$).

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c};$$

$$\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).$$

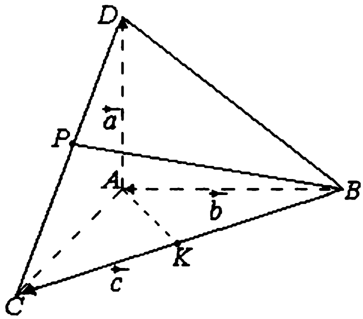


Рис. 6

Тогда

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{BP}}\right) = \frac{\left|\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BP}\right|}{\left|\overrightarrow{AK}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BP}\right|} = \frac{\left|\left(-\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) \cdot \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\right|}{\sqrt{\left(-\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)^2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2}} = \frac{1}{20}.$$

Поэтому угол между прямыми AK и BP равен $\arccos\frac{1}{20}$.

Ответ: $\arccos\frac{1}{20}$.

Упражнения.

1. В тетраэдре $ABCD$ ребра AB и CD, BC и AD взаимно перпендикулярны. Доказать, что рёбра AC и BD также перпендикулярны.

2. Доказать, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ перпендикулярны тогда, и только тогда, когда $\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 = \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BC}^2$.

3. Основанием пирамиды $FABC$ является треугольник ABC, в котором $\angle ABC = 90°$, $AB = 3$, $BC = 4$. Ребро AF перпендикулярно плоскости ABC и равно 4. Найти угол между прямыми AB и CF.

4. В тетраэдре $DABC$ проведены биссектрисы плоских углов при вершине D. Доказать, что если две из этих биссектрис взаимно перпендикулярны, то третья перпендикулярна каждой из них.

5. Точка D – середина ребра PA, точка E – середина высоты PO правильного тетраэдра $PABC$. Найти угол между прямыми OD и CE.

6. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда образуют с плоскостью основания углы α и β. Найти углы между этими диагоналями.

7. В основании пирамиды лежит правильный треугольник. Две грани перпендикулярны основанию, третья наклонена под углом α. Вычислить угол между стороной основания и не пересекающим её наклонным боковым ребром.

8. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды в два раза больше стороны основания. Вычислить угол между апофемой боковой грани и не пересекающей её высотой треугольника, лежащего в основании пирамиды.

9. В треугольной пирамиде $ABCD$ $AB = 8$, $CD = 12$, расстояние между прямыми AB и CD равно 6. Найти угол между этими прямыми, если объём пирамиды равен 48 куб. ед.

Ответы и указания.

1. Воспользуйтесь задачей 1 раздела II.

2. $\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 = \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BC}^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) =$
$= (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$.

3. $\arccos \frac{4}{\sqrt{41}}$.

4. Отложите на рёбрах DA, DB, DC тетраэдра единичные векторы, покажите, что их попарные суммы лежат на прямых, содержащих биссектрисы, и воспользуйтесь условиями перпендикулярности векторов.

5. $\frac{\pi}{4}$.

6. $\arccos(\sin\alpha \cdot \sin\beta)$.

7. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{\cos\alpha}$.

8. $\arcsin\frac{\sqrt{179}}{6\sqrt{5}}$.

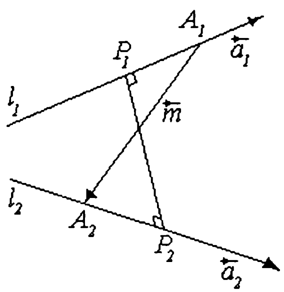
9. 30°.

VIII. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

Теорема 1. Для двух скрещивающихся прямых l и n существует единственный отрезок AC (где $A \in l$, $C \in n$), перпендикулярный этим прямым, и его длина есть расстояние между ними, т. е. $d(l; n) = AC$, $AC \perp l$, $AC \perp n$.

Теорема 2. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми l и n равно расстоянию между ортогональными проекциями этих прямых на плоскость π, перпендикулярную одной из этих прямых.

Пример. Чтобы определить расстояние между скрещивающимися прямыми l_1 и l_2, необходимо найти длину их общего перпендикуляра P_1P_2, где $P_1 \in l_1$, $P_2 \in l_2$. Представим вектор $\overrightarrow{P_1P_2}$ в виде $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2P_2} = x\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{m} + y\overrightarrow{a_2}$.



Неизвестные коэффициенты x и y находятся из условия перпендикулярности $\overrightarrow{P_1P_2}$ векторам $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$: $\begin{cases} (x\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{m} + y\overrightarrow{a_2}) \cdot \overrightarrow{a_1} = 0, \\ (x\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{m} + y\overrightarrow{a_2}) \cdot \overrightarrow{a_2} = 0. \end{cases}$

Выводы.

1. Когда говорят о расстоянии между скрещивающимися прямыми, то имеют в виду отрезок перпендикуляра между точками на этих прямых.
2. Длина этого отрезка перпендикуляра минимальна.
3. Он единственный.
4. В задачах, как правило, не требуется указывать расположение в пространстве этого отрезка; достаточно определить его длину.

Задачи на нахождение расстояния между двумя скрещивающимися прямыми, по мнению авторов, проще всего решаются с применением векторов.

Задача 1. Найти расстояние между скрещивающимися диагоналями двух соседних граней куба с ребром длиной 1.

Решение. *Способ 1.* Поместим куб в прямоугольную систему координат, как показано на рис. 1.

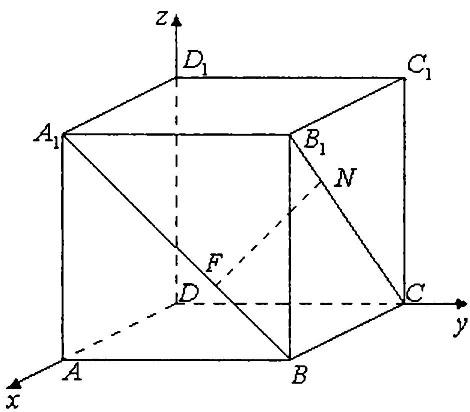


Рис. 1

Будем искать расстояние между прямыми A_1B и B_1C. Заметим, что координаты некоторых (необходимых для решения задачи) вершин известны: $A_1(1;\ 0;\ 1)$, $B(1;\ 1;\ 0)$, $B_1(1;\ 1;\ 1)$, $C(0;\ 1;\ 0)$.

Пусть FN – расстояние между заданными в задаче диагоналями.

Ясно, что тогда $FN \perp A_1B$ и $FN \perp B_1C$, где $F(1;\ b;\ c)$, $N(m;\ 1;\ p)$.

$\overrightarrow{A_1B}$ и $\overrightarrow{BF}$ коллинеарные векторы, поэтому $\frac{0}{0}=\frac{b-1}{1}=\frac{c}{-1}=\lambda$, откуда $b=\lambda+1$, $c=-\lambda$, и $F(1;\ \lambda+1;\ -\lambda)$. Аналогично, $\overrightarrow{B_1C}$ и $\overrightarrow{CN}$ – коллинеарны, а поэтому $\frac{m}{-1}=\frac{0}{0}=\frac{p}{-1}=\beta$, откуда $m=p=-\beta$, и $N(-\beta;\ 1;\ -\beta)$. Далее имеем, что $\overrightarrow{FN}\left\{-\beta-1;-\lambda;-\beta+\lambda\right\}$.

Поскольку $\overrightarrow{FN}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0$ и $\overrightarrow{FN}\cdot\overrightarrow{B_1C}=0$, для определения λ и β получаем систему уравнений $\begin{cases}-\lambda+\beta-\lambda=0,\\ \beta+1+\beta-\lambda=0;\end{cases}\begin{cases}\beta=2\lambda,\\ 3\lambda=-1;\end{cases}\begin{cases}\beta=-\frac{2}{3},\\ \lambda=-\frac{1}{3};\end{cases}$

тогда $\overrightarrow{FN}\left\{-\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right\}$ и $\left|\overrightarrow{FN}\right|=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Способ 2. Воспользуемся формулой расстояния от точки до плоскости (см., например, решение задачи 2 раздела IV). Через точку B проведём прямую BB_2, параллельную CB_1. Прямые A_1B и BB_2 образуют плоскость, которая по признаку параллельности прямой и плоскости параллельна B_1C, поэтому теперь мы можем искать расстояние от любой точки прямой B_1C до этой плоскости. Выберем точку B_1. Пусть точка $B_2(x;\ y;\ z)$ выбрана так, что $\overrightarrow{BB_2}=\overrightarrow{CB_1}$, тогда $x-1=1$; $y-1=0$; $z=1$, откуда $x=2$; $y=1$ и $z=1$. Координаты точки $B_2(2;\ 1;\ 1)$.

Напишем уравнение плоскости, проходящей через точки A_1, B и B_2. Уравнение плоскости $ax+by+cz+d=0$ даёт систему уравнений

$$\begin{cases}a+b+d=0,\\ 2a+b+c+d=0,\\ a+c+d=0.\end{cases}$$

Решая эту систему, находим $a = 0$; $b = -d$; $c = -d$ и $-dy - dz + d = 0$; $y + z - 1 = 0$. Искомое расстояние равно $d = \dfrac{|1+1-1|}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Следует признать, что второй способ решения данной задачи проще первого способа.

Способ 3. Выберем в качестве базиса векторы $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$.

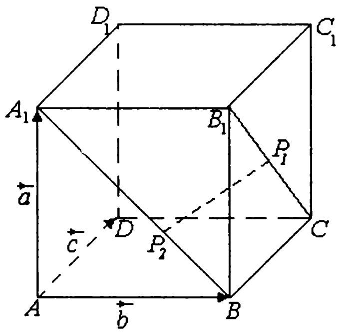


Рис. 2

Пусть P_1P_2 (см. рис. 2) – общий перпендикуляр скрещивающихся прямых B_1C и A_1B, тогда

$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1C} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BP_2} = x\overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{CB} + y\overrightarrow{BA_1} = x(\vec{c} - \vec{a}) - \vec{c} + y(\vec{a} - \vec{b}) =$
$= (y - x)\vec{a} - y\vec{b} + (x - 1)\vec{c}.$

Поскольку $\overrightarrow{P_1P_2} \perp \overrightarrow{A_1B}$, $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{A_1B} = 0$

и $((y - x)\vec{a} - y\vec{b} + (x - 1)\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$, откуда, учитывая взаимную перпендикулярность векторов базиса, получаем $-(y - x)\overrightarrow{a}^2 - y\overrightarrow{b}^2 = 0$.

Так как $\overrightarrow{a^2} = \overrightarrow{b^2}$, $-2y + x = 0$.

Аналогично получаем для $\overrightarrow{P_1P_2} \perp \overrightarrow{B_1C}$:

$((y - x)\vec{a} - y\vec{b} + (x - 1)\vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0$; $-y + x + x - 1 = 0$; $2x - y - 1 = 0$.

Для определения x и y получена система уравнений $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0, \\ x - 2y = 0; \end{cases}$

откуда $y = \frac{1}{3}$; $x = \frac{2}{3}$. Итак, $\overrightarrow{P_1P_2} = -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}$ и

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{\frac{1}{9}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача 2. В правильном тетраэдре $SABC$ с боковым ребром, равным $\sqrt{3}$, проведены медианы SM и CN граней SBC и ABC. Найти расстояние между ними.

Решение. Введём прямоугольную систему координат так, чтобы точка пересечения медиан треугольника ABC совпадала с началом координат (см. рис. 3).

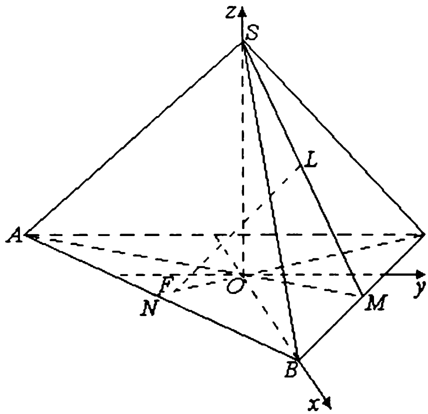


Рис. 3

Укажем координаты точек: $O(0; 0; 0)$; $B(1; 0; 0)$; $A\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$;

$C\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$; $S(0; 0; \sqrt{2})$; $M\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}; 0\right)$; $N\left(\frac{1}{4}; -\frac{\sqrt{3}}{4}; 0\right)$.

Пусть FL – общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым CN и SM, причём $F(a;\ b;\ c)$; $L(m;\ n;\ p)$. Запишем координаты некоторых векторов:

$$\overrightarrow{SM}\left\{\frac{1}{4};\ \frac{\sqrt{3}}{4};\ -\sqrt{2}\right\};\quad \overrightarrow{CN}\left\{\frac{3}{4};\ -\frac{3\sqrt{3}}{4};\ 0\right\};\quad \overrightarrow{CF}\left\{a+\frac{1}{2};\ b-\frac{\sqrt{3}}{2};\ c\right\};$$

$$\overrightarrow{SL}\left\{m;\ n;\ p-\sqrt{2}\right\}.$$

Так как векторы $\overrightarrow{CF}$ и $\overrightarrow{CN}$ коллинеарны, выполняются соотношения $\dfrac{a+\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\dfrac{b-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{3\sqrt{3}}{4}}=\dfrac{c}{0}=\lambda$, откуда $a=\frac{3}{4}\lambda-\frac{1}{2}$; $b=-\frac{3\sqrt{3}}{4}\lambda+\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$c=0$ и $F\left(\frac{3}{4}\lambda-\frac{1}{2};\ -\frac{3\sqrt{3}}{4}\lambda+\frac{\sqrt{3}}{2};\ 0\right)$.

Векторы $\overrightarrow{SL}$ и $\overrightarrow{SM}$ коллинеарны, а поэтому $\dfrac{m}{\frac{1}{4}}=\dfrac{n}{\frac{\sqrt{3}}{4}}=\dfrac{p-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=\beta$,

$m=\frac{1}{4}\beta$; $n=\frac{\sqrt{3}}{4}\beta$; $p=\sqrt{2}-\sqrt{2}\beta$; $L(\frac{1}{4}\beta;\ \frac{\sqrt{3}}{4}\beta;\ \sqrt{2}-\sqrt{2}\beta)$ и

$$\overrightarrow{FL}\left\{\frac{1}{4}\beta-\frac{3}{4}\lambda+\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{4}\beta+\frac{3\sqrt{3}}{4}\lambda-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \sqrt{2}-\sqrt{2}\beta\right\}.$$

Поскольку $\overrightarrow{FL}\cdot\overrightarrow{SM}=0$ и $\overrightarrow{FL}\cdot\overrightarrow{CN}=0$, для определения λ и β получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\beta-\frac{3}{4}\lambda+\frac{1}{2}\right)-\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\beta+\frac{3\sqrt{3}}{4}\lambda-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0,\\ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\beta-\frac{3}{4}\lambda+\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\beta+\frac{3\sqrt{3}}{4}\lambda-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\beta\right)=0.\end{cases}$$

Решая систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными в результате получаем $\lambda = \frac{18}{35}$; $\beta = \frac{32}{35}$, далее $\overrightarrow{FL}\left\{\frac{12}{35}; \frac{4\sqrt{3}}{35}; \frac{3\sqrt{2}}{35}\right\}$;

$\left|\overrightarrow{FL}\right| = \sqrt{\frac{6}{35}}$.

Ответ: $\sqrt{\frac{6}{35}}$.

Задача 3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным единице. Найти расстояние между прямыми CK и A_1D, где K – середина ребра DD_1.

Решение. *Способ 1.* Введём прямоугольную систему координат, как показано на рис. 4.

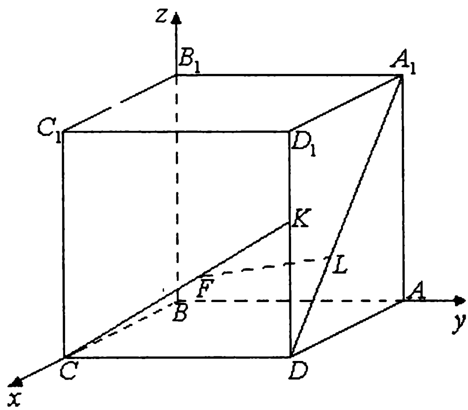


Рис. 4

Найдём координаты необходимых для решения точек и векторов:

$C(1;\ 0;\ 0)$; $D(1;\ 1;\ 0)$; $K(1;\ 1;\ 0{,}5)$; $A_1(0;\ 1;\ 1)$; $\overrightarrow{CK}\left\{0; 1; \frac{1}{2}\right\}$;

$\overrightarrow{DA_1}\{-1; 0; 1\}$.

Пусть FL – общий перпендикуляр скрещивающихся прямых CK и A_1D, причём $F(a;\ b;\ c)$; $L(m;\ n;\ p)$. Легко получить равенства из условия коллинеарности векторов $\overrightarrow{CF}$ и $\overrightarrow{CK}$, $\overrightarrow{DA_1}$ и $\overrightarrow{DL}$:

1) $\dfrac{a-1}{0}=\dfrac{b}{1}=\dfrac{c}{\frac{1}{2}}=\lambda$, откуда $a = 1$; $b = \lambda$; $c = \dfrac{1}{2}\lambda$ и

2) $\dfrac{m-1}{-1}=\dfrac{n-1}{0}=\dfrac{p}{1}=\beta$, откуда $m = -\beta + 1$; $n = 1$; $p = \beta$.

Далее имеем $\overrightarrow{FL}\left\{-\beta; 1-\lambda; \beta-\dfrac{1}{2}\lambda\right\}$ и, используя условие перпендикулярности векторов $\overrightarrow{FL}$ и $\overrightarrow{CK}$, $\overrightarrow{FL}$ и $\overrightarrow{DA_1}$, получим систему

$$\begin{cases} 0(-\beta)+1-\lambda+\dfrac{1}{2}\left(\beta-\dfrac{1}{2}\lambda\right)=0, \\ \beta+\beta-\dfrac{1}{2}\lambda=0. \end{cases}$$

Решая систему, находим $\beta=\dfrac{2}{9}$; $\lambda=\dfrac{8}{9}$, тогда $\overrightarrow{FL}\left\{-\dfrac{2}{9}; \dfrac{1}{9}; -\dfrac{2}{9}\right\}$ и $\left|\overrightarrow{FL}\right|=\sqrt{\dfrac{4+1+4}{9^2}}=\dfrac{1}{3}$.

Для сравнения приведём иное решение этой задачи.

Способ 2. Пусть M – середина ребра BB_1, тогда $MA_1 \| CK$. Плоскость A_1DM параллельна CK, значит, расстояние между CK и A_1D равно расстоянию от точки K до плоскости A_1DM. Пусть это расстояние равно x, тогда $V_{A_1MDK}=\dfrac{1}{3}S_{A_1MD}\cdot x = S_{A_1KD}\cdot 1=\dfrac{1}{12}$, откуда $x=\dfrac{1}{4S_{A_1MD}}$.

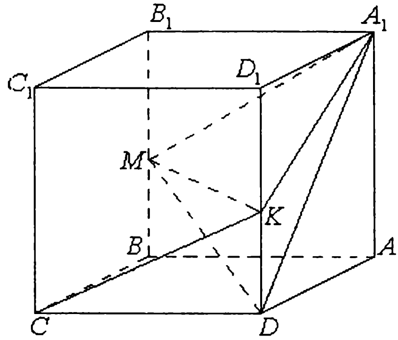


Рис. 5

Находим стороны треугольника A_1DM: $A_1D = \sqrt{2}$; $A_1M = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$;

$DM = \dfrac{3}{2}$. Определим $\cos \angle MA_1D$ по теореме косинусов:

$$DM^2 = A_1M^2 + A_1D^2 - 2A_1M \cdot A_1D \cos \angle MA_1D;$$

$$\frac{9}{4} = \frac{5}{4} + 2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{2} \cos \angle MA_1D;$$

$$\cos \angle MA_1D = \frac{1}{\sqrt{10}}; \ \sin \angle MA_1D = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

$S_{A_1MD} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \dfrac{3}{\sqrt{10}} = \dfrac{3}{4}$, значит, $x = \dfrac{1}{3}$.

Ответ: $\dfrac{1}{3}$.

Замечание. Советуем решить эту задачу чисто векторным способом (см. пример в начале раздела).

Задача 4. (МГУ, 1977 г.)

Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC со стороной $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно основанию и имеет длину 2. Найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC, а другая проходит через точку C и середину ребра AB.

Решение. Пусть M и N – середины рёбер BC и AB.

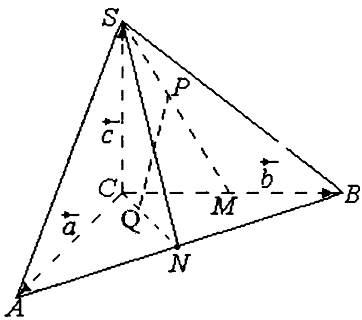


Рис. 6

Выбираем базис: $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CS}=\vec{c}$. $\overrightarrow{SM}=\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CS}=\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$.

$\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$;

$$\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{b}^2-\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{2}\cdot4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot16\cdot2\right)=12.$$

$\left|\overrightarrow{SM}\right|=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$; $\left|\overrightarrow{CN}\right|=2\sqrt{6}$. Значит,

$\cos\varphi=\dfrac{12}{2\sqrt{3}\cdot2\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, и $\varphi=45^\circ$ – угол между скрещивающимися прямыми.

Теперь найдём расстояние между прямыми SM и CN. Пусть PQ – их общий перпендикуляр, $P\in SM$, $Q\in CN$:

$$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{SP}=x\cdot\overrightarrow{CN}+\vec{c}+y\cdot\overrightarrow{SM}=$$

$$=\frac{x}{2}(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}+y\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}\right)=\frac{x}{2}\vec{a}+\frac{x+y}{2}\vec{b}+(1-y)\vec{c}.$$

Далее из условия перпендикулярности $\overrightarrow{QP}$ векторам $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$ и $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})\left(\frac{x}{2}\vec{a} + \frac{x+y}{2}\vec{b} + (1-y)\vec{c}\right) = 0, \\ \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}\right)\left(\frac{x}{2}\vec{a} + \frac{x+y}{2}\vec{b} + (1-y)\vec{c}\right) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2}\vec{a}^2 + \frac{x}{2}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{x+y}{2}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{x+y}{2}\vec{b}^2 = 0, \\ \frac{x}{4}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{x+y}{4}\vec{b}^2 - (1-y)\vec{c}^2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16x + 8x + 8(x+y) + 16(x+y) = 0, \\ 4x + 8(x+y) - 4(1-y) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 0, \\ 3x + 3y - 1 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{1}{3}, \\ y = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Следовательно, $\overrightarrow{QP} = -\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$. Расстояние между прямыми равно

$$\left|\overrightarrow{QP}\right| = \sqrt{\frac{1}{9}\left(\vec{c} + \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right)\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}\left(\vec{c}^2 + \frac{1}{4}\left(\vec{b}^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}^2\right)\right)} = \frac{1}{3}\sqrt{12} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: угол равен 45°, расстояние между прямыми равно $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Задача 5. В треугольной пирамиде $DABC$ известны длины рёбер $DA = 1$, $DB = 2$, $DC = 2$ и углы $\angle ADB = \frac{\pi}{2}$, $\angle ADC = \frac{2\pi}{3}$, $\angle BDC = \frac{\pi}{3}$. На ребре DC взята точка M так, что $CM : MD = 1 : 2$. Найдите расстояние между прямыми DA и BM.

Решение. Введём базисные векторы $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DM} = \vec{c}$ и найдём скалярные произведения векторов: $\vec{a}^2 = 1$; $\vec{b}^2 = \vec{c}^2 = 4$; $\vec{b} \cdot \vec{c} = 2$; $\vec{a} \cdot \vec{c} = -1$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

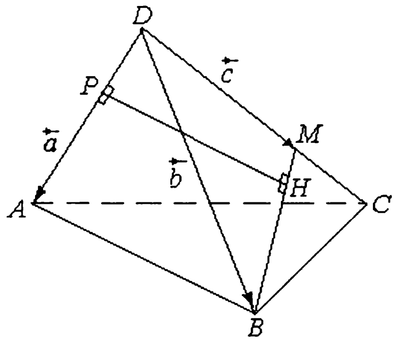


Рис. 7

Пусть $\overrightarrow{PH} \perp \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{PH} \perp \overrightarrow{BM}$ ($P \in DA$, $H \in BM$). Тогда $\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MH}$. Поскольку векторы $\overrightarrow{PD}$ и $\vec{a}$, $\overrightarrow{MH}$ и $\overrightarrow{MB}$ коллинеарны, $\overrightarrow{PD} = x\vec{a}$, $\overrightarrow{MH} = y\overrightarrow{MB} = y(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DM}) = y(\vec{b} - \vec{c})$. Поэтому $\overrightarrow{PH} = x\vec{a} + \vec{c} + y(\vec{b} - \vec{c}) = x\vec{a} + y\vec{b} + (1 - y)\vec{c}$.

Векторы $\overrightarrow{PH} \perp \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{PH} \perp \overrightarrow{BM}$, поэтому $\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{DA} = 0$ или

$$\begin{cases} (x\vec{a} + y\vec{b} + (1 - y)\vec{c}) \cdot \vec{a} = 0, \\ (x\vec{a} + y\vec{b} + (1 - y)\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0, \end{cases}$$ откуда

$$\begin{cases} x+y-1=0, \\ 4y+2-2y+x-2y-4+4y=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x+4y=2, \\ x+y=1. \end{cases}$$

Система уравнений даёт $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$.

Таким образом,

$$|\overrightarrow{PH}| = \frac{1}{3}\sqrt{(2\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c})^2} = \frac{1}{3}\sqrt{4+4+16-8+8} = \frac{2}{3}\sqrt{6}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}\sqrt{6}$.

Примечание. В данной задаче для удобства вычислений в качестве базисного вектора $\vec{c}$ был выбран не вектор $\overrightarrow{DC}$ (как мы обычно поступали), а вектор $\overrightarrow{DM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$.

Задача 6. Точки E и P являются соответственно серединами отрезков AB и CD, принадлежащих двум скрещивающимся прямым, угол между которыми равен $\arccos\frac{\sqrt{35}}{10}$. Известно, что отрезок EP является общим перпендикуляром этих прямых и что $AB = 2\sqrt{5}$, $CD = 2\sqrt{7}$, $\angle ACB = \arccos\sqrt{\frac{3}{40}}$. Найти длину отрезка EP.

Решение. Выберем в качестве базисных векторы $\overrightarrow{EA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CP} = \vec{b}$, $\overrightarrow{PE} = \vec{c}$ и, обозначив квадрат длины вектора $\vec{c}$ через x(x>0), получим скалярные произведения векторов базиса, считая, что $\widehat{\vec{a},\vec{b}} = \arccos\sqrt{\frac{3}{40}}$: $\vec{a}^2 = 5$; $\vec{b}^2 = 7$; $\vec{c}^2 = x$; $\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{7}{2}$; $\vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c} = 0$.

$$\cos\angle ACB = \frac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CB}|\cdot|\overrightarrow{CA}|} = \sqrt{\frac{3}{40}}.$$

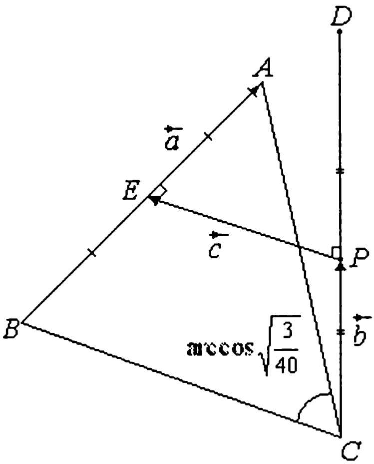


Рис. 8

Найдём разложение векторов $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CA}$ по базисным векторам:

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{EB} = \vec{b} + \vec{c} - \vec{a},$$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \vec{b} + \vec{c} - \vec{a} + 2\vec{a} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Тогда:

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \left(\vec{b} + \vec{c} - \vec{a}\right) \cdot \left(\vec{b} + \vec{c} + \vec{a}\right) = \vec{b}^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c}^2 - \vec{a}^2 = 7 + x - 5 = x + 2,$$

$$\left|\overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{c} - 2\vec{a} \cdot \vec{b}} = \sqrt{5 + 7 + x - 7} = \sqrt{x + 5};$$

$$\left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{a} \cdot \vec{c}} = \sqrt{5 + 7 + x + 7} = \sqrt{x + 19}.$$

Далее имеем:

$$\begin{cases} x > 0, \\ \dfrac{x+2}{\sqrt{x+5} \cdot \sqrt{x+19}} = \sqrt{\dfrac{3}{40}}. \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 24x + 95} = \dfrac{3}{40}. \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ 37x^2 + 88x - 125 = 0. \end{cases}$$

Уравнение системы даёт $x = 1$ и $x = -\dfrac{125}{37}$; с учётом неравенства системы получаем $EP^2 = 1$ и, следовательно, $EP = 1$.

Примечание. По условию задачи угол между прямыми AB и CD равен $\arccos\frac{\sqrt{35}}{10}$, и это – острый угол. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ при решении задачи мог, вообще говоря, оказаться и тупым, равным $\pi - \arccos\frac{\sqrt{35}}{10}$. Поэтому при таком решении, казалось бы, нужно рассматривать два случая. Понятно, однако, что ответ (длина общего перпендикуляра) измениться не должен. И в самом деле, в этом втором случае, как легко убедиться, $\vec{a}\cdot\vec{b} = -\frac{7}{2}$, скалярное произведение $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$ останется прежним, $\left|\overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{x+5}$, $\left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{x+19}$, и мы придём к тому же самому квадратному уравнению, что и в первом случае. Тем не менее без этого замечания решение задачи было бы не полным.

Упражнения.

1. Основанием пирамиды $SABC$ является равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, гипотенуза которого AB равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро пирамиды $SC = 2$ перпендикулярно плоскости основания. Вычислить угол и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра AC, а другая – через точку C и середину ребра AB.

2. Расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней куба равно d. Вычислить его объём.

3. В треугольной пирамиде $TABC$ $TA = 1$, $TB = 2$, $TC = 3$, боковые грани попарно перпендикулярны. Точка E – середина ребра AC. Вычислить расстояние между TE и AB.

4. Вычислить угол и расстояние между двумя скрещивающимися медианами двух боковых граней тетраэдра с ребром a.

5. Основанием пирамиды $TABC$ служит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, высота пирамиды равна h, все боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом 45°, а угол между боковым ребром TB и медианой основания CM равен 60°. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через медиану CM, пересекающее ребро TB? На какие части секущая плоскость делит ребро TB, когда площадь сечения наименьшая?

6. Высота MO правильной пирамиды $MABCD$ в два раза больше стороны основания. Точки P, Q, R – середины отрезков MC, AB и MO соответственно. Найти угол между прямой OP и прямой: а) MD; б) BR; в) DQ.

7. Сторона основания ABC правильной пирамиды $ABCD$ равна $8\sqrt{3}$, высота $DO = 6$, точки A_1, B_1, C_1 – середины рёбер AD, BD, CD соответственно. Найти угол и расстояние между прямыми B_1A и AC_1.

8. Основанием пирамиды $TABCD$ служит прямоугольник $ABCD$, диагональ которого равна $\sqrt{13}$. Высота пирамиды $TO = 1$ проходит через точку пересечения диагоналей основания, а расстояние между боковым ребром TB и диагональю основания AC равно $\dfrac{6}{7}$. Вычислить площадь боковой поверхности пирамиды.

9. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с диагоналями его основания 30° и 60°, а расстояние между боковым ребром и скрещивающейся с ним диагональю параллелепипеда равно l. Вычислить площадь боковой поверхности параллелепипеда.

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, а всё боковые рёбра образуют с плоскостью основания углы 45°. Расстояние между боковым ребром TB и медианой CD, проведённой к гипотенузе AB равно $\sqrt{3}$, а угол между прямыми TB и CD равен 60°. Вычислить площадь сферы, описанной около пирамиды.

11. В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$. Известно, что $AB = 2AD = 2$, $MA = 4$, $\angle MAB = \angle MAD = \dfrac{\pi}{3}$. Точка K является серединой ребра MC. Найти, какое наименьшее значение может принимать площадь треугольника PAB, если точка P принадлежит прямой DK.

12. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ со стороной основания $AB = a$ и боковым ребром $B_1B = b$ вычислить расстояние между прямыми A_1B и B_1C_1.

Ответы.

1. $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

2. $3d^3\sqrt{3}$.

3. $\frac{6}{7}$.

4. $\arccos\frac{1}{6}$; $a\sqrt{\frac{2}{35}}$.

5. $\frac{h^2}{2\sqrt{3}}$; $\frac{h\sqrt{2}}{3}$; $\frac{2h\sqrt{2}}{3}$.

6. а) $\arccos\frac{8}{9}$; б) $\arccos\frac{4\sqrt{3}}{9}$; в) $\arccos\frac{\sqrt{10}}{30}$

7. $\arccos\frac{47}{121}$ и $\frac{36}{\sqrt{259}}$.

8. $3\sqrt{2}+\sqrt{13}$.

9. $4l^2\sqrt{3+\sqrt{6}}$.

10. 36π (кв. ед.).

11. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

12. $\frac{ab\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2+4b^2}}$.

IX. УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ

Теорема 1. Угол между двумя плоскостями равен углу между перпендикулярными к этим плоскостям прямыми.

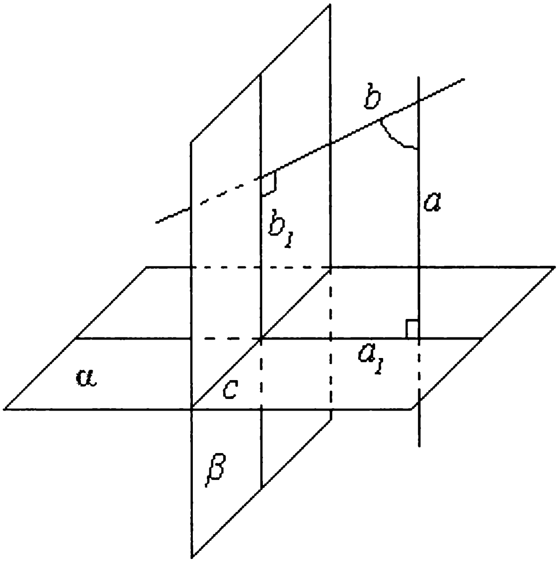


Рис. 1

Доказательство. Пусть данные плоскости α и β пересекаются по прямой c. Через произвольную точку пространства, не лежащую на прямой c, проведём прямые $a \perp \alpha$ и $b \perp \beta$ (рис. 1).

Плоскость, задаваемая этими прямыми, пересекает плоскости α и β по прямым a_1 и b_1, которые перпендикулярны прямой c. Угол между плоскостями α и β равен углу между прямыми a_1 и b_1, который, в свою очередь, равен углу между прямыми a и b, поскольку прямые a, b, a_1 и b_1 лежат в одной плоскости, причём $a \perp a_1$ и $b \perp b_1$.

Следствие. В прямоугольной системе координат уравнения плоскостей могут быть представлены в виде $m_1x + n_1y + c_1z + d_1 = 0$ и $m_2x + n_2y + c_2z + d_2 = 0$. Далее можно определить угол между векторами $\overrightarrow{n_1}\ \{m_1;\ n_1;\ c_1\}$ и $\overrightarrow{n_2}\ \{m_2;\ n_2;\ c_2\}$, которые перпендикулярны данным плоскостям. Будем считать угол φ между плоскостями острым (или прямым), тогда искомый угол равен

$$\arccos \varphi = \left| \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + c_1c_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + c_2^2}} \right|.$$

Задача 1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 – боковые рёбра. Какой угол образует плоскость, проходящая через вершину A, середину ребра BC и центр грани DCC_1D_1 с гранью $ABCD$?

Решение. Для большей наглядности построим сечение куба.

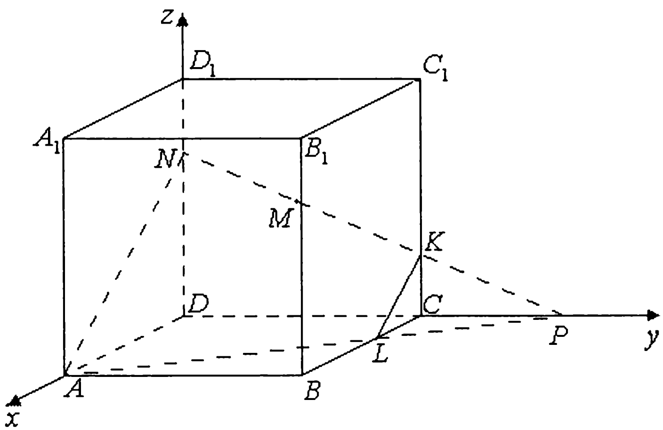


Рис. 2

Пусть M – центр грани C_1CDD_1. Для простоты вычислений принимаем длину ребра куба за единицу (поскольку все кубы подобны), тогда координаты фигурировавших в условии задачи точек в выбранной системе координат будут: $A(1;\ 0;\ 0)$; $L\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$; $M\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Будем искать уравнение плоскости в виде $mx + ny + cz + d = 0$. Подставляя координаты точек в это равенство, получим систему уравнений

$$\begin{cases} m + d = 0, \\ \frac{1}{2}m + n + d = 0, \\ \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}c + d = 0; \end{cases} \begin{cases} m = -d, \\ n = -\frac{d}{2}, \\ c = -\frac{3d}{2}. \end{cases}$$

Уравнение плоскости принимает вид $-dx - \frac{d}{2}y - \frac{3d}{2}z + d = 0$, откуда $2x + y + 3z - 2 = 0$, здесь вектор нормали к плоскости $\overrightarrow{n_1}$ $\{2; 1; 3\}$. Уравнение плоскости ABC (это плоскость основания куба) $z = 0$, здесь вектор нормали $\overrightarrow{n_2}$ $\{0; 0; 1\}$. Имеем $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{14}}$.

Ответ: $\arccos\frac{3}{\sqrt{14}}$.

Задача 2. Все рёбра правильной треугольной призмы равны между собой. Найти угол между плоскостью основания этой призмы и плоскостью, проходящей через противоположные вершины боковой грани и середину противолежащего этой грани бокового ребра.

Решение. Введём прямоугольную систему координат так, чтобы её начало совпало с центром треугольника ABC, ось x проходила через точки O и B, ось $Oy \parallel AC$, а $Oz \perp (ABC)$ (рис. 3).

Все треугольные призмы, рёбра которых равны, подобны, поэтому примем ребро призмы равным единице (мы уже ранее не раз поступали подобным образом), тогда координаты точек сечения, необходимых для решения задачи, будут: $A_1\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}; -\frac{1}{2}; 1\right)$, $C\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}; \frac{1}{2}; 0\right)$, $M\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 0; \frac{1}{2}\right)$.

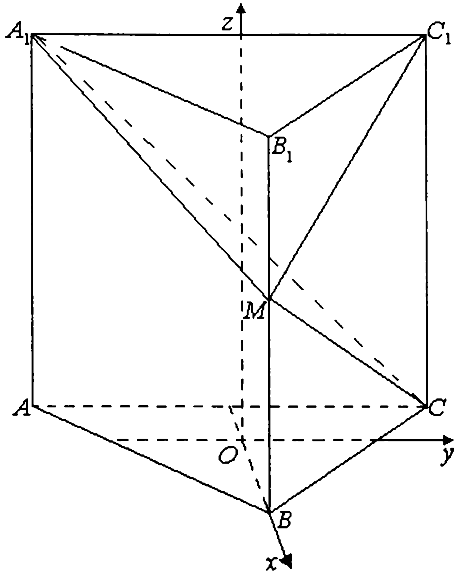


Рис. 3

Будем искать уравнение плоскости сечения A_1CM в виде $mx + ny + cz + d = 0$. Подставляя координаты точек в это равенство, получим систему уравнений

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}m - \dfrac{1}{2}n + c + d = 0, \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}m + \dfrac{1}{2}n + d = 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}m + \dfrac{1}{2}c + d = 0; \end{cases} \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{3}}m + c + 2d = 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}m + \dfrac{1}{2}c + d = 0, \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}m + \dfrac{1}{2}n + d = 0; \end{cases}$$

откуда $c = -2d$, $m = 0$, $n = -2d$. Уравнение плоскости сечения имеет вид $2y + 2z - 1 = 0$, тогда вектор нормали к этой плоскости $\overrightarrow{n_1}\{0; 2; 2\}$. Уравнение плоскости ABC $z = 0$ и вектор нормали к этой плоскости $\overrightarrow{n_2}\{0; 0; 1\}$.

$$\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{4+4}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};\ \varphi = 45^\circ.$$

Ответ: 45°.

Задача 3. (НГУ, 1981 г.)

В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник со стороной, равной единице, ребро SA пирамиды перпендикулярно плоскости основания, $SA = \sqrt{3}$. Плоскость α параллельна прямым SB и AC, плоскость β параллельна прямым SC и AB. Определить угол между плоскостями α и β.

***Решение*.** Выберем базис $\overrightarrow{AS} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

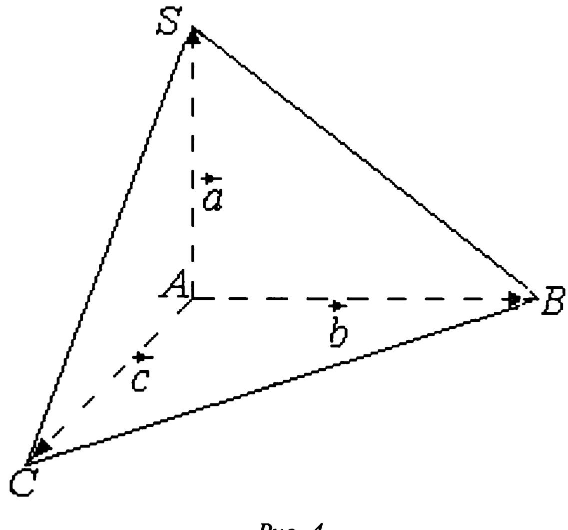


Рис. 4

Пусть $\vec{m}$ и $\vec{n}$ – векторы, перпендикулярные плоскостям α и β, тогда угол φ между этими плоскостями определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}.$$

В качестве вектора $\vec{m}$ можно взять любой отличный от нулевого вектор, такой, что $\overrightarrow{SB}\cdot\vec{m}=0$ и $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{m}=0$. Аналогично выберем так, чтобы $\overrightarrow{SC}\cdot\vec{n}=0$ и $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0$.

1) Заметим, что $\overrightarrow{SB}=\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, а вектор $\vec{m}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$,

тогда получаем систему уравнений $\begin{cases}(\vec{b}-\vec{a})\cdot(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c})=0,\\ \vec{c}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c})=0.\end{cases}$

Заметим, что $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=0$; $\vec{b}\cdot\vec{c}=1\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, тогда

$$\begin{cases}y+\frac{1}{2}z-3x=0,\\ \frac{1}{2}y+z=0.\end{cases}$$

Число переменных в системе превышает число уравнений, поэтому вектор определён неоднозначно. Имеем $x=-\frac{1}{2}z$, $y=-2z$. В качестве z может быть взято любое отличное от нуля число.

2) Аналогично $\overrightarrow{SC}=\vec{c}-\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\vec{n}=x_1\vec{a}+y_1\vec{b}+z_1\vec{c}$,

получаем систему уравнений $\begin{cases}(\vec{c}-\vec{a})\cdot(x_1\vec{a}+y_1\vec{b}+z\ \vec{c})=0,\\ \vec{b}\cdot(x_1\vec{a}+y_1\vec{b}+z_1\vec{c})=0;\end{cases}$

$$\begin{cases}\frac{1}{2}y_1+z_1-3x_1=0,\\ y_1+\frac{1}{2}z_1=0;\end{cases}\quad \begin{cases}-6x_1+y_1+2z_1=0,\\ 2y_1+z_1=0;\end{cases}\quad \begin{cases}x_1=\frac{z_1}{4},\\ y_1=-\frac{z_1}{2}.\end{cases}$$

Для вектора $\vec{m}$ возьмём $z = -2$, тогда $x = 1$, $y = 4$, и $\vec{m} = \vec{a} + 4\vec{b} - 2\vec{c}$. Для вектора $\vec{n}$ возьмём $z_1 = 4$, тогда $x_1 = 1$, $y_1 = -2$ и $\vec{n} = \vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$.

$$\vec{n} \cdot \vec{m} = \left(\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}\right) \cdot \left(\vec{a} + 4\vec{b} - 2\vec{c}\right) = 3 - 8 + 8 + 2 - 8 = -3.$$

$$|\vec{m}| = \sqrt{\left(\vec{a} + 4\vec{b} - 2\vec{c}\right)^2} = \sqrt{15}, \quad |\vec{n}| = \sqrt{\left(\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}\right)^2} = \sqrt{15}.$$

$$\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{15} \cdot \sqrt{15}} = \frac{1}{5}.$$

Ответ: $\arccos\frac{1}{5}$.

Упражнения.

1. Основанием пирамиды служит прямоугольник со сторонами a и b. Высота пирамиды проходит через одну из вершин прямоугольника и имеет длину h. Вычислить угол между основанием и плоскостью, проходящей через диагональ основания (не пересекающуюся с самым длинным боковым ребром пирамиды) параллельно этому ребру.

2. В правильной прямоугольной пирамиде проведена плоскость через среднюю линию боковой грани параллельно боковому ребру и вершину пирамиды, не лежащей на этой грани. Вычислить угол наклона этой плоскости к плоскости основания пирамиды, если боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом β.

3. Квадрат $ABCD$ со стороной a представляет собой основание наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вершина D_1 проецируется в точку B нижнего основания, а острый угол в боковых гранях равен β. Плоскость α проведена через диагональ A_1C параллельно диагонали BD основания. Вычислить: 1) площадь получившегося сечения; 2) угол наклона плоскости α к основанию; 3) расстояние от вершины A_1 до плоскости α; 4) угол и расстояние между BD и AC_1; 5) периметр получившегося сечения.

4. В пирамиде $SABCD$ через точку A и точку E — середину ребра SC — проведена плоскость α параллельно диагонали BD основания.

Вычислить: 1) площадь получившегося сечения; 2) угол наклона плоскости α к основанию $ABCD$; 3) угол между SA и BD; 4) расстояние от вершины пирамиды до плоскости α, если в прямоугольнике $ABCD$ $AB=a\sqrt{3}$, $BC=a$, высота SO пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей и равна $a\sqrt{5}$.

5. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник со сторонами $CD = a$ и $AD = a\sqrt{3}$. Высота пирамиды равна $2a$ и проходит через вершину C основания. Через вершину A и середину M ребра SC проведена плоскость α, параллельная диагонали BD основания. Вычислить: 1) площадь сечения; 2) угол между плоскостью α и основанием; 3) угол и расстояние между диагональю BD и линией AM.

6. В основании пирамиды $SABC$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и равно 2. Точки E и D являются серединами ребер BC и AB соответственно. Вычислить угол и расстояние между рёбрами SE и CD.

7. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ со стороной основания $AB = a$ и боковым ребром $B_1B = b$ вычислить расстояние между прямыми A_1B и B_1C_1.

8. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 150°. Через вершину конуса проведено сечение, являющееся прямоугольным треугольником. Найти угол между плоскостями сечения и основания.

9. В правильной шестиугольной пирамиде заданы угол α между соседними боковыми гранями и объём V шара, вписанного в пирамиду. Вычислить высоту пирамиды.

10. Вычислить объём правильной четырёхугольной пирамиды, высота которой равна H, а двугранный угол при боковом ребре в три раза больше двугранного угла при ребре основания.

Ответы.

1. $\operatorname{arctg} \dfrac{h\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}$.

2. $\operatorname{arctg} \dfrac{2\sqrt{3}\operatorname{tg}\beta}{3}$.

3. 1) $\frac{a^2\sqrt{2(\mathrm{tg}^2\beta+1)}}{2}$ (кв. ед.) или $\frac{a^2\sqrt{2}}{2\cos\beta}$ (кв. ед.);

2) $\arccos(\sqrt{2}\cos\beta)$ или $\mathrm{arctg}\sqrt{2\left(\mathrm{tg}^2\beta-1\right)}$; 3) 0 ($A\in a$);

4) $\arccos\sqrt{\frac{2}{\mathrm{tg}^2\beta+3}}$ или $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2(\mathrm{tg}^2\beta-1)}{\mathrm{tg}^2\beta+1}}$ $\mathrm{arcctg}(\sqrt{2}\cos\beta)$; или

$\frac{a\sqrt{2}\cos\beta}{2}\sqrt{\mathrm{tg}^2\beta-1}$; 5) $a\left(\frac{1}{\cos\beta}+\sqrt{\mathrm{tg}^2\beta+6}\right)$.

4. $\frac{a^2\sqrt{47}}{9}$ (кв. ед.); 2) $\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$; 3) $\mathrm{arctg}\sqrt{23}$; 4) $\frac{2a\sqrt{15}}{47}$.

5. 1) $\frac{4a^2}{3}$ (кв. ед.); 2) $\frac{\pi}{6}$; 3) $\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

6. $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

7. $\arccos\frac{5\sqrt{3}}{18}$.

8. $\arcsin\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

9. $\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+3\cos^2\frac{\alpha}{2}}}\right)$.

10. $\frac{12}{7}H^3$(куб. ед.).

X. МЕТОД КООРДИНАТ. СПРАВОЧНЫЕ ФОРМУЛЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Метод координат широко применяется в решении задач, он тесно связан с векторами. Напомним основные формулы этого метода. Самыми известными формулами метода координат мы уже пользовались.

Координаты. Положение любой точки P на плоскости и в пространстве может быть определено при помощи той или иной *системы координат*. Числа, определяющие положение точки, называются её *координатами*. Наиболее часто употребляются декартова прямоугольная, цилиндрическая и сферическая (на плоскости полярная) системы координат. Мы в дальнейшем будем использовать декартову прямоугольную систему координат.

Примечание. Название пособия говорит о том, что оно посвящено задачам стереометрии. Очень полезно, по мнению авторов пособия, познакомиться с аналогиями в формулах планиметрии и стереометрии.

Геометрия на плоскости.

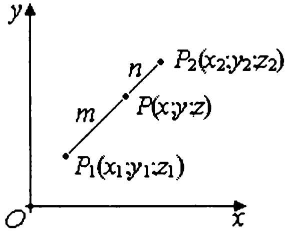
Расстояние между двумя точками $P_1(x_1;\ y_1)$ и $P_2(x_2;\ y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

Деление отрезка в данном отношении. Координаты точки $P(x;\ y)$, для которой $\dfrac{P_1P}{PP_2} = \dfrac{m}{n} = \lambda$, определяются по формулам:

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{n+m} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}\,;$$

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{n+m} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}\,.$$



Для середины отрезка P_1P_2: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Если отрезкам P_1P и PP_2 приписывать положительный или отрицательный знак, в зависимомти от того, совпадает их направление с направлением P_1P_2 или нет, то приведённые выше формулы могут служить при $\lambda < 0$ для нахождения точки, делящей отрезок P_1P_2 в данном отношении *внешним образом.* Например, для такой точки

P, что P_2 является серединой отрезка P_1P_2, $\lambda = \frac{P_1P}{PP_2} = -2$.

Площадь треугольника с вершинами $P_1(x_1;\ y_1)$, $P_2(x_2;\ y_2)$ и $P_3(x_3;\ y_3)$ описывается при помощи определителя третьего порядка:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x_1(y_2-y_3)+x_2(y_2-y_1)+x_3(y_1-y_2)),\text{ или}$$

$$S = \frac{1}{2}((x_1-x_2)(y_1+y_2)+(x_2-x_3)(y_2+y_3)+(x_3-x_1)(y_3+y_1)).$$

Три точки лежат на одной прямой, если этот определитель

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,\text{ или } y_1(x_3-x_2)+y_2(x_1-x_3)+y_3(x_2-x_1) = 0.$$

Площадь многоугольника с вершинами $P_1(x_1;\ y_1)$, $P_2(x_2;\ y_2)$, ... $P_n(x_n;\ y_n)$:

$$S = \frac{1}{2}((x_1-x_2)(y_1+y_2)+(x_2-x_3)(y_2+y_3)+\ldots+(x_n-x_1)(y_n+y_1)).$$

Уравнение окружности с центром в точке (a; b) радиуса R имеет вид $(x \pm a)^2 + (y \pm b)^2 = R^2$. С методической точки зрения знаки + и − не имеют при выводе формулы принципиального значения.

Уравнение прямой. Всякое уравнение, линейное относительно координат, определяет прямую линию, и наоборот, уравнение любой прямой − есть уравнеие первой степени.

Общее уравнение прямой:

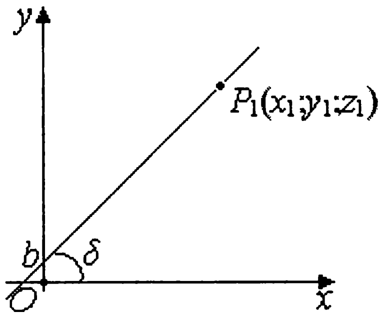
$$Ax + By + C = 0.$$

Если $A = 0$, то прямая параллельна оси Ox; если $B = 0$ − прямая параллельна оси Oy; если $C = 0$, прямая проходит через начало координат.

Уравнение всякой прямой, не параллельной оси Oy, может быть представлено в виде

$$y = kx + b,$$

k − угловой коэффициент прямой − равен $\operatorname{tg} \delta$; δ − угол между положительным направлением оси Ox и прямой; b − отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy (с учётом знака).

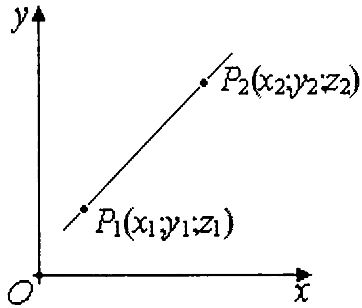


Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $P_1(x_1;\ y_1)$ в данном направлении:

$$y - y_1 = k(x - x_1),\ \text{где}\ k = \operatorname{tg} \delta.$$

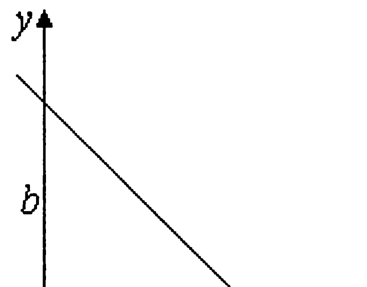
Уравнение, прямой, проходящей через две заданные точки $P_1(x_1; y_1)$ и $P_2(x_2; y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$



Уравнение прямой в отрезках. Если прямая отсекает на осях координат отрезки a и b (с учётом знаков, см. рисунок), то её уравнение:

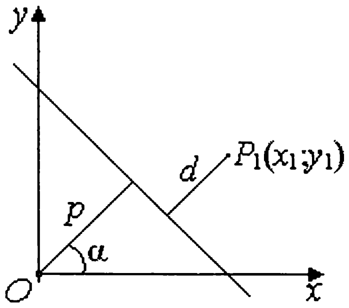
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$



Нормальное уравнение прямой:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$$

где p — расстояние прямой от начала координат, а α — угол, образованный с осью Ox перпендикуляром к прямой, проведённым из начала координат ($p > 0$; $0 \le \alpha < \pi$).



Нормальное уравнение прямой может быть получено из общего уравнения прямой $Ax + By + C = 0$ умножением на *нормирующий множитель*

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Множитель μ должен быть противоположен по знаку постоянной C.

Расстояние от точки $P_1(x_1;\ y_1)$ до прямой:

$$d = x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p;$$

d равно результату подстановки координат данной точки в левую часть нормального уравнения прямой. По этой формуле $d > 0$, если P_1 и начало координат лежат по разные стороны от данной прямой, и $d < 0$ в противном случае.

Точка пересечения прямых. Координаты $(x_0;\ y_0)$ точки пересечения двух прямых получаются при решении системы, состоящей из уравнений этих прямых:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Если $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, то данные прямые параллельны; в частности, при $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ прямые совпадают.

Третья прямая $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ проходит через точку пересечения двух прямых $(x_0; y_0)$, если эти координаты обращают уравнение прямой в верное равенство.

Угол φ между двумя прямыми.

Если уравнения прямых даны в общем виде

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$,

то $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2},$$

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

(угол φ отсчитывается от первой прямой ко второй против часовой стрелки).

Прямые *параллельны*: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$, или если $k_1 = k_2$.

Прямые *взаимно перпендикулярны*, если $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ или $k_1 \cdot k_2 = -1$.

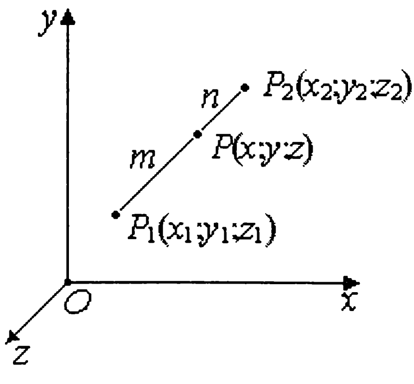
Геометрия в пространстве.

Расстояние между двумя точками $P_1(x_1; y_1; z_1)$ и $P_2(x_2; y_2; z_2)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Направляющие косинусы отрезка P_1P_2:

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}; \quad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d}; \quad \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}.$$



Деление отрезка в данном отношении. Координаты точки P(x; y; z), для которой $\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{m}{n} = \lambda$, определяются по формулам:

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{n+m} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}\sqrt{b^2 - 4ac}\ ;$$

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{n+m} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}\ ;$$

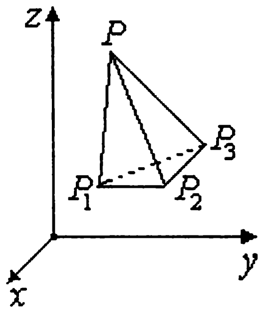
$$z = \frac{nz_1 + mz_2}{n+m} = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}\ .$$

Для середины отрезка P_1P_2: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$; $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

Объём треугольной пирамиды с вершинами в точках $P(x; y; z)$, $P_1(x_1; y_1; z_1)$, $P_2(x_2; y_2; z_2)$ и $P_3(x_3; y_3; z_3)$ записывается с использованием определителя:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \end{vmatrix}.$$

При вычислении по этой формуле $V>0$, если ориентация тройки векторов $\overrightarrow{PP_1}$, $\overrightarrow{PP_2}$ и $\overrightarrow{PP_3}$ совпадает с ориентацией системы координат (см. рис.), и $V<0$ в противном случае.



Четыре точки P_1, P_2, P_3 и P_4 лежат в одной плоскости, если

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости. Всякое уравнение, линейное относительно координат, определяет плоскость, и наоборот, уравнение любой плоскости есть уравнение первой степени.

Общее уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$ (каноническое уравнение плоскости); в векторной форме $\vec{r} \cdot \vec{N} + D = 0$. Вектор $\vec{N}$ $\{A; B; C\}$ перпендикулярен к плоскости; направляющие косинусы этого вектора:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

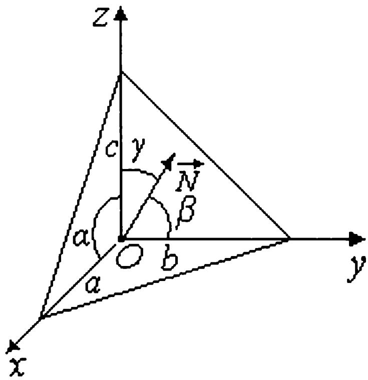
$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Если $D = 0$, то плоскость проходит через начало координат; если $A = 0$ (или $B = 0$, или $C = 0$), то плоскость параллельна оси Ox (соответственно Oy или Oz), если $A = B = 0$ (или $A = C = 0$, или $B = C = 0$), то плоскость параллельна плоскости Oxy (соответственно Oxz или Oyz).

Нормальное уравнение плоскости: $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$; в векторной форме $\vec{r} \cdot \overrightarrow{N_0} - p = 0$. Вектор $\overrightarrow{N_0}$ – единичный, p – расстояние плоскости от начала координат. Нормальное уравнение может быть получено из общего умножением на *нормирующий множитель* $\mu = \pm\frac{1}{N} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ (знак μ должен быть противоположен знаку D).

Уравнение плоскости в отрезках. Если плоскость отсекает на осях координат отрезки a, b и c (с учётом знаков, см. рисунок), то её уравнение:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$



Уравнение плоскости, проходящей:

а) *через три точки* $P_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $P_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ и $P_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$, записывается в виде уравнения с определителем третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

б) *через две точки* $P_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $P_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ *параллельно прямой с направляющим вектором* $\vec{R}\,\{l;\ m;\ n\}$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0;$$

в) *через одну точку* $P_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ *параллельно двум прямым с направляющими векторами* $\vec{R_1}\ \{l_1;\ m_1;\ n_1\}$ и $\vec{R_2}\ \{l_2;\ m_2;\ n_2\}$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0;$$

г) *через одну точку* $P_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ *перпендикулярно к прямой с направляющим вектором* $\vec{N}\ \{A;\ B;\ C\}$:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0;$$

д) *через линию пересечения двух плоскостей* $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$:

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ – уравнение пучка прямых (меняя λ от $-\infty$ до $+\infty$, получим все плоскости пучка).

Расстояние между двумя параллельными плоскостями

$Ax + By + Cz + D_1 = 0$ и $Ax + By + Cz + D_2 = 0$

равно $\delta = \dfrac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Расстояние от точки $M(a; b; c)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ находится путём подстановки координат точки в нормальное уравнение плоскости

$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$:

$$\delta = |a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma - p|, \text{ или } \delta = \left|\frac{Aa + Bb + Cc - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|.$$

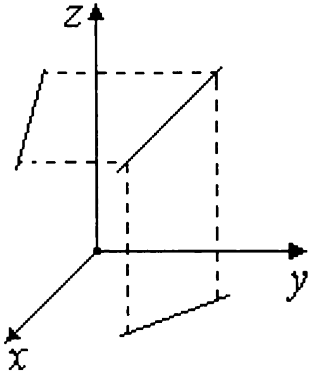
Уравнение прямой в пространстве. Прямая в пространстве определяется как линия пересечения двух плоскостей и задаётся аналитически системой двух линейных уравнений.

Общее уравнение прямой:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0; \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

в векторной форме $\begin{cases} \vec{r} \cdot \overline{N_1} = 0, \\ \vec{r} \cdot \overline{N_2} = 0. \end{cases}$

Уравнение прямой в двух проектирующих плоскостях: $y = kx + a$, $z = hx + b$; каждое из уравнений определяет плоскость, проектирующую прямую на плоскости Oxy и Oxz.



Для прямых, параллельных плоскости Oxy, этот вид уравнений не применим; для них необходимо взять другую пару координатных плоскостей.

Уравнение прямой, проходящей:

а) *через данную точку* $P_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ *параллельно направляющему вектору* $\vec{R}\ \{l;\ m;\ n\}$ (каноническое уравнение прямой):

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}; \qquad \text{(II)}$$

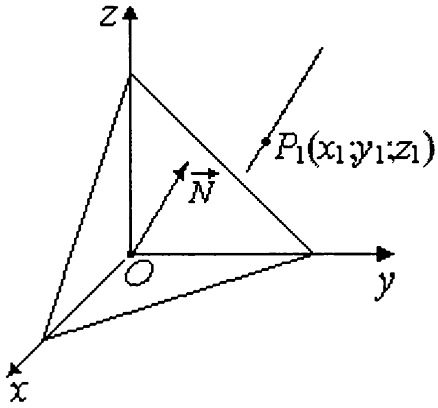
в параметрическом виде $x = x_1 + lt$; $y = y_1 + mt$; $z = z_1 + nt$; или в векторной форме $\vec{r}=\vec{r_1}+\vec{R}t$;

б) *через две данные точки* $P_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $P_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1};$$

в) *через данную точку* $P_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ *перпендикулярно к плоскости* $Ax + By + Cz + D = 0$ или $\vec{r}\cdot\vec{N}+D=0$:

$$\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C}.$$



Расстояние δ *точки* $M(a;\ b;\ c)$ *от прямой*, заданной уравнением в канонической форме (II):

$$\delta = \frac{((a-x_1)m-(b-y_1)l)^2+((b-y_1)n-(c-z_1)m)^2+((c-z_1)l+(a-x_1)n)^2}{l^2+m^2+n^2}.$$

Кратчайшее расстояние между прямыми, если их уравнения даны в канонической форме $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ и

$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$, может быть вычислено по формуле

$$\delta = \frac{\pm\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}}}.$$

Обращение в нуль стоящего в числителе определителя есть *условие пересечения двух прямых в пространстве.*

Координаты точки пересечения плоскости и прямой.

1. Плоскость и прямая заданы каноническими уравнениями

$$Ax + By + Cz + D = 0,\ \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}.$$

Координаты точки пересечения вычисляются по формулам:

$$x_* = x_1 - lp;\ y_* = y_1 - mp;\ z_* = z_* - np, \text{ где } p = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Al + Bm + Cn}.$$

Если $Al + Bm + Cn = 0$, то прямая параллельна плоскости; если, кроме того, $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, то прямая лежит в плоскости.

2. Плоскость задана каноническим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, а прямая задана уравнениями $y = kx + a$, $z = hx + b$.

Координаты точки пересечения вычисляются по формулам:

$$x_* = -\frac{Ba + Cb + D}{A + Bk + Ch};\ y_* = kx_* + a;\ z_* = hx_* + b.$$

Координаты пересечения двух прямых.

Прямые заданы своими уравнениями $y = k_1x + a_1$, $z = h_1x + b_1$; $y = k_2x + a_2$, $z = h_2x + b_2$.

Координаты точки вычисляются по формулам:

$$x_* = \frac{a_2 - a_1}{k_1 - k_2} = \frac{b_2 - b_1}{h_1 - h_2};\ y_* = \frac{k_1a_2 - k_2a_1}{k_1 - k_2};\ z_* = \frac{h_1b_2 - h_2b_1}{h_1 - h_2}.$$

Эти формулы дают точку пересечения лишь при условии $(a_1 - a_2)(h_1 - h_2) = (b_1 - b_2)(k_1 - k_2)$, в противном случае прямые не пересекаются.

Угол между двумя плоскостями.

1. Заданными своими уравнениями

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

2. Заданными в векторной форме: $\vec{r_1} \cdot \overrightarrow{N_1} + D_1 = 0$, $\vec{r_2} \cdot \overrightarrow{N_2} + D_2 = 0$:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{N_2}\right|}.$$

Угол между двумя прямыми, заданными в канонической форме

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}:$$

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

Угол между прямой $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ *и плоскостью* $Ax+By+Cz+D=0$:

$$\sin\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Условия параллельности (обозначения прежние):

двух плоскостей: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$;

двух прямых: $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$;

прямой и плоскости: $Al+Bm+Cn=0$.

Условия перпендикулярности (обозначения прежние):

двух плоскостей: $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$, или $\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}=0$;

двух прямых: $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$, или $\overrightarrow{R_1}\cdot\overrightarrow{R_2}=0$;

прямой и плоскости: $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$, или $\vec{N}\cdot\vec{R}=0$.

XI. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА КООРДИНАТ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

В этом разделе мы рассмотрим решения как довольно простых задач, для решения которых достаточно просто использования одной или нескольких известных формул, так и задач, в решении которых необходимо использовать некоторые дополнительные соображения. При рассмотрении задач в этом разделе мы будем для сравнения показывать и другие способы решения задач.

Для начала рассмотрим несколько задач на применение метода координат на плоскости.

Задача 1. При повороте вокруг начала координат точка $A(6;\ 8)$ отображается на точку $A_1(8;\ 6)$. Вычислить косинус угла поворота.

Решение. Переведём задачу на язык векторов и координат: вектор $\overrightarrow{OA}\{6;8\}$ был повёрнут так, что стал вектором $\overrightarrow{OA_1}\{8;6\}$. Косинус угла между этими векторами легко определяется по известной формуле

$$\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}};$$

$$\cos\alpha=\frac{6\cdot8+8\cdot6}{\sqrt{36+64}\cdot\sqrt{64+36}}=\frac{96}{100}=\frac{24}{25}.$$

Ответ: $\cos\alpha=\dfrac{24}{25}$.

Задача 2. Даны две окружности: $x^2+(y-1)^2=9$ и $(x+2)^2+y^2=4$. Вычислить расстояние между данными окружностями по линии центров.

Решение. Перепишем уравнения окружностей в виде $x^2+(y-1)^2=3^2$ и $(x+2)^2+y^2=2^2$. Первая из окружностей имеет центр в точке $P(0;\ 1)$, её радиус равен 3. Вторая из окружностей имеет центр в точке $E(-2; 0)$, её радиус равен 2. Найдём расстояние между центрами окружностей: $PE = \sqrt{2^2+1} = \sqrt{5}$. Ясно, что обе окружности дважды пересекают линию центров, поэтому будет корректно говорить о наименьшем расстоянии между двумя окружностями вдоль линии центров и наибольшем расстоянии между ними.

Кратчайшее расстояние равно расстоянию между центрами без разности их радиусов, оно равно $\sqrt{5}-(3-2)= \sqrt{5}-1$. Наибольшее расстояние между окружностями вдоль линии центров будет равно сумме расстояния между центрами и двух радиусов: $\sqrt{5} + 3 + 2 = 5 + \sqrt{5}$.

Ответ: $\sqrt{5}-1$; $5+\sqrt{5}$.

Задача 3. Составить уравнения окружностей, касающихся прямых $y = 0$, $y = 4$, $x + y + 1= 0$.

Решение. Анализ условия задачи позволяет утверждать, что касаться двух параллельных оси абсцисс прямых $y = 0$ и $y = 4$ могут только окружности, имеющие радиус, равный половине расстояния между прямыми, т. е. $R = 2$.

Уравнение нашей окружности должно иметь вид $(x + a)^2 + (y + b)^2 = 2^2$. Подставим известные по условию задачи данные и получим систему уравнений

$$\begin{cases}(x+a)^2+b^2=4,\\(x+a)^2+(4+b)^2=4,\\x+y+1=0.\end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем $16 + 8b = 0$, откуда $b = -2$. Далее из третьего уравнения $y=\pm2\sqrt{2}-1-x$, тогда $(x + a)^2 + (-1 - x - 2)^2 = 4$; $(x + a)^2 + (x + 3)^2 = 4$; $2x^2 + 2(a + 3)x + a^2 + 5 = 0$. Полученное квадратное уравнение должно иметь один корень, тогда дискриминант этого квадратного уравнения должен быть равен нулю.

$0{,}25D = a^2 + 6a + 9 - 2a^2 - 10 = -a^2 + 6a - 1$; $a^2 - 6a + 1 = 0$; $a_{1,2} = 3 \pm2\sqrt{2}$. Окончательно получаем $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

Ответ: $(x + 3 -2\sqrt{2})^2 + (y - 2)^2 = 4$; $(x + 3+2\sqrt{2})^2 + (y - 2)^2 = 4$.

Задача 4. Составить уравнения касательных, проведённых к окружности $x^2 + y^2 - 9 = 0$ из точки $M(5; 0)$.

Решение. *Способ 1.* Окружность $x^2 + y^2 = 3^2$, центр которой расположен в начале координат, имеет радиус равный 3. Если точка касания имеет координаты $(x_2; y_2)$, а точка $M(x_1; y_1)$, то уравнение касательной, проведённой через две точки, имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

В нашей задаче $\frac{x-5}{x_2-5} = \frac{y}{y_2}$, тогда уравнение касательной имеет

вид $y = \frac{y_2}{x_2-5}x - \frac{5y_2}{x_2-5}$. (*)

С другой стороны радиус окружности, проведённый из начала координат в точку касания, даёт уравнение прямой $\frac{x}{x_2} = \frac{y}{y_2}$, откуда $y = \frac{y_2}{x_2}x$.

Поскольку радиус окружности, проведённый в точки касания всегда перпендикулярен касательной, произведение угловых коэффициетнтов двух прямых должно равняться -1: $\frac{y_2}{x_2-5} \cdot \frac{y_2}{x_2} - 1$, откуда с учётом $y^2 = 9 - x^2$ после несложных преобразований получаем $x_2 = \frac{9}{5}$, а далее $y_2 = \pm\frac{12}{5}$.

Способ 2. Задача может иметь и распространённое решение. Пусть $y = \sqrt{9 - x^2}$, где $0 \le x \le 3$. Уравнение касательной в точке с абсциссой x_0 имеет вид $y = \sqrt{9 - x_0^2} - \frac{x_0(5 - x_0)}{\sqrt{9 - x_0^2}}$. Так как касательная проходит через точку (5; 0), то $0 = \sqrt{9 - x_0^2} - \dfrac{x_0(5 - x_0)}{\sqrt{9 - x_0^2}}$,

откуда $x = 1{,}8$, но тогда $y = \pm\dfrac{12}{5}$.

Примечание. Полученный результат можно было прогнозировать: центр окружности находится в начале координат, точка, из которой проводятся касательные, лежит на оси абсцисс.

Получим уравнения касательных, подставляя координаты точек касания в уравнение (*). $y^* = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{15}{4}$; $y^{**} = -x + \dfrac{15}{4}$. Эти результаты могут быть приведены к каноническому виду прямой на плоскости.

Ответ: $3x - 4y - 15 = 0$; $3x + 4y - 15 = 0$.

Задача 5. Доказать, что треугольник с вершинами $A(0; 1; -2)$, $B(1; 2; -5)$, $C(-4; -3; 2)$ тупоугольный. Вычислить косинус тупого угла.

Решение. Воспользуемся хорошо известными формулами для скалярного произведения двух векторов Скалярное произведение двух векторов равно произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$. Ясно, что угол между векторами будет тупым, если косинус этого вектора отрицателен.

С другой стороны, если векторы имеют известные в декартовой системе координат координаты, то их скалярное произведение равно сумме произведений соответствующих координат $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$. Именно этим фактом мы и воспользуемся. Следует особо обратить внимание на то, чтобы рассматриваемые нами векторы (они будут соответствовать сторонам треугольника) выходили из одной вершины.

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AB}\{1; 1; -3\}$ и $\overrightarrow{AC}\{-4; -4; 4\}$, выходящие из вершины A треугольника. Их скалярное произведение равно $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -4 - 4 - 12 = -20$. Получилось отрицательное скалярное произведение, из чего заключаем, что угол A треугольника – тупой. Для определения косинуса этого угла воспользуемся хорошо известной формулой для двух векторов:

$$\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Примечание. Ранее мы рассматривали и более сложные задачи.

Для нашего угла после подстановки исходных данных имеем:

$$\cos\angle BAC = \frac{-20}{\sqrt{1+1+9}\cdot\sqrt{16+16+16}} = -\frac{20}{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{11}} = -\frac{5}{\sqrt{33}}.$$

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{BA}\{-1;-1;3\}$ и $\overrightarrow{BC}\{-5;-5;3\}$, выходящие из вершины B. Их скалярное произведение $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 5+5+9 = 19$. Полученное положительное скалярное произведение говорит о том, что угол B является острым.

Рассмотрим векторы, выходящие из вершины C. Их скалярное произведение $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 20 + 20 + 12 = 52$. Полученное положительное скалярное произведение говорит о том, что угол C является острым.

Ответ: угол A треугольника ABC тупой, $\cos\angle BAC = -\frac{5}{\sqrt{33}}$.

Задача 6. Дана сфера $x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0$ и прямая l, проходящая через точку $A(2;\ 1;\ 1)$ параллельно вектору $\vec{a}\{2;-4;-1\}$. Вычислить координаты точек пересечения прямой l со сферой.

Решение. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $P_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ параллельно направляющему вектору $\vec{R}\ \{l;\ m;\ n\}$ (*каноническое уравнение прямой*) $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ в нашей задаче принимает вид $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-1}{-1}$. Задание прямой в параметрическом виде будет иметь вид $x = x_1 + lt$; $y = y_1 + mt$; $z = z_1 + nt$; или для нашей задачи $x = 2t + 2$; $y = -4t + 1$; $z = -t + 1$.

Подстановка x, y и z в уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0$ даёт возможность определить значение t: $(2t + 2)^2 + (1 - 4t)^2 + (t - 1)^2 - 25 = 0$; $21t^2 - 2t - 19 = 0$. Решение полученного квадратного уравнения приводит к $t_1 = 1$ и $t_2 = -\dfrac{19}{21}$. Первое значение параметра даёт точку $A(4; -3; 0)$, второе значение параметра деёт точку $B\left(\dfrac{4}{21}; \dfrac{97}{21}; \dfrac{40}{21}\right)$.

Ответ: $(4; -3; 0)$; $\left(\dfrac{4}{21}; \dfrac{97}{21}; \dfrac{40}{21}\right)$.

Задача 7. Дана плоскость $2x + 2y - z + 4 = 0$ и прямая l, проходящая через точки $A(2; 1; 1)$ и $B(-3; 4; 0)$. Вычислить координаты пересечения прямой l с данной плоскостью.

Решение. Запишем уравнение прямой, проходящей через две заданные точки: $\dfrac{x-2}{-3-2} = \dfrac{y-1}{4-1} = \dfrac{z-1}{0-1}$; $\dfrac{x-2}{-5} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-1}{-1} = t$.

Перепишем уравнение прямой в параметрическом виде: $x = -5t + 2$; $y = 3t + 1$; $z = -t + 1$ (*). Подстановка координат в уравнение плоскости даёт $-10t + 4 + 6t + 2 + t - 1 + 4 = 0$, откуда $t = 3$. Данное значение параметра сразу после подстановки в (*) приводит к координатам точки пересечения прямой l с плоскостью: $x = -13$; $y = 10$; $z = -2$.

Ответ: $A(-13; 10; -2)$ – точка пересечения прямой и плоскости.

Задача 8. Найти множество точек пространства, сумма квадратов расстояний каждой из которых до данных точек $A(2; 3; -1)$, $B(1; -1; 3)$ имеет одно и то же значение, равное m^2.

Решение. Пусть произвольная точка пространства, удовлетворяющая условию задачи, имеет координаты $(x; y; z)$. Составим уравнение в соотвествии с условием задачи:

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 + (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = m^2.$$

Раскроем скобки, сгруппируем члены, относящиеся к одной переменной, и выделим полные квадраты:

$$(x^2 - 4x + 4 + x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9 + y^2 + 2y + 1) + (z^2 + 2z + 1 + z^2 - 6z + 9) = m^2;$$

$$2x^2 - 6x + 5 + 2y^2 - 4y + 10 + 2z^2 - 4z + 10 = m^2;$$

$$2x^2-2\sqrt{2}x\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{9}{2}+2y^2-2\sqrt{2}\,y\sqrt{2}+2+2z^2-2\sqrt{2}z\sqrt{2}+2=$$

$$=m^2-16{,}5;$$

$$(\sqrt{2}x-1{,}5\sqrt{2})^2+(\sqrt{2}y-\sqrt{2})2+(\sqrt{2}z-\sqrt{2})^2=m^2-16{,}5;$$

$$(x-1{,}5)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=\frac{m^2-16{,}5}{2}.$$

Полученный результат как любое уравнение с параметром требует анализа. Ясно, что при различных значениях параметра m мы получим разные геометрические места точек.

Ответ: при $m^2 > 16{,}5$ сфера с центром в точке (1,5; 1; 1);

при $m^2 = 16{,}5$ точка (1,5; 1; 1);

при $m^2 < 16{,}5$ геометрическое место точек в декартовой системе координат не определено (пустое множество).

Задача 9. Известны координаты трёх вершин куба: $X(2; 4; -1)$; $Y(-8; -4; 5)$ и $Z(-8; 2; 13)$. Найти координаты остальных его вершин.

Решение. Пусть длина ребра куба равна a, тогда длина диагонали любой грани куба равна $a\sqrt{2}$, а длина диагонали куба $a\sqrt{3}$. Эти соображения будут нам полезны для решения задачи.

Вектор $\overrightarrow{XY}\{-10;-8;6\}$, его длина равна $\left|\overrightarrow{XY}\right|=\sqrt{100+64+36}=10\sqrt{2}$. Вектор $\overrightarrow{YZ}\{0;6;8\}$, его длина равна $\left|\overrightarrow{YZ}\right|=\sqrt{0+36+64}=10$. Вектор $\overrightarrow{XZ}\{-10;-2;14\}$, его длина равна $\left|\overrightarrow{XZ}\right|=\sqrt{100+4+1966}=10\sqrt{3}$. Кроме того $\overrightarrow{XY}\cdot\overrightarrow{YZ}=-10\cdot0-8\cdot6+6\cdot8=0.$

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что YZ — ребро куба длины 10, XY — диагональ грани куба, перпендикулярная ребру YZ (её длина $10\sqrt{2}$), а XZ — диагональ куба длиной $10\sqrt{3}$. Ясно, что ни одно ребро данного по условию куба не будет параллельно осям координат.

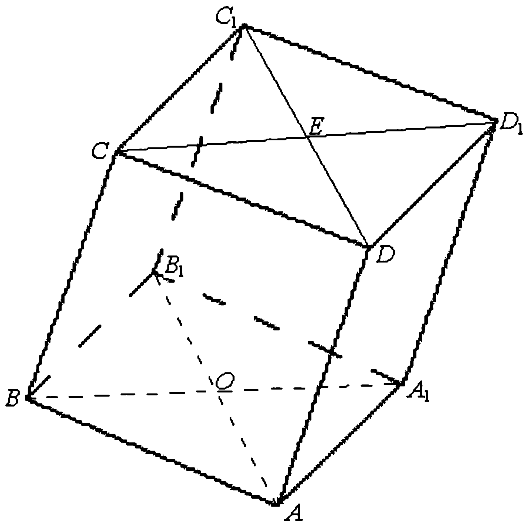


Рис. 1

Введём привычные для нас обозначения для вершин куба (это в решении задачи не является совершенно необходимым шагом), правда сам куб немного необычно расположен в пространстве: грань $ABCD$ не будет «основанием» куба, однако грань $A_1B_1C_1D_1$ будет ей параллельной. Итак, пусть задан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого известны координаты трёх вершин: $A(2;\,4;\,-1)$; $B_1(-8;\,-4;\,5)$ и $C_1(-8;\,2;\,13)$.

Начнём с определения координат вершины D. Обратим внимание на то, что вектор $\overrightarrow{B_1A}\{10;8;-6\}$ является направляющим вектором прямой C_1D, которая проходит через точку $C_1(-8;\,2;\,13)$. Запишем уравнение прямой, проходящей через заданную точку параллельно направляющему вектору: $\dfrac{x_D+8}{10}=\dfrac{y_D-2}{8}=\dfrac{z_D-13}{-6}=t$.

В параметрическом виде уравнение прямой принимает вид $\begin{cases} x_D=10t-8, \\ y_D=8t+2, \\ z_D=-6t+13. \end{cases}$ Вектор $\overrightarrow{AD}\{10t-10;8t-2;-6t+14\}$ имеет длину, равную 10. Запишем уравнение $(10t-10)^2+(8t-2)^2+(-6t+14)^2=100$, которое имеет единственный корень $t=1$, тогда $x_D=2$; $y_D=10$; $z_D=7$. Координаты точки $D(2;\ 10;\ 7)$ определены.

Для дальнейшего решения задачи нам потребуется уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2;\ 4;\ -1)$, $B_1(-8;\ -4;\ 5)$ и $D(2;\ 10;\ 7)$. Для этого составим определитель третьего порядка и приравняем его нулю:

$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_{B_1}-x_A & y_{B_1}-y_A & z_{B_1}-z_A \\ x_D-x_A & y_D-y_A & z_D-z_A \end{vmatrix}=0.$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z+1 \\ -10 & -8 & 6 \\ 0 & 6 & 8 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z+1 \\ 5 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}=0.$$

Разложив определитель по первой строке в соответствии с общепринятыми правилами, получим:

$$(x-2)(16+9)+(4-y)(20+0)+(z+1)\cdot 15=0.$$

После очевидного упрощения уравнение плоскости AB_1C_1D принимает вид $5x-4y+3z-9=0$ (***).

Далее определим координаты центра грани ABB_1A_1 по координатам точек $A(2;\ 4;\ -1)$ и $B_1(-8;\ -4;\ 5)$: $O(-3;\ 0;\ 2)$; а также координаты центра грани CDD_1C_1 по координатам точек $C_1(-8;\ 2;\ 13)$ и $D(2;\ 10;\ 7)$: $E(-3;\ 6;\ 10)$.

Уравнение прямой, проходящей через точку $P_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, перпендикулярно плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, имеет вид

$$\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C}=t.$$

Запишем уравнение прямой, проходящей через точку O, перпендикулярно плоскости AB_1C_1D, или в параметрическом виде. Расстояния A_1O и BO равны $5\sqrt{2}$, поэтому можно записать уравнение для квадратов расстояний, которое позволит определить координаты точек A_1 и B: $(5t - 3 + 3)^2 + (-4t - 0)^2 + (3t + 2 - 2)^2 = 50$; $25t^2 + 16t^2 + 9t^2 = 50$; $50t^2 = 50$; $t = \pm 1$.

При $t = 1$ $x = 2$; $y = -4$; $z = 5$ мы получаем координаты точки $B(2; -4; 5)$; при $t = -1$ $x = -8$; $y = 4$; $z = -1$ получаем координаты точки $A_1(-8; 4; -1)$.

Аналогично могут быть определены координаты точек C и D_1. Запишем уравнение прямой, проходящей через точку E, перпендикулярно плоскости AB_1C_1D: $\frac{x+3}{5} = \frac{y-0}{-4} = \frac{z-2}{3} = t$, или в параметрическом виде $\begin{cases} x = 5t - 3, \\ y = -4t, \\ z = 3t + 2. \end{cases}$ Расстояния CE и D_1E равны $5\sqrt{2}$, поэтому можно записать уравнение для квадратов расстояний, которое позволит определить координаты точек C и D_1:

$(5t - 3 + 3)^2 + (-4t + 6 - 6)^2 + (3t + 10 - 10)^2 = 50$; $25t^2 + 16t^2 + 9t^2 = 50$; $50t^2 = 50$; $t = \pm 1$.

При $t = 1$ $x = 2$; $y = 2$; $z = 13$ мы получаем координаты точки $C(2; 2; 13)$; при $t = -1$ $x = -8$; $y = 10$; $z = 7$ получаем координаты точки $D_1(-8; 10; 7)$.

Далее можно проверить ортогональность рёбер куба и ортогональность диагоналей каждой грани. Мы предлагаем это проделать читателям.

Ответ: $D(2; 10; 7)$; $A_1(-8; 4; -1)$; $B(2; -4; 5)$; $C(2; 2; 13)$; $D_1(-8; 10; 7)$.

Задача 10. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найти радиус сферы, проходящей через середины рёбер AA_1, BB_1 и вершины A и C_1.

Решение. Все кубы подобны, поэтому без нарушения общности (мы так уже неоднократно поступали) будем считать, что длина ребра куба равна единице. Полученный при таком допущении результат в дальнейшем умножим на a.

Поместим куб в прямоуголную систему координат как показано на рис. 2.

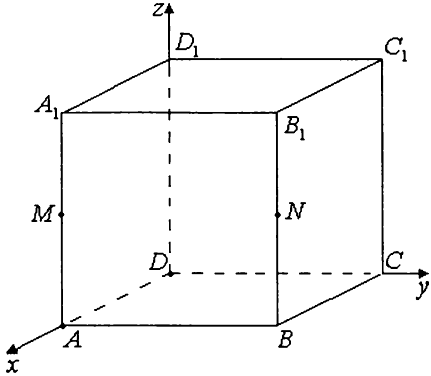


Рис. 2

Координаты точек, необходимых для решения задачи, будут $M(1;\ 0;\ 0{,}5)$, $N(1;\ 1;\ 0{,}5)$, $C_1(0;\ 1;\ 1)$ и $A(1;\ 0;\ 0)$. Уравнение сферы с центром в точке $(a;\ b;\ c)$ и радиуса R имеет вид $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$. Поскольку сфера проходит через точки M, N, C_1 и A, для определения постоянных a, b, c и R составим систему уравнений

$$\begin{cases} (1-a)^2 + b^2 + c^2 = R^2, \\ (1-a)^2 + b^2 + (c-0{,}5)^2 = R^2, \\ (1-a)^2 + (1-b)^2 + (c-0{,}5)^2 = R^2, \\ a^2 + (1-b)^2 + (c-1)^2 = R^2. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, а из второго третье, находим $c = 0{,}25$; $b = 0{,}5$. Теперь легко находится и $a = 0{,}25$, но

тогда $R^2 = \dfrac{9}{16} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{7}{8}$.

Ответ: $a\sqrt{\dfrac{7}{8}}$.

Задача 11. Вычислить расстояние от плоскости $2x + 2y - z + 15 = 0$ до сферы $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$.

Решение. *Способ 1.* Сначала решим задачу традиционным способом. По условию задачи сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 2^2$ радиуса 2 имеет центр в начале координат. Ясно, что необходимо отыскать расстояние от начала координат до плоскости, уравнение которой задано, а далее из полученного расстояния вычесть радиус сферы. Покажем на рис. 3 расположение плоскости $2x + 2y - z + 15 = 0$ относительно координатных осей:

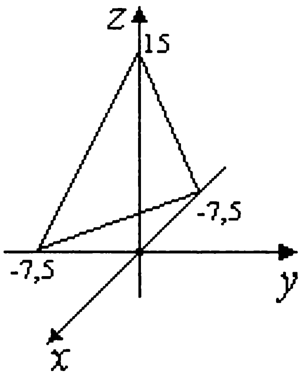


Рис. 3

Подставив попарно нули вместо координат в уравнение плоскости, получим точки пересечения плоскости с осями координат. На рис. 4 начало координат обозначено буквой C, точки A и B – точки пересечения плоскости с осями Ox и Oy соответственно, S – точка пересечения плоскости с осью Oz.

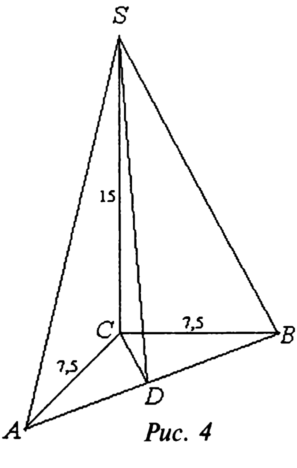


Рис. 4

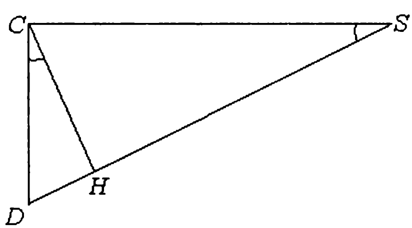


Рис. 5

В треугольнике ABC $AC = CB$, $CD \perp AB$, при этом $CD = \frac{7,5\sqrt{2}}{2}$. По теореме о трёх перпендикулярах $CD \perp AB$, $SD \perp AB$, $SC \perp ABC$. Обратимся к рис. 5. На нём CH — перпендикуляр, опущенный из начала координат на SD; он является и расстоянием от начала координат до данной по условию задачи плоскости $2x + 2y - z + 15 = 0$.

Треугольник CHD подобен треугольнику SCD, тогда $\frac{CD}{CH} = \frac{SD}{CS}$, откуда $CH = \frac{CD \cdot CS}{SD}$ (*). По теореме Пифагора из треугольника SCD $SD = \sqrt{15^2 + \left(\frac{7,5\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{15 \cdot 3}{2\sqrt{2}}$. Подставляя длины отрезков CD, CS и SD в формулу (*), получаем, что расстояние от начала координат до плоскости $CH = 5$. Напомним, что радиус сферы с центром в начале координат равен 2. Итак, расстояние от поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ до плоскости $2x + 2y - z + 15 = 0$ равно $5 - 2 = 3$.

Способ 2. Теперь воспользуемся формулами, известными в методе координат. Расстояние от точки $M(a; b; c)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ находится путём подстановки координат точки в нормальное уравнение плоскости $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$, где

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};\ \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};\ p = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

$$\delta = |a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma - p|.$$

Проведём очевидные преобразования и получим формулу для поставленной перед нами задачи:

$$\delta = \left|\frac{Aa + Bb + Cc - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|.$$

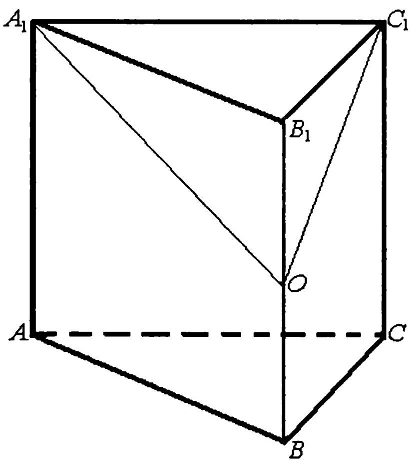
Произведём вычисления с учётом того, что уравнение плоскости имеет вид $2x + 2y - z + 15 = 0$, а точка, расстояние от которой требуется определить — начало координат:

$\delta = \left| \dfrac{2\cdot 0 + 2\cdot 0 - 1\cdot 0 - 15}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} \right| = \dfrac{15}{\sqrt{9}} = 5$. Ещё раз вспомним, что радиус сферы равен 2, и вычтем этот радиус: $5 - 2 = 3$. Расстояние от плоскости до сферы равно 3.

Ответ: 3.

Задача 12. В правильной прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ со стороной основания a и высотой b через ребро A_1C_1 и середину ребра BB_1 проведено сечение. Определить расстояние от середины ребра BC до этого сечения.

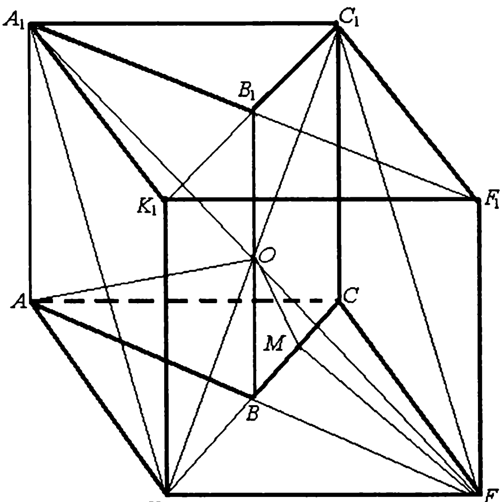
Решение. *Способ 1.* Для начала изобразим сечение, участвующее в условии задачи, для чего соединим точки A_1и C_1 с точкой O, при этом получим сечение A_1C_1O нашей заданной по условию задачи призмы:



Достроим заданную призму до параллелепипеда. Для этого продолжим отрезок A_1O до пересечения с прямой AB, а значит, и с плоскостью основания. Аналогично получим точку K как пересечение прямой C_1O с прямой BC, а значит и с плоскостью ABC.

Поскольку O – середина ребра BB_1, $OB = \frac{1}{2}AA_1$, а поэтому $OA_1 = OF$ и $AB = BF$, аналогично показывается, что $KB = BC$. Теперь ясно, что $\triangle ABK$ и $\triangle BCF$ – равные равнобедренные треугольники с углами при вершинах, равными $120°$. $\triangle KBF$, как и $\triangle ABC$ равносторонний. $\angle KAC = \angle ACF = \angle CFK = \angle FKA = 90°$. Итак, $ACFK$ – прямоугольник, а $ACFKAA_1C_1F_1K_1$ – прямоугольный параллелепипед со сторонами основания $KF = a$ и $CF = a\sqrt{3}$.

Соединим точку O с точками M, K и F. Получим треугольную пирамиду $OKFM$, для которой BO – высота. Объём этой пирамиды равен $V = \frac{1}{3}S_{\triangle MFK} \cdot OB = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a\left(a+\frac{a}{2}\right)\sin 60^0 \cdot \frac{b}{2} = \frac{a^2b\sqrt{3}}{16}$.

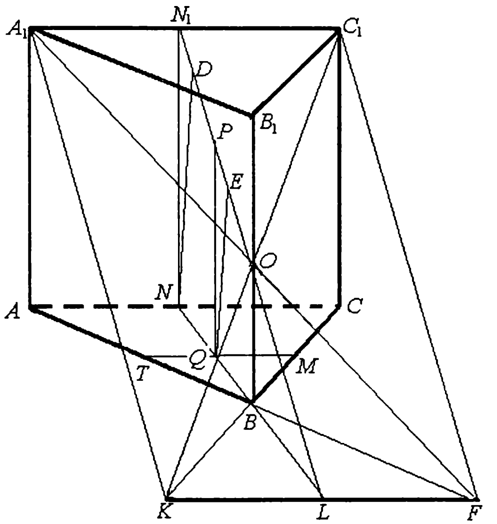


С другой стороны, объём этой же пирамиды можно найти, приняв за основание $\triangle KOF$: $V = \frac{1}{3}S_{\triangle KOF} \cdot x$, где x – высота, проведённая из точки M на плоскость KOF. Её длина и будет искомым расстоянием от точки M до сечения. Поскольку $KF \perp FC$, по теореме о трёх перпендикулярах $KF \perp FC_1$, A_1KFC_1 – прямоугольник.

$S_{\triangle KOF} = \frac{1}{4} S_{A_1KFC_1} = \frac{1}{4} a\sqrt{b^2 + 3a^2}$, где C_1F найдена по теореме Пифагора из $\triangle CC_1F$.

Итак, $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} a\sqrt{b^2 + 3a^2} \cdot x = \frac{a^2 b\sqrt{3}}{16}$, откуда $x = \frac{3\sqrt{3}ab}{4\sqrt{b^2 + 3a^2}}$ – искомое расстояние.

Способ 2. Часть построений, описанных ранее в первом способе решения, мы опустим. Оставим только существенные для этого способа решения моменты.



Для решения будем использовать уже полученный ранее след секущей плоскости KF и некоторые дополнительные построения. Ясно, что $KF \parallel A_1C_1$. Проведём плоскость $LOB \perp KF$ до пересечения с плоскостью AA_1C_1C. $\triangle NN_1L \perp \triangle ABC$. В плоскости основания проведём $MT \parallel AC \parallel KF$, MT – средняя линия $\triangle ABC$, она пересекается с отрезком NL в точке Q. В $\triangle NN_1L$ проведём $ND \perp N_1L$ и $QE \perp N_1L$, получим подобные треугольники: $\triangle NN_1L$ и $\triangle QLE$. $NB = BL$, $NL = \frac{4}{3} QL$.

$\frac{QL}{NL} = \frac{QE}{ND} = \frac{3}{4}$; $EQ = \frac{3}{4}$ ND – расстояние от точки M до сечения.

$NN_1 \perp NL$; $ND \perp N_1L$, тогда $\angle N_1ND = \angle NLN_2 = \angle PQE = \alpha$.

Из $\triangle BNC$: $NB = DC \sin 60^\circ = a \frac{\sqrt{3}}{2}$; $NL = 2NB = a\sqrt{3}$.

$N_1L = \sqrt{NL^2 + N_1N^2} = \sqrt{b^2 + 3a^2}$; $ND = NN_1 \cos \alpha = b \cos \alpha =$
$= b \frac{NL}{N_1L} = \frac{ab\sqrt{3}}{\sqrt{b^2 + 3a^2}}$.

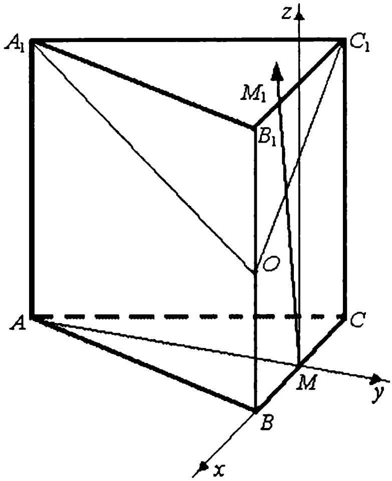
Получаем ответ: $EQ = \frac{3\sqrt{3}ab}{4\sqrt{b^2 + 3a^2}}$.

Способ 3. Теперь при решении задачи используем векторы. Введём систему координат, как показано на рисунке.

Пусть M_1M – перпендикуляр, опущенный из точки M на сечение призмы A_1C_1O, причём координаты точек соответственно: $M(0;\ 0;\ 0)$, $M_1(x;\ y;\ z)$. Далее имеем векторы: $\overrightarrow{MM_1}(x; y; z)$;

$\overrightarrow{A_1O}\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{b}{2}\right)$; $\overrightarrow{A_1C_1}\left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$; $\overrightarrow{C_1O}\left(a; 0; -\frac{b}{2}\right)$;

$\overrightarrow{C_1M_1}\left(x + \frac{a}{2}; y; z - b\right)$.



Из условия перпендикулярности вектора $\overrightarrow{MM_1}$ к сечению A_1OC_1

имеем: $\begin{cases} \overrightarrow{MM_1}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0, \\ \overrightarrow{MM_1}\cdot\overrightarrow{C_1O}=0, \\ \overrightarrow{MM_1}\cdot\overrightarrow{A_1O}=0, \\ \overrightarrow{MM_1}\cdot\overrightarrow{C_1M_1}=0; \end{cases}$ $\begin{cases} -\dfrac{a}{2}x+\dfrac{a\sqrt{3}}{2}y=0, \\ ax-\dfrac{b}{2}z=0, \\ \dfrac{a}{2}x+\dfrac{a\sqrt{3}}{2}y-\dfrac{b}{2}z=0, \\ x\left(x+\dfrac{a}{2}\right)+y^2+z(z-b)=0. \end{cases}$

После преобразований получаем $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$; $z=\dfrac{2a}{b}x$; $x=\dfrac{9ab^2}{8(b^2+3a^2)}$.

$|\overrightarrow{MM_1}|^2=x^2+y^2+z^2=\dfrac{27a^2b^2}{16(b^2+3a^2)}$; $|\overrightarrow{MM_1}|=\dfrac{3\sqrt{3}ab}{4\sqrt{b^2+3a^2}}$.

Способ 4. Может быть предложен ещё один способ, основанный на методе координат. Систему координат сохраним как при решении третьим способом.

Координаты точек, через которые проведено сечение:

$$A_1\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};b\right);\ C_1\left(-\frac{a}{2};0;b\right);\ O\left(\frac{a}{2};0;\frac{b}{2}\right).$$

Уравнение плоскости, проходящей через эти точки, задаётся при помощи уравнения с определителем $\begin{vmatrix} x-x_{A_1} & y-y_{A_1} & z-z_{A_1} \\ x_{C_1}-x_{A_1} & y_{C_1}-y_{A_1} & z_{C_1}-z_{A_1} \\ x_0-x_{A_1} & y_0-y_{A_1} & z_0-z_{A_1} \end{vmatrix}=0\cdot$

Раскрывая определитель по первой строке, получаем:

$$\begin{vmatrix} x & y+\frac{a\sqrt{3}}{2} & z-b \\ -\frac{a}{2} & \frac{a\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{a}{2} & \frac{a\sqrt{3}}{2} & -\frac{b}{2} \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} \frac{a\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{a\sqrt{3}}{2} & -\frac{b}{2} \end{vmatrix} - \left(y+\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\begin{vmatrix} -\frac{a}{2} & 0 \\ \frac{a}{2} & -\frac{b}{2} \end{vmatrix} +$$

$$+(z-b)\begin{vmatrix} -\frac{a}{2} & \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} =$$

$$=\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}ab\right)x+\left(-\frac{ab}{4}\right)y+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\right)z+\frac{3a^2\sqrt{3}}{8}.$$

Далее после преобразований уравнение плоскости приводится к каноническому виду

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (*)$$

Для нашей задачи имеем $2\sqrt{3}\,bx + 2by + 4\sqrt{3}\,az - 3\sqrt{3}\,ab = 0$.

Нормальное уравнение плоскости имеет вид

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \qquad (**)$$

где $\cos\alpha = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; $\cos\beta = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$;

$\cos\gamma = \dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; $p = \dfrac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Расстояние от точки $M(k_1;\ k_2;\ k_3)$ (у нас $M(0;\ 0;\ 0)$) до плоскости (**) равно

$$\delta = |k_1\cos\alpha + k_2\cos\beta + k_3\cos\gamma - p| = |-p| = \frac{3\sqrt{3}ab}{4\sqrt{b^2+3a^2}}. \qquad (***)$$

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{3}ab}{4\sqrt{b^2+3a^2}}$.

Примечание. Эта задача с другими подходами была ранее рассмотрена в разделе IV.

Задача 13. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, причём $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$. Точка M принадлежит диагонали A_1B грани ABB_1A_1. В каком отношении точка M делит диагональ A_1B, чтобы площадь треугольника AD_1M была наименьшей? Вычислить это наименьшее значение площади, если $a = 4$, $b = 3$, $c = 2$.

Решение. При решении задачи будем применять элементы векторной алгебры и метод координат.

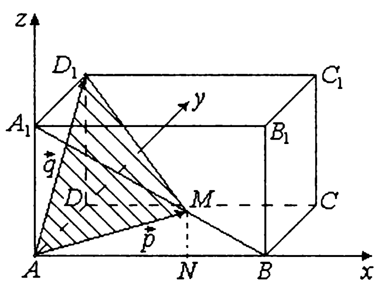


Рис. 6

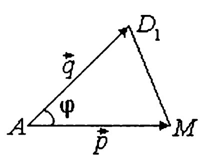


Рис. 7

Напомним, что площадь S треугольника (см. рис. 7), построенного на векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$, вычисляется по формуле $S = \dfrac{1}{2}\sqrt{\vec{p}^{\,2}\cdot\vec{q}^{\,2} - (\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$, где $\vec{p}^{\,2} = |\vec{p}|^2$, $\vec{q}^{\,2} = |\vec{q}|^2$, а $\vec{p}\cdot\vec{q}$ – скалярное произведение векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$. Следовательно, $4S = \vec{p}^{\,2}\cdot\vec{q}^{\,2} - (\vec{p}\cdot\vec{q})^2$.

Все скалярные произведения удобнее (мы уже не раз это делали) представлять в векторной форме. Введём систему координат, как это показано на рис. 6: начало координат поместим в точку A, ось x направим вдоль ребра AB, ось y – вдоль ребра AD, а ось z – вдоль ребра AA_1. Треугольник AD_1M построен на векторах $\vec{p} = \overrightarrow{AM}$ и $\vec{q} = \overrightarrow{AD_1}$. Обозначим $A_1M : A_1B = AN : AB = x$; $0 \le x \le 1$, где N – проекция точки M на AB. Тогда $AN = \alpha x$, $NM : AA_1 = AN : AB = (1 - x)$, следовательно, $NM = c(1 - x)$.

Итак, координаты векторов $\overrightarrow{AM}\{ax;0;c(1-x)\}$; $\overrightarrow{AD_1}\{0;b;c\}$. Задача сводится к минимизации функции $F(x) = 4S^2 = AM^2\cdot AD_1^{\,2} - (\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AD_1})^2$.

$AM^2 = (ax)^2 + c^2(1 - x)^2$; $AD_1^{\,2} = b^2 + c^2$;

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AD_1} = ax\cdot 0 + 0\cdot b + c(1 - x)c = c^2(1 - x)$, поэтому

$F(x) = (a^2x^2 + c^2(1 - x)^2)\cdot(b^2 + c^2) - c^2(1 - x) = (a^2b^2 + a^2c^2)x^2 + b^2c^2(1 - x)^2$.

Для нахождения минимального значения функции $F(x)$ найдём первую производную $F'(x) = 2(a^2b^2 + a^2c^2)x - 2b^2c^2(1 - x)$. Приравнивая эту производную нулю, находим $x = x_0 = \dfrac{b^2c^2}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$.

Следовательно, $A_1M : MB = x_0 : (1 - x_0) = b_2c_2 : (a_2b_2 + a_2c_2)$. Подставляя $a = 4$, $b = 3$, $c = 2$, получаем, что площадь треугольника AD_1M минимальна при $x_0 = \dfrac{36}{144+64+36} = \dfrac{9}{61}$,

т. е. когда $A_1M : MB = 36 : (144 + 36) = 9 : 52$.

Минимальное значение площади получаем подстановкой найденного значения x_0 в выражение для площади при $a = 4$, $b = 3$, $c = 2$:

$$S_{\min} = \frac{\sqrt{F(x_0)}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2(b^2+c^2)b^4c^4 + b^2c^2(a^2b^2+a^2c^2)^2}{(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}} =$$

$$= \frac{abc\sqrt{b^2+c^2}}{2\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}} = \frac{4\cdot3\cdot2\cdot\sqrt{9+4}}{2\sqrt{16\cdot9+16\cdot4+9\cdot4}} = \frac{6\sqrt{13}}{\sqrt{61}}.$$

Ответ: $\frac{6\sqrt{13}}{\sqrt{61}}$ (кв. ед.) при $A_1M : MB = 9 : 52$.

Упражнения.

1. В каком отношении делит объём куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскость, проходящая через вершину A, середину ребра C_1D_1 и центр грани BCC_1B_1?

2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным единице. Найти объём общей части двух треугольных пирамид ACB_1D_1 и A_1C_1BD.

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед. В каком отношении плоскость, проходящая через C_1D_1 и середину ребра A_1B_1, делит диагональ D_1B?

4. $SABCD$ – правильная четырёхугольная пирамида, все рёбра которой равны единице. Найти расстояние от середины ребра AB до плоскости, проходящей через точку C и середины рёбер SB и SD.

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через середину ребра C_1D_1 проведена прямая l, пресекающая прямые BA_1 и AD_1. Какой угол образует l с прямой BA_1.

6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, в котором $AB = 2$, $AD = AA_1 = 1$. Найти угол между диагональю BD_1 и плоскостью, проходящей через точки D, A_1 и C_1.

7. Дан тетраэдр $ABCD$ с ребром a. Найти радиус сферы, проходящей через точки C, D и середины рёбер AB и AC.

8. Точка M – середина ребра AD единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через середину B_1M перпендикулярно B_1M проводится плоскость α. Вычислить расстояние от центра куба до плоскости α.

9. В прямоугольном параллелепипеде с рёбрами $AB = 1$, $AD = 2$ и $AA_1 = 3$ через его диагональ BD_1 проведена секущая плоскость. Определить наибольшее расстояние от этой плоскости до вершины D и вычислить для этого случая площадь сечения.

10. Основание пирамиды – равносторонний треугольник, а одно из боковых рёбер перпендикулярно основанию. Высота наклонной боковой грани, проведённая из вершины пирамиды к стороне основания, равна h. Пирамида вписана в сферу единичного радиуса. Вычислить расстояние от центра сферы до наклонной боковой грани пирамиды. При каком значении h это расстояние будет наибольшим? Определить это наибольшее расстояние.

Ответы и комментарии.

1. 1:1.
2. 1:8.
3. 2:3.
4. $\dfrac{3\sqrt{10}}{20}$.
5. 1500.
6. $\arcsin\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.
7. При решении задачи начало координат требуется расположить в центре треугольника ABC, оси, расположенные в плоскости основания, направить одну – вдоль одной из высот, а вторую – вдоль средней линии треугольника основания.

Ответ: $\dfrac{a\sqrt{22}}{3}$.

8. $\dfrac{1}{12}$.
9. $3\sqrt{\dfrac{5}{14}}$; $2\sqrt{\dfrac{14}{5}}$ (кв. ед.).
10. $\rho=\dfrac{\sqrt{(4-h^2)(4h^2-9)}}{7h}$; $\rho_{\max}=\dfrac{1}{7}$ при $h=\sqrt{3}$.

XII. НЕСКОЛЬКО ЗАДАЧ ЕГЭ

Ранее авторами уже были рассмотрены многие задачи ЕГЭ; мы считаем, что делать из задач ЕГЭ «пугало» педагогически некорректно — давайте просто решать задачи по стереометрии.

Задача 1. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник с катетами $AB = 4$ и $BC = 6$. Высота призмы равна 10. Найдите объём пирамиды с вершинами в точке C_1 и серединах рёбер BC, BB_1 и A_1B_1.

Решение.

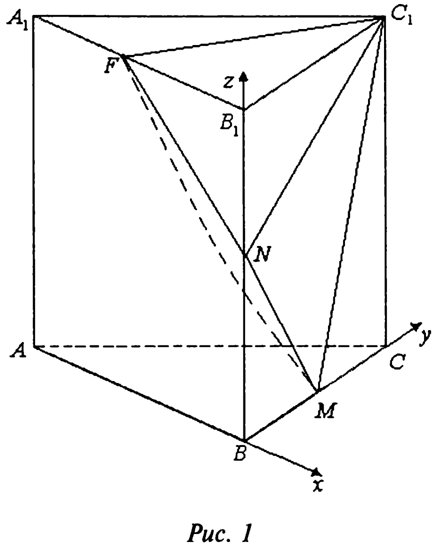


Рис. 1

Введём прямоугольную систему координат как показано на рис. 1, тогда координаты некоторых точек: $M(0;\ 3;\ 0)$; $N(0;\ 0;\ 5)$; $F(-2;\ 0;\ 10)$ и векторов $\overrightarrow{NF}\left\{-2;0;5\right\}$; $\overrightarrow{NM}\left\{0;3;-5\right\}$;

$\overrightarrow{NF}\cdot\overrightarrow{NM} = -25$; $\left|\overrightarrow{NF}\right| = \sqrt{29}$; $\left|\overrightarrow{NM}\right| = \sqrt{34}$.

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\left|\overrightarrow{NM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{NH}\right|\right)^2 - \left(\overrightarrow{NF}\cdot\overrightarrow{NM}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{361} = \frac{19}{2}.$$

Напишем теперь уравнение плоскости FNM, которое будем искать в виде $mx + ny + cz + d = 0$. Подставляя в это уравнение координаты точек M, N и F, получим $\begin{cases} 3n + d = 0, \\ 5c + d = 0, \\ -2m + 10c + d = 0; \end{cases}$

откуда $n = -\frac{d}{3}$; $c = -\frac{d}{5}$; $m = -\frac{d}{2}$. Уравнение плоскости

$-\frac{d}{2}x - \frac{d}{3}y - \frac{d}{5}z + d = 0$, откуда $15x + 10y + 6z - 30 = 0$.

Далее по формуле расстояния от точки до плоскости имеем высоту пирамиды $h = \frac{\left|60 + 60 - 30\right|}{\sqrt{225 + 100 + 36}} = \frac{90}{19}$. Искомый объём равен

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{19}{2}\cdot\frac{90}{19} = 15.$$

Ответ: 15 ед. объёма.

Примечание. С применением формулы на странице 128 для объёма треугольной пирамиды при умении вычислять определитель третьего порядка эта задача решается ещё проще.

Задача 2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ заданы $AD = 6$, $AB = 5$ и $AA_1 = 9$. Найти объём пирамиды EB_1C_1F, где E – точка на AA_1 и $AE = 6$, а F – точка на CD и $CF = 4$.

Решение. Примем за основание пирамиды треугольник EB_1C_1. Укажем координаты точек E, F, B_1, C_1, введя прямоугольную систему координат так, как показано на рис. 2: $E(6; 0; 6)$; $F(0; 1; 0)$; $B_1(6; 5; 9)$; $C_1(0; 5; 9)$; координаты векторов $\overrightarrow{EC_1}\left\{-6; 5; 3\right\}$ и $\overrightarrow{EB_1}\left\{0; 5; 3\right\}$.

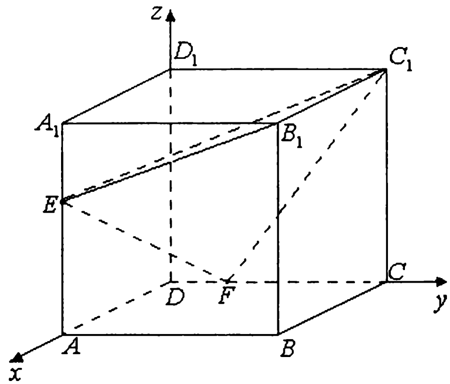


Рис. 2

Пусть $\angle C_1EB_1 = \varphi$, тогда $\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{EC_1}\cdot\overrightarrow{EB_1}}{\left|\overrightarrow{EC_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{EB_1}\right|} = \dfrac{25+9}{\sqrt{70}\cdot\sqrt{34}} = \sqrt{\dfrac{17}{35}}$,

$\sin\varphi = \sqrt{\dfrac{18}{35}}$. $S_{\triangle EC_1B_1} = \dfrac{1}{2}\ EC_1\cdot EB_1\sin\varphi = \dfrac{1}{2}\sqrt{70}\cdot\sqrt{34}\sqrt{\dfrac{18}{35}} = 3\sqrt{34}$.

Теперь найдём длину перпендикуляра, опущенного из точки F на плоскость EB_1C_1. Составим уравнение плоскости EB_1C_1, которое будем искать в виде $mx + ny + cz + d = 0$. Подставляя в это уравнение координаты точек E, B_1 и C_1, получим $\begin{cases} 6m + 6c + d = 0, \\ 6m + 5n + 9c + d = 0, \\ 5n + 9c + d = 0; \end{cases}$

откуда $n = \dfrac{d}{10}$; $c = -\dfrac{d}{6}$; $m = 0$. Уравнение плоскости

$\dfrac{d}{10}y - \dfrac{d}{6}z + d = 0$; $3y - 5z + 30 = 0$. Далее по формуле расстояния

от точки до плоскости находим $h = \dfrac{|3\cdot 1 - 5\cdot 0 + 30|}{\sqrt{34}} = \dfrac{33}{\sqrt{34}}$. Теперь

легко находится и объём: $V = \dfrac{1}{3}3\sqrt{34}\dfrac{33}{\sqrt{34}} = 33$. *Ответ:* 33 куб. ед.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При рассмотрении стереометрических задач авторы подробно рассмотрели применение векторов и метода координат. Только для сравнения ими были рассмотрены способы, основанные на дополнительных построениях, объёмах вспомогательных пирамид и призм. Такие способы решения достаточно часто встречаются в методических пособиях МГТУ, МГУ и других известных вузов (см., например, [3]). По мнению авторов, предложенные в книге способы являются наиболее универсальными и позволяют решать практически все типовые задачи на определение углов и расстояний между точками, прямыми, плоскостями в любом сочетании этих геометрических элементов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Выгодский, М. Я.* Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – М. : Астрель, 2006. – 991 с.
2. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы : учебное пособие / под ред. М. Ю. Сканави. – 4-е изд. – М. : Высшая школа, 1980. – 541 с., ил.
3. *Родионов, Д. Е.* Стереометрия в задачах : пособие для поступающих в вузы / Д. Е. Родионов, Е. М. Родионов. – М. : Ориентир, 2004. – 232 с.
4. *Андреева, Е. Г.* Математика : сборник задач для поступающих в вузы / Е. Г. Андреева. – М. : Ориентир, 2004. – 270 с.
5. *Шестаков, С. А.* Векторный метод в стереометрии // Математика для школьников / С. А. Шестаков. – М. : Школьная пресса. – № 3. – 2007. – С. 10–23; № 4 – 2007. – С. 13–25.

Севрюков Павел Федорович
Смоляков Александр Николаевич

ВЕКТОРЫ И КООРДИНАТЫ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ШКОЛЬНОГО КУРСА СТЕРЕОМЕТРИИ

Корректор *О. С. Варганова*
Техническое редактирование и компьютерная верстка *С. А. Мельник*

Подписано в печать 05.09.2008. Формат 60x84$^1/_{16}$. Гарнитура «Times».
Печать офсетная. Усл. печ. л. 9,5. Тираж 2000 экз. Заказ № 484.

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93-953000.

ИД № 03253 код 221 от 15.11.2000 г. Издательство «Илекса». Москва, Измайловское шоссе, 48а.

Издательская лицензия № 40515 от 14.01.1998 г. ООО «НИИ Школьных технологий»,
Москва, ул. Люблинская, 157/2.

Издательская лицензия ЛР № 065840 от 23.04.1998 г. Издательство «Сервисшкола»,
355042, г. Ставрополь, ул. 50 лет ВЛКСМ, 38.

Отпечатано в типографии издательско-полиграфического комплекса СтГАУ «АГРУС»,
г. Ставрополь, ул. Мира, 302.
Тел./факс (8652) 35-06-94. E-mail: agrus@stgau.ru; agrus2007@mail.ru; http://agrus.stgau.ru.

Индекс 81352

В данном пособии изложены методы решения стереометрических задач, основанные на применении векторов и метода координат. Такие задачи включены в варианты вступительных экзаменов в различные вузы, Единого государственного экзамена по математике, учебники для профильной школы и классов с углубленным изучением математики.

Предложены более ста тренировочных упражнений с ответами и комментариями; наиболее трудные упражнения сопровождаются вариантами решений.

Предназначено для учащихся 10–11 классов общеобразовательных и профильных школ, абитуриентов, учителей математики.

ISBN978-5-93078-592-0

9 785930 785920

П. Ф. Севрюков, А. Н. Смоляков

ВЕКТОРЫ И КООРДИНАТЫ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ШКОЛЬНОГО КУРСА СТЕРЕОМЕТРИИ