Т. А. Колесникова

МАТЕМАТИКА

Решение задач на ЕГЭ

- Алгоритмы решения задач профильного уровня
- Более 200 задач с подробными решениями
- Задачи для самостоятельного решения с пояснениями к ответам
- Теоретический материал, необходимый для решения задач

Т. А. Колесникова

МАТЕМАТИКА

Решение задач на ЕГЭ

Москва
2020

УДК 373.5:51
ББК 22.1я721
К60

Колесникова, Татьяна Александровна.

К60 Математика : решение задач на ЕГЭ / Т. А. Колесникова. — Москва : Эксмо, 2020. — 224 с. — (Сборники задач для подготовки к ЕГЭ).

ISBN 978-5-04-107716-7

В книге приводятся теоретические сведения, необходимые для решения задач на ЕГЭ по математике профильного уровня, примеры текстовых и геометрических задач с подробными решениями и ответами, а также задания для самостоятельного выполнения.

Пособие окажет неоценимую помощь учащимся при подготовке к экзамену, а также может быть использовано учителями при организации учебного процесса.

УДК 373.5:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-04-107716-7

Содержание

Введение

В данном пособии представлен блок единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике профильного уровня, развивающий такой важный навык, как решение задач. Теория и примеры задач с подробным объяснением связаны непосредственно с тем минимумом знаний и навыков, которые понадобятся для успешного выполнения заданий ЕГЭ 1, 4, 10, 11, 17, 19 (решение текстовых задач математического и прикладного характера), 3, 6, 8, 14, 16 (решение геометрических задач).

Книга состоит из двух разделов — «Текстовые задачи» и «Геометрические задачи», каждый из которых включает четыре блока: «Что нужно знать» (теоретический блок, который поможет актуализировать и систематизировать знания, необходимые для решения задач), «Как решать задачи» (что необходимо помнить, на что обращать внимание при решении, подробный разбор примеров задач, которые могут встретиться на экзамене по математике), «Задачи для самостоятельного решения» и «Ответы». Большое внимание уделено решению практических задач и задач с экономическим содержанием.

Задания единого государственного экзамена по математике проверяют знания и умения выпускников, сформированные при изучении следующих разделов курса: «Алгебра», «Уравнения и неравенства», «Функции», «Начала математического анализа», «Геометрия», «Элементы комбинаторики и теории вероятностей».

Вариант контрольных измерительных материалов (КИМ) экзаменационной работы содержит 19 заданий и состоит из двух частей: часть 1 содержит 8 заданий с кратким ответом базового уровня сложности, часть 2 — 4 задания с кратким ответом повышенного уровня сложности и 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности. Задания 1—12 предполагают решение текстовых, стереометрических, планиметрических задач, задач с применением теории вероятностей и производной, решение уравнений и неравенств, исследование функций, проведение алгебраических вычислений и преобразований. Для успешного выполнения заданий с развёрнутым ответом требуются не только хорошие математические знания, но и применение творческого подхода к решению, а также умение эффективно использовать полученные навыки в качестве профессионального инструмента.

Ответ на задания 1—12 даётся записью в виде целого числа или конечной десятичной дроби по приведённому ниже образцу в поле ответа в тексте работы, а затем переносится в бланк ответов № 1. Каждую цифру, знак «минус» и запятую в бланке ответов следует писать в отдельную клетку. Единицы измерений (в том числе проценты и градусы) писать не нужно.

КИМ — БЛАНК

Ответ: –0,95.

11	–	0	,	9	5											

При выполнении заданий 13—19 решение даётся в развёрнутой форме. В бланке ответов № 2 необходимо указать номер задания и записать полное изложение решения с ответом, составленное в соответствии с требованиями. Бланк ответов № 2 односторонний; ответ, записанный на оборотной стороне бланка, не будет оцениваться.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком, который выдаётся комиссией и представляет собой лист формата А4 со штампом учреждения образования. После окончания экзамена черновик сдаётся, но записи в черновике, а также в тексте КИМ не учитываются при оценивании работы. Поэтому обязательно надо перенести ответы в бланки. На черновике желательно записывать пояснение так, как оно будет выглядеть в бланке ответа, чтобы при переписывании не тратить время на формулирование и выстраивание порядка ответа.

Для подготовки к экзамену школьнику следует:

- ознакомиться с кодификатором, спецификацией и демонстрационным вариантом контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена по математике;
- уделить особое внимание решению практических задач, ориентированных на применение математических знаний в повседневности; отдельно позаниматься с заданиями, требующими применения теории вероятностей;
- потренироваться осуществлять значительные алгебраические преобразования, строить и исследовать математические модели, проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений — эти навыки понадобятся для выполнения заданий высокого уровня сложности.

Желаем успехов на ЕГЭ!

Что нужно знать

В данной главе представлен основной теоретический материал, который необходим для решения текстовых задач как математического, так и прикладного характера. Числа под заглавием каждого блока соответствуют номерам заданий ЕГЭ, в которых может применяться данный теоретический материал.

Единицы измерения величин

1

При решении текстовых задач часто приходится переводить одни единицы измерения величин в другие.

Меры длины

1 км = 1000 м	1 м = 10 дм	1 дм = 10 см
1 см = 10 мм	1 мм = 0,1 см	1 см = 0,1 дм
1 дм = 0,1 м	1 м = 0,001 км	1 см = 0,01 м

Меры массы

1 т = 1000 кг	1 кг = 1000 г	1 ц = 100 кг
1 г = 1000 мг	1 мг = 0,001 г	1 г = 0,001 кг
1 кг = 0,01 ц	1 кг = 0,001 т	1 т = 10 ц

Меры площади

1 м^2 = 10 000 см^2	1 а = 100 м^2	1 м^2 = 0,01 а
1 м^2 = 100 дм^2	1 га = 100 а	1 а = 0,01 га
1 см^2 = 0,0001 м^2	1 га = 10 000 м^2	1 м^2 = 0,0001 га
1 дм^2 = 0,01 м^2	1 км^2 = 100 га	1 га = 0,01 км^2

Меры объёма

1 м^3 = 1000 дм^3	1 л = 1 дм^3	1 дм^3 = 1000 см^3

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

В некоторых задачах необходим перевод нестандартных единиц измерения, например мили в километры. Перевод таких единиц даётся в условии задачи, поэтому заучивать данную информацию необязательно.

Округление с недостатком и избытком

1

В повседневной жизни количество обычно определяется натуральным числом: количество карандашей, этажей в доме, учащихся в классе и т. п. В задачах на округление с избытком и недостатком ответы выражаются также целыми числами, так как количество предметов не может выражаться дробным и отрицательным числом. Если при решении некоторых текстовых задач ответ получается в виде дробного числа, то в зависимости от условия задачи ответ необходимо округлить до целого.

Если в задаче идёт речь о штучных единицах (карандаши, тетради, тарелки, люди и т. д.), то округление производят **с недостатком**, то есть ответ надо округлить до ближайшего **наименьшего целого**, отбросив дробную часть.

Если в задаче идёт речь о предметах, которые включают другие предметы или элементы (автобус с пассажирами, этажи дома, упаковки с чем-либо и т. п.), то округлять нужно **с избытком** до ближайшего **наибольшего целого**. Следует отбросить дробную часть результата, а к целой части прибавить единицу.

Проценты

1, 11, 17

Процент — это сотая часть числа.

Чтобы **выразить проценты дробью или натуральным числом**, надо число процентов разделить на 100.

Чтобы **выразить целое число или дробь в процентах**, надо их умножить на 100 и к полученному результату приписать знак процента (%).

Чтобы **найти процент от данного числа**, нужно данное число умножить на дробь, выражающую указанный процент.

Чтобы **найти число по его проценту**, нужно данное число разделить на дробь, выражающую указанный процент.

При решении задач полезно использовать следующие соотношения:

- если величина B равна $x\,\%$ от A, то $B = \frac{x}{100} \cdot A$;
- если величина C увеличилась на $x\,\%$, то она стала равняться $\left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot C$;
- если величина C уменьшилась на $x\,\%$, то она стала равняться $\left(1 - \frac{x}{100}\right) \cdot C$.

ПОМНИТЕ!

За 100 % принимается та величина, с которой мы сравниваем.

При решении задач на проценты можно использовать пропорцию.

Пропорция — это равенство двух отношений, то есть вида

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ или } a : b = c : d,$$

где a, d — крайние члены пропорции, b, c — средние члены пропорции.

Основное свойство пропорции: произведение крайних членов пропорции равно произведению средних членов, то есть $a \cdot d = b \cdot c$.

Неизвестный член пропорции можно найти, пользуясь основным свойством: $a = \frac{b \cdot c}{d}$.

Начала теории вероятностей

4

Вероятностью события называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных исходов:

$$P(A) = \frac{n}{m},$$

где n — число элементарных событий, благоприятствующих событию A, m — общее число всех элементарных событий.

Благоприятствующих событий не может быть больше, чем всех возможных, а значит, числитель дроби никогда не превысит знаменатель. В ответе должно быть число, удовлетворяющее условию $0 \le P(A) \le 1$. Если у вас получилось отрицательное число или число больше 1, то задача решена неверно.

Элементарные события попарно несовместны и равновозможны.

Два события называются **несовместными**, если одно из них исключает другое в одном и том же испытании, например, один учащийся не может одновременно учиться в двух классах.

События называются **равновозможными**, если одно из них не является более возможным, чем другое.

Два события называются **противоположными**, если в данном испытании они несовместны и одно из них обязательно происходит. Вероятности противоположных событий в сумме дают 1.

Если события A и B независимы, то вероятность одновременного наступления обоих событий равна произведению их вероятностей: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Если события A и B зависимы, то вероятность произведения двух событий равна $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$ при условии, что первое событие произошло.

Если события A и B несовместные, то вероятность того, что наступит хотя бы одно из двух событий, равна сумме их вероятностей: $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Если события A и B совместные, то вероятность их суммы равна $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

Чтобы определить, какую формулу употребить при решении задач, воспользуйтесь следующим правилом: сложение вероятностей применяется там, где перед описанием события в тексте задачи можно вставить союз «или», умножение вероятностей используется, если перед описанием события в тексте задачи можно вставить союз «и».

Смеси, сплавы

11

При решении задач на смешивание удобно пользоваться формулой $m_1c_1 + m_2c_2 = (m_1 + m_2)c_3$, где m_1, m_2 — массы смешиваемых растворов (сплавов), c_1, c_2, c_3 — концентрации растворов (сплавов) до и после смешивания.

Пусть смесь (сплав) массой M содержит некоторое вещество массой m. Тогда концентрация данного вещества в смеси (сплаве) вычисляется по формуле $c=\frac{m}{M}$, а процентное содержание данного вещества: $p=\frac{m}{M}\cdot 100\,\%$.

Движение по прямой, по окружности, по воде

11

Основными величинами задач на движение являются пройденный путь S, скорость v и время t. Зависимость между ними при равномерном движении выражается формулой $S=vt$, откуда $v=\frac{S}{t}$; $t=\frac{S}{v}$. Если тела движутся навстречу друг другу, их скорости складываются, если в разные стороны — вычитаются.

При наличии нескольких участков пути средняя скорость вычисляется по формуле $v=\frac{S_1+S_2+\ldots}{t_1+t_2+\ldots}$.

Скорость перемещения в движущейся воде выражается следующими формулами:

$$v_{\text{по течению}}=v_{\text{собственная}}+v_{\text{течения}};$$

$$v_{\text{против течения}}=v_{\text{собственная}}-v_{\text{течения}};$$

$$v_{\text{собственная}}=(v_{\text{по течению}}+v_{\text{против течения}}):2.$$

При решении задач на движение по воде следует учесть, что скорость движения катера (лодки, корабля) в стоячей воде (например, по озеру) равна собственной скорости движения.

Текстовые задачи на движение, как правило, решаются с помощью составления дробно-рационального уравнения или системы уравнений.

Дробные уравнения и способы их решения

Дробными (дробно-рациональными) называют уравнения, в которых присутствуют дроби, содержащие в знаменателе переменную.

Например: $\dfrac{2x-1}{4x+1}=3$ и $1+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{2x}{x+1}$.

При решении дробных уравнений необходимо помнить про ОДЗ уравнения и исключить посторонние корни, при которых знаменатель исходного уравнения обращается в нуль.

Для решения дробных уравнений применяют способы **введения новой переменной** и **избавления от дробей**.

Чтобы избавиться от дробей, необходимо умножить обе части уравнения на наименьший общий знаменатель; решить получившееся целое уравнение; избавиться от посторонних корней.

Основные приёмы решения систем уравнений

Метод подстановки

При решении методом подстановки необходимо:

1) выразить из какого-нибудь уравнения системы одну переменную через другую; подставить во второе уравнение системы вместо этой переменной полученное выражение;

2) решить уравнение с одной переменной;

3) найти значение второй переменной, подставив в первое уравнение значение найденной переменной.

Метод сложения

При решении методом сложения требуется:

1) умножить почленно уравнение системы, подбирая множители так, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали противоположными;

2) сложить почленно левые и правые части уравнений системы;

3) решить получившееся уравнение с одной переменной;

4) найти соответствующее значение второй переменной.

Введение новых переменных

Суть данного метода состоит в том, что находят некоторые повторяющиеся выражения, которые **обозначают новыми переменными**. Новая система имеет более упрощённый вид, и её решение сводится либо к методу подстановки, либо к методу алгебраического сложения.

При решении некоторых систем уравнений иногда достаточно ввести только одну новую переменную в одном из уравнений.

Совместная работа

11

Задачи на совместную работу решаются с помощью составления уравнения или системы уравнений.

При решении задач на работу рекомендуется придерживаться следующих правил:

- выполненная работа равна производительности труда, умноженной на время;
- если выполненная работа неизвестна, то её принимают равной 1, тогда производительность труда равна $\frac{1}{t}$, где t — затраченное время;
- если трудятся несколько рабочих, их производительность складывается.

Прогрессия

11

Арифметической прогрессией называется последовательность чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с постоянным для данной последовательности числом, называемым **разностью прогрессии**. Разность прогрессии обозначается буквой d.

$$a_{n+1} = a_n + d$$

Формула n-го члена: $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Сумма первых n членов арифметической прогрессии вычисляется по формулам:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n; \quad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}n.$$

Геометрической прогрессией называется последовательность чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на отличное от нуля, постоянное для данной последовательности число, называемое **знаменателем прогрессии**. Знаменатель прогрессии обозначается буквой q.

$$b_{n+1} = b_n \cdot q$$

Формула n-го члена: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Сумма первых n членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}, \quad q \neq 1; \qquad S_n = nb_1, \quad q = 1.$$

Исследование на наибольшее и наименьшее значение функции с помощью производной

17

Производные некоторых функций

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}; \qquad \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \qquad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}; \quad (x)' = 1;$$

$(c)' = 0$, c — постоянная;

$$(a^x)' = a^x \ln a; \quad (e^x)' = e^x; \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}; \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$$

$$(\cos x)' = -\sin x; \qquad (\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\sin x)' = \cos x; \qquad (\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Правила дифференцирования

$$(u+v)' = u' + v'; \quad (u+v+w+\ldots)' = u' + v' + w' + \ldots;$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v';$$

$$(u \cdot v \cdot w \cdot \ldots)' = u' \cdot v \cdot w \cdot \ldots + u \cdot v' \cdot w \cdot \ldots + u \cdot v \cdot w' \cdot \ldots + \ldots;$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$

$(cx)' = cx'$, c — постоянная

План исследования функции на наибольшее и наименьшее значение на отрезке [a; b]

1) Найти производную функции.

2) Решить уравнение $f'(x) = 0$.

3) Найти значения функции в тех точках интервала [a; b], в которых производная обращается в нуль.

4) Найти значения функции на концах отрезка, то есть найти $f(a)$ и $f(b)$.

5) Выбрать из найденных значений наибольшее и наименьшее.

Числа и их свойства

19

Числовые множества

Натуральные числа — числа, возникающие естественным образом при счёте: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10...

Число 0 не является натуральным.

Множество целых чисел состоит из натуральных чисел, а также противоположных им и числа 0: ..., –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4...

Множество натуральных чисел является подмножеством множества целых чисел.

Простые и составные числа

Натуральное число называют **простым**, если оно имеет только два натуральных делителя: единицу и само это число.

Натуральное число называется **составным**, если у него больше двух натуральных делителей.

Число 1 имеет только один делитель, поэтому его не относят ни к простым, ни к составным числам.

Признаки делимости

Признак делимости на 2. Число делится на 2, если его последняя цифра 0, 2, 4, 6 или 8.

Признак делимости на 4. Число делится на 4, если две последние его цифры — нули или образуют число, делящееся на 4.

Признак делимости на 8. Число делится на 8, если три последние его цифры — нули или образуют число, делящееся на 8.

Признаки делимости на 3 и на 9. На 3 делятся только те числа, у которых сумма цифр делится на 3; на 9 делятся только те числа, у которых сумма цифр делится на 9.

Признак делимости на 5. На 5 делятся числа, последняя цифра которых — 0 или 5.

Признак делимости на 25. На 25 делятся числа, две последние цифры которых — нули или образуют число, делящееся на 25 (то есть числа, оканчивающиеся на 00, 25, 50 или 75).

Признаки делимости на 10, 100 и 1000. На 10 делятся только те числа, последняя цифра которых — нуль, на 100 — только те числа, у которых две последние цифры — нули, на 1000 — только те числа, у которых три последние цифры — нули.

Признак делимости на 11. На 11 делятся только те числа, у которых сумма цифр, занимающих нечётные места, либо равна сумме цифр, занимающих чётные места, либо отличается от неё на число, делящееся на 11.

Чётность

Целое число называется чётным, если оно делится на 2. Целое число называется **нечётным**, если оно не делится на 2.

Чётное число имеет вид $a = 2k$, где k — целое. Например: $0; \pm2; \pm4; \pm6...$

Нечётное число имеет вид $a = 2k + 1$, где k — целое. Например: $\pm1; \pm3; \pm5...$

При выполнении задания 19 можно использовать следующие **утверждения без доказательства**.

- Сумма любого числа чётных слагаемых чётна.
- Сумма чётного числа нечётных слагаемых чётна. Сумма нечётного числа нечётных слагаемых нечётна.
- Пусть имеется произведение нескольких множителей. Если все множители нечётны, то произведение нечётно. Если хотя бы один множитель чётный, то произведение чётно.

Как решать задачи

В данной главе рассмотрены примеры заданий 1, 4, 10, 11 (с кратким вариантом ответа) и 17, 19 (с развёрнутым вариантом ответа) различного уровня сложности, представлены алгоритмы их выполнения, разобраны основные типы задач в пределах каждого задания, приведены подробные решения.

Задание 1

Описание: задание рассчитано на умение решать простейшие текстовые задачи на вычисление, округление чисел с избытком и недостатком, проценты. С такими задачами часто приходится встречаться в повседневной жизни, совершая покупки в магазине, планируя семейный бюджет и т. п.

Оценивание: максимально 1 балл.

Оформление ответа: в экзаменационный бланк № 1 следует записать целое число или конечную десятичную дробь.

План выполнения

1. Внимательно прочитайте условие задачи.
2. Выясните, что дано в условии и что необходимо найти.
3. Выполните на черновике необходимые вычисления.
4. Запишите полученное число в поле ответа КИМ и бланк ответов № 1.

Задачи на вычисление

Пример 1

С 1 января на весь 2019 год установлен тариф на электроэнергию, который составляет 5 рублей 20 копеек за 1 кВт·ч. Владимир Петрович снимает показания счётчика: 1 октября —

32 026 кВт·ч, 1 ноября — 32 171 кВт·ч. Сколько рублей Владимир Петрович заплатит за электроэнергию за октябрь?

■ Решение

Вычислим расход электроэнергии за октябрь: $32\,171 - 32\,026 = 145$ (кВт · ч).

Вычислим, сколько нужно заплатить за октябрь, учитывая, что 5 руб. 20 коп. = 5,2 руб.: $5{,}2 \cdot 145 = 754$ (руб.).

Ответ: 754.

Пример 2

На заправке «Метеор» 1 л бензина АИ-95 стоит 46 рублей 50 копеек. Водитель Михаил заправил бак вместимостью 20 л и купил плитку шоколада за 125 рублей. Сколько рублей сдачи он получит с 1500 рублей?

■ Решение

Рассчитаем стоимость всей покупки: $46{,}5 \cdot 20 + 125 = 1055$ (руб.).

Тогда водитель получит сдачу $1500 - 1055 = 445$ (руб.).

Ответ: 445.

Пример 3

Сергей Николаевич получил в подарок автомобиль марки *Dodge*. На спидометре скорость измеряется в милях в час. Выразите скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 58 миль/ч? Учитывайте, что 1 миля равна 1609 м. Ответ округлите до целого числа.

■ Решение

Если спидометр показывает скорость 58 миль/ч, значит, в километрах получим: $58 \cdot 1{,}609 = 93{,}322$ км/ч ≈ 93 км/ч.

Ответ: 93.

Округление с недостатком и с избытком

Пример 4

В марте хозяева квартиры установили счётчики холодной и горячей воды, заплатив 2450 рублей. После установки счётчиков ежемесячная оплата стала составлять 500 рублей. Ранее платили по 1100 рублей ежемесячно. Считая, что тарифы на воду не изменятся, определите, через сколько месяцев счётчики окупятся (то есть экономия впервые превысит затраты на установку).

■ **Решение**

Вычислим ежемесячную экономию: $1100 - 500 = 600$ (руб.).

Значит, счётчики окупятся через $2450 : 600 = 4\frac{1}{12}$ месяца, или за 5 полных месяцев.

Ответ: 5.

Пример 5

Олег собирается на встречу выпускников и хочет подарить букет первой учительнице. Олег знает, что букет должен состоять из нечётного количества цветов. Розы стоят 75 рублей за штуку. Из какого наибольшего числа роз Олег может купить букет, если у него имеется 500 рублей?

■ **Решение**

Узнаем, сколько роз по 75 руб. можно купить на 500 руб.: $500 : 75 = 6\frac{2}{3}$.

Получается 6 штук, но, поскольку букет должен состоять из нечётного количества цветов, купить нужно 5 роз.

Ответ: 5.

Проценты и округление

Пример 6

Магазин-склад «Уют» продаёт мебель в разобранном виде. Предоставляется услуга по сборке мебели на дому, которая составляет 10 % от стоимости купленной мебели. Павел покупает стеллаж за 4300 рублей. Сколько рублей Павел заплатит за стеллаж вместе со сборкой?

■ **Решение**

Вычислим стоимость сборки: $4300 \cdot 0{,}1 = 430$ (руб.).

Тогда стеллаж вместе со сборкой будет стоить $4300 + 430 = 4730$ (руб.).

Ответ: 4730.

Пример 7

В результате подорожания цена на блендер повысилась на 23 % и составила 2337 рублей. Сколько рублей стоил блендер до подорожания?

■ **Решение**

После повышения цена блендера составляет $100\,\% + 23\,\% = 123\,\%$.

Составим пропорцию:

2337 руб. — 123 %

x руб. — 100 %

$$x = \frac{2337 \cdot 100\,\%}{123\,\%} = 1900 \text{ (руб.)}.$$

Ответ: 1900.

Пример 8

Упаковка чая стоит 140 рублей. Во время распродажи скидка на весь ассортимент составляет 35 %. Какое наибольшее количество упаковок чая можно купить во время распродажи на 900 рублей?

■ **Решение**

Во время распродажи упаковка чая стоит $100\,\% - 35\,\% = 65\,\%$.

Вычислим цену с учётом скидки: $140 \cdot 0{,}65 = 91$ (руб.).

$900 : 91 = 9\frac{81}{91}$, значит, на 900 рублей максимально можно купить 9 упаковок чая.

Ответ: 9.

Задание 4

Описание: задание проверяет умение использовать элементы теории вероятностей при решении прикладных задач. Для его выполнения понадобится производить действия с дробями и совершать простые вычисления. Задание представляет собой текстовую задачу, которая решается с помощью базовых арифметических операций. В ряде задач ответ требуется округлить.

Оценивание: максимально 1 балл.

Оформление ответа: в экзаменационный бланк № 1 следует записать целое число или конечную десятичную дробь.

План выполнения

1. Внимательно прочитайте задачу.

2. Выявите число всех элементарных событий и число благоприятствующих событий, не пропустив ни одного из всех возможных исходов и не включая ни одного лишнего.

3. При решении задачи на классическое определение вероятности установите, зависимы (совместны) или независимы (несовместны) элементарные события.

4. Выполните на черновике необходимые вычисления.

5. Запишите полученное число в поле ответа КИМ и бланк ответов № 1.

ПРИМЕЧАНИЕ

Для решения большинства задач данного типа достаточно повторить классическое определение вероятности события, понятие зависимых (совместных) и независимых (несовместных) событий, теоремы произведения и суммы вероятностей событий.

Классическое определение вероятности

Пример 1

В чемпионате по гимнастике участвуют 23 спортсмена из Венгрии, 19 — из Румынии, 18 — из Албании. Порядок выступления определяется жеребьёвкой. Вычислите вероятность того, что албанский спортсмен будет выступать вторым.

■ **Решение**

Найдём общее количество участников: $23+19+18=60$ (спортсменов).

Тогда искомая вероятность равна $p=\frac{m}{n}=\frac{18}{60}=0{,}3.$

Ответ: 0,3.

Пример 2

Соревнование по художественной гимнастике проводится с 1 по 9 августа. Каждую страну на соревновании представляет один спортсмен. Планируется всего 70 выступлений. Гимнаст из России — один из участников соревнования. 1 августа будут выступать 14 гимнастов, с 2 по 9 августа будут выступать остальные гимнасты, их выступления распределены поровну. Жеребьёвкой определён порядок выступлений. Вычислите вероятность того, что гимнаст из России выступит 8 августа.

■ **Решение**

Вычислим количество ежедневных выступлений в период с 2 по 9 августа (всего 8 дней): $\frac{70-14}{8}=7$ (выступлений).

Поэтому вероятность того, что гимнаст из России будет выступать 8 августа, равна $p=\frac{7}{70}=0{,}1.$

Ответ: 0,1.

Пример 3

Никита бросает один игральный кубик 2 раза. Определите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Дайте ответ с точностью до сотых.

■ **Решение**

В сумме 7 очков может выпасть в следующих случаях: $1+6$, $6+1$, $2+5$, $5+2$, $3+4$, $4+3$, то есть $m=6$ (благоприятные исходы).

При каждом подбрасывании кубика может выпасть одно из шести чисел, значит, $n=6\cdot 6=36.$

Тогда искомая вероятность равна

$$p=\frac{m}{n}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}=0{,}166\ldots\approx 0{,}17.$$

Ответ: 0,17.

Пример 4

При производстве в среднем на каждую 1881 качественную деталь приходится 19 бракованных. Найдите вероятность того, что случайно выбранная деталь окажется бракованной.

■ **Решение**

Количество благоприятных исходов равно количеству бракованных деталей, то есть $m=19$.

Общее количество деталей: $n=1881+19=1900$.

Таким образом, искомая вероятность равна $p=\frac{m}{n}=\frac{19}{1900}=0{,}01$.

Ответ: 0,01.

Пример 5

Найдите вероятность того, что наудачу выбранное натуральное число от 58 до 82 делится на 7.

■ **Решение**

На отрезке от 58 до 82 находится 25 натуральных чисел, из них на 7 делятся три числа: 63, 70, 77.

Следовательно, искомая вероятность равна $p=\frac{3}{25}=0{,}12$.

Ответ: 0,12.

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

Чтобы найти количество натуральных чисел от a до b, можно воспользоваться формулой $b-a+1$.

Пример 6

За круглым столом 9 мест. 7 девочек и 2 мальчика рассаживаются в случайном порядке. Найдите вероятность того, что 2 мальчика будут сидеть рядом.

■ **Решение**

Зафиксируем место для одного из мальчиков. Справа и слева от него есть место, на каждое из которых может сесть любой из 8 оставшихся детей ($n=8$).

Чтобы второй мальчик сидел рядом с первым, он должен сесть на одно из двух мест. Таким образом, количество благоприятных исходов $m=2$.

Значит, искомая вероятность равна $p=\frac{m}{n}=\frac{2}{8}=0,25$.

Ответ: 0,25.

Теоремы о вероятностях событий

Пример 7

Вероятность, что Сергей попадёт в мишень при одном выстреле, равна 0,7. Сергей стреляет 3 раза. Найдите вероятность того, что первые 2 раза Сергей поразил мишень и промахнулся третий раз. Ответ округлите до сотых.

■ **Решение**

По условию задачи вероятность попадания равна $p_1=0,7$.

Тогда вероятность промаха равна $q_1=1-0,7=0,3$.

События «попасть» или «промахнуться» при каждом выстреле независимы, вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей. Тем самым вероятность события «попал, попал, промахнулся» равна $0,7\cdot 0,7\cdot 0,3=0,147\approx 0,15$.

Ответ: 0,15.

Пример 8

Вероятность того, что новая лампочка прослужит больше месяца, равна 0,91. Вероятность того, что она прослужит больше двух месяцев, равна 0,85. Найдите вероятность того, что она прослужит меньше двух месяцев, но больше одного.

■ **Решение**

Введём обозначения событий:

A — лампочка прослужит больше одного месяца, но меньше двух месяцев;

B — лампочка прослужит больше двух месяцев;

C — лампочка прослужит ровно два месяца.

Тогда $A + B + C$ — лампочка прослужит больше месяца.

Вероятность события C, состоящего в том, что лампочка выйдет из строя ровно через два месяца, равна нулю. События A, B и C несовместные, поэтому

$$p(A+B+C)=p(A)+p(B)+p(C)=p(A)+p(B),$$

откуда, используя данные из условия, получаем:

$$0{,}91=p(A)+0{,}85.$$

Найдём требуемую вероятность:

$$p(A)=0{,}91-0{,}85=0{,}06.$$

Ответ: 0,06.

Пример 9

Гостиная освещается люстрой с двумя лампами. В течение одного месяца каждая лампа может перегореть с вероятностью 0,09. Найдите вероятность того, что в течение месяца хотя бы одна лампа не перегорит.

■ **Решение**

Вычислим вероятность противоположного события, то есть того, что перегорят обе лампы. В силу независимости событий получим: $0{,}09\cdot 0{,}09=0{,}0081$.

Следовательно, искомая вероятность равна $1-0{,}0081=0{,}9919$.

Ответ: 0,9919.

Пример 10

Детали производятся двумя автоматами. Вероятность изготовления стандартной детали первым автоматом равна 0,8, вторым — 0,9. Первый автомат производит 60 % всех деталей, второй — 40 %. Найдите вероятность того, что наудачу выбранная деталь окажется стандартной.

■ **Решение**

Пусть событие A — деталь признана стандартной.

Введём систему гипотез:

H_1 — деталь была произведена на первом автомате;

H_2 — деталь была произведена на втором автомате.

Согласно условию задачи имеем: $p(H_1)=0{,}6$, $p(H_2)=0{,}4$.

Условные вероятности равны $p(A|H_1)=0{,}8$, $p(A|H_2)=0{,}9$.

По формуле классической вероятности получим:

$p(A)=p(A|H_1)\cdot p(H_1)+p(A|H_2)\cdot p(H_2)=0{,}8\cdot 0{,}6+0{,}9\cdot 0{,}4=0{,}84.$

Ответ: 0,84.

Задание 10

Описание: задание 10 обычно тесно связано с физикой, но для его выполнения не требуется глубоких знаний данного предмета. Задача сводится к нахождению значения числового выражения либо решению линейного, рационального, иррационального, степенного, показательного, логарифмического, тригонометрического уравнения или неравенства.

Оценивание: максимально 1 балл.

Оформление ответа: в экзаменационный бланк № 1 следует записать целое число или конечную десятичную дробь.

План выполнения

1. Внимательно прочитайте условие задачи.

2. Подставьте в данную формулу известные величины. Определите критерии выполнения условия.

3. Составьте числовое выражение, уравнение или неравенство. Решите его на черновике.

4. Запишите полученное число в поле ответа КИМ и бланк ответов № 1.

ПРИМЕЧАНИЕ

При подготовке к заданию необходимо повторить алгоритмы решения уравнений и неравенств различных видов.

Задачи, приводящие к вычислению значения числового выражения

Пример 1

Весной во время активного таяния снега уровень воды в колодце повышается. Максим измеряет время t падения маленьких камней в колодец и вычисляет расстояние до воды по формуле $h = 4t^2$, где h — расстояние в метрах, t — время падения в секундах. До таяния снега камни падали за 0,95 с. На сколько метров должен подняться уровень воды после таяния снега, чтобы измеряемое время уменьшилось на 0,15 с?

■ **Решение**

Введём обозначения:

h_1 — расстояние до воды до таяния снега;

h_2 — расстояние до воды после таяния снега.

Найдём время падения камня в колодец после таяния снега: $t = 0{,}95 - 0{,}15 = 0{,}8$ с.

Уровень воды поднимется на $h_1 - h_2 = 4 \cdot 0{,}95^2 - 4 \cdot 0{,}8^2 =$

$= 4 \cdot (0{,}9025 - 0{,}64) = 4 \cdot 0{,}2625 = 1{,}05.$

Ответ: 1,05.

Пример 2

На пружине закреплён болт массой 0,06 кг. Скорость колебания болта v меняется по закону $v = v_0 \sin\frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T = 24$ с — период колебаний, $v_0 = 0{,}8$ м/с. Кинетическая энергия E болта (в джоулях) рассчитывается по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса болта в килограммах, v — скорость болта в м/с. Найдите кинетическую энергию гири через 2 секунды после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

■ **Решение**

Вычислим скорость:

$$v = v_0 \sin\frac{2\pi t}{T} = 0{,}8 \sin\frac{2\pi \cdot 2}{24} = 0{,}8 \sin\frac{\pi}{6} = 0{,}8 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}4 \text{ м/с}.$$

Используя найденное значение скорости, вычислим кинетическую энергию:

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{0{,}06 \cdot 0{,}4^2}{2} = 0{,}0048 \text{ Дж}.$$

Ответ: 0,0048.

Задачи, решаемые с помощью уравнений

Пример 3

Теннисный мяч подбросили вертикально вверх. Установлено, что высота, на которой находится мяч, может быть найдена по формуле $h(t) = -2t^2 + 3t + 12$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Через сколько секунд мяч достигнет высоты 10 м?

■ **Решение**

Для того чтобы найти момент времени, когда теннисный мяч находился на высоте ровно 10 м, решим уравнение:

$-2t^2 + 3t + 12 = 10$, $-2t^2 + 3t + 2 = 0$, $D = 25$.

Получим: $t = 2$ или $t = -0{,}5$.

$t = -0{,}5$ не удовлетворяет условию задачи. Следовательно, теннисный мяч достиг высоты 10 м через 2 секунды.

Ответ: 2.

Пример 4

Для транспортировки водолазов используется водолазный колокол. Он содержит $\nu = 4$ моля воздуха и имеет объём $V_1 = 24$ л. Под водой воздух сжимается до объёма V_2. Работа по сжатию воздуха вычисляется по формуле $A = \alpha\nu T \log_2 \frac{V_1}{V_2}$ (Дж), где $\alpha = 5{,}75$ — постоянная, а T = 320 K — температура воздуха. Какой объём V_2 (в литрах) будет занимать воздух, если при сжатии была совершена работа в 22 080 Дж?

■ **Решение**

Решим уравнение: $\alpha\nu T \log_2 \frac{V_1}{V_2} = 22\ 080$.

Подставив значения, получим: $5{,}75 \cdot 4 \cdot 320 \log_2 \frac{24}{V_2} = 22\ 080$,

$\log_2 \frac{24}{V_2} = 3$, $\frac{24}{V_2} = 8$, $V_2 = 3$ (л).

Ответ: 3.

Задачи, решаемые с помощью неравенств

Пример 5

Колебательные движения маятника характеризуются следующими величинами: A — амплитуда, ω — частота колебаний маятника $\left(\text{в } \text{с}^{-1}\right)$, A_0 — постоянный параметр, $\omega_p = 180\ \text{с}^{-1}$ — резонансная частота. Амплитуда рассчитывается по формуле $A = \dfrac{A_0\omega_p^2}{|\omega_p^2 - \omega^2|}$. Найдите максимальную частоту ω, меньшую резонансной, для которой амплитуда колебаний превосходит величину A_0 не более чем на 12,5 %. Ответ выразите в с^{-1}.

■ Решение

По условию задачи амплитуда должна быть не больше чем 112,5 % от A_0, то есть $A \le 1{,}125A_0$.

Подставим значения и решим неравенство: $\dfrac{A_0 180^2}{|180^2 - \omega^2|} \le 1{,}125A_0$.

Так как $|180^2 - \omega^2| > 0$, знак модуля можно опустить.

Получим: $\dfrac{180^2}{180^2 - \omega^2} \le 1{,}125$; $180^2 \le 1{,}125\left(180^2 - \omega^2\right)$; $1{,}125\omega^2 \le 1{,}125 \times$ $\times 180^2 - 180^2$; $\omega^2 \le 3600$; $-60 \le \omega \le 60$.

По условию задачи $\omega > 0$, значит, максимальная частота равна $\omega = 60\ \text{с}^{-1}$.

Ответ: 60.

Пример 6

Теннисная пушка выстреливает мячи под углом α к поверхности земли. Мяч пролетает расстояние, вычисляемое по формуле $L = \dfrac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$ (м), где $v_0 = 40$ — начальная скорость теннисного мяча (в м/с), g — ускорение свободного падения $\left(g = 10\ \text{м/с}^2\right)$. Теннисист находится на расстоянии 80 м от пушки. Найдите наименьший угол в градусах, при котором мяч долетит до теннисиста.

■ **Решение**

Задача сводится к решению неравенства $L \geq 80$.

Подставив значения, получаем: $\frac{40^2}{10}\sin 2\alpha \geq 80$; $\sin 2\alpha \geq \frac{1}{2}$; $30° + 360°k \leq 2\alpha \leq 150° + 360°k$, $k \in Z$. Учитывая, что $\alpha \in (0°; 90°)$, получим $15° \leq \alpha \leq 75°$, наименьшее значение $\alpha = 15°$.

Ответ: 15.

Задание 11

Описание: задание 11 определяет умение строить и исследовать простейшие математические модели, решать текстовые задачи на сложные проценты, использование арифметической и геометрической прогрессий, задачи на различные виды движения. Задание состоит из текстовой задачи с описанием различных жизненных ситуаций. Как правило, решение требует составления уравнения или системы уравнений.

Оценивание: максимально 1 балл.

Оформление ответа: в экзаменационный бланк № 1 следует записать целое число или конечную десятичную дробь.

План выполнения

1. Внимательно прочитайте условие задачи.

2. Сделайте краткую запись.

3. Составьте выражение, уравнение или систему уравнений.

4. Выполните решение на черновике. При получении двух корней в уравнении оставьте корень, подходящий по смыслу к условию задачи. Ответьте на вопрос задачи.

5. Запишите полученное число в поле ответа КИМ и бланк ответов № 1. Единицы измерения (в том числе градусы и проценты) в бланк ответов писать не нужно.

Проценты, смеси и сплавы

ПРИМЕЧАНИЕ

При подготовке необходимо повторить понятие процента от числа и правила нахождения процента от числа, числа по его проценту, процента по числу. Важно помнить, что концентрация — процентное отношение чистого вещества к смеси (сплаву, раствору). Задачи на концентрацию смесей и сплавов решаются с помощью процентов или пропорции.

Пример 1

В январе 2018 года цена на бензин выросла на некоторое количество процентов, а в марте 2018 года понизилась на то же самое количество процентов. В результате цена на бензин в марте 2018 года стала ниже на 4 %, чем в конце декабря 2017 года. На сколько процентов повысилась цена на бензин в январе 2018 года?

■ **Решение**

Обозначим цену в конце декабря 2017 года за 1. Пусть в январе 2018 года цена повысилась на x (десятичная запись процентов) и стала составлять $1\cdot(1+x)$. В марте 2018 года цена снизилась на x и стала составлять $1\cdot(1+x)\cdot(1-x)$. В результате бензин стал стоить на 4 % дешевле, чем в конце декабря 2017 года, то есть 0,96. Составим уравнение:

$$1\cdot(1+x)\cdot(1-x)=0{,}96 \Leftrightarrow 1-x^2=0{,}96 \Leftrightarrow x^2=0{,}04.$$

Значит, $x=\pm 0{,}2$. Заметим, что $x=-0{,}2$ не удовлетворяет условию задачи.

Таким образом, в январе 2018 года цена повысилась на 20 %.

Ответ: 20.

Пример 2

Дмитриев, Алексеев, Иванов и Петров являются учредителями компании, уставный капитал которой составляет 2000 рублей. Дмитриев внёс 14 % уставного капитала, Алексеев — 420 рублей, Иванов — 0,12 уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внёс Петров.

Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесённому в уставный капитал вкладу. Какая сумма от прибыли 10 000 рублей причитается Петрову? Ответ дайте в рублях.

■ **Решение**

Алексеев внёс $\frac{420}{2000} \cdot 100\,\% = 21\,\%$ уставного капитала. Доля Иванова 0,12 составляет 12 % уставного капитала. Тогда получается, что Петров внёс $100\,\% - 14\,\% - 12\,\% - 21\% = 53\,\%$ уставного капитала. Таким образом, от прибыли 10 000 рублей Петрову причитается $10\,000 \cdot \frac{53\,\%}{100\,\%} = 5300$ (руб.).

Ответ: 5300.

Пример 3

21 грамм соли растворили в 119 граммах воды. Определите, сколько процентов соли содержится в получившемся растворе.

■ **Решение**

Солевой раствор составляет $119 + 21 = 140$ (г). В этом растворе 21 г соли. Следовательно, процентное содержание соли в растворе составляет $\frac{21}{140} \cdot 100\,\% = 15\,\%$.

Ответ: 15.

Пример 4

В первом сплаве содержится 5 % бериллия, во втором — 20 % бериллия. В результате выплавки из этих двух сплавов получили третий сплав массой 150 кг, содержащий 15 % бериллия. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?

■ **Решение**

Пусть масса первого сплава x кг, а масса второго — y кг. Тогда массовое содержание бериллия в первом и втором сплавах $0{,}05x$ и $0{,}2y$ соответственно. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 150 кг, содержащий 15 % бериллия. Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 150, \\ 0{,}05x + 0{,}2y = 0{,}15 \cdot 150 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 150 - x, \\ 0{,}05x + 0{,}2 \cdot (150 - x) = 22{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 150 - x, \\ 0{,}15x = 7{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 100, \\ x = 50. \end{cases}$$

В результате приходим к выводу, что первый сплав легче второго на $100 - 50 = 50$ (кг).

Ответ: 50.

Движение по прямой, по окружности, по воде

ПРИМЕЧАНИЕ

Для решения большинства задач этого типа следует повторить из курса физики формулы для нахождения скорости, закон сложения скоростей. Как правило, подобные задачи решаются с помощью составления уравнений или систем уравнений.

Пример 5

Жук-носорог и паук двигаются по прямой ветке. Жук-носорог перемещается со скоростью 1,2 м/с и догоняет паука. Скорость паука 30 см/с. Через сколько секунд расстояние между жуком и пауком сократится с 6,7 м до 40 см?

■ **Решение**

Относительная скорость сближения равна разности их скоростей: $v = 1{,}2 - 0{,}3 = 0{,}9$ (м/с).

Расстояние, которое надо сократить жуку-носорогу и пауку, равно разности расстояний в начальный и конечный момент времени: $S = 6{,}7 - 0{,}4 = 6{,}3$ (м). Отсюда $t = \dfrac{S}{v} = \dfrac{6{,}3}{0{,}9} = 7$ (с).

Ответ: 7.

Пример 6

Расстояние между городами А и Б равно 700 км. Из города А на микроавтобусе выехал Дмитрий, а из города Б одновременно навстречу Дмитрию выехал Василий на легковом автомобиле. Через сколько часов Дмитрий и Василий встретятся, если скорость микроавтобуса 60 км/ч, а скорость легкового автомобиля 80 км/ч?

■ **Решение**

Пусть t ч — время движения автомобилей до встречи. Микроавтобус пройдёт расстояние $60t$ км, а легковой автомобиль — $80t$ км. Тогда имеем: $60t + 80t = 700$, $t = 5$. Таким образом, автомобили встретятся через 5 часов.

Ответ: 5.

Пример 7

Из Пскова в Великие Луки в 9:35 выехали два автомобиля: «Лада» и «Волга». «Лада» проехала с постоянной скоростью весь путь. «Волга» проехала первую половину пути со скоростью 26 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью на 39 км/ч больше скорости «Лады», в результате чего прибыла в Великие Луки одновременно с «Ладой». Найдите скорость автомобиля «Лада». Ответ дайте в км/ч.

■ Решение

Пусть x км/ч — скорость «Лады», тогда скорость «Волги» на второй половине пути равна $x+39$ км/ч. Примем расстояние между городами за 1. Автомобили были в пути одно и то же время, отсюда получим уравнение:

$$\frac{1}{x}=\frac{0{,}5}{26}+\frac{0{,}5}{x+39}\Leftrightarrow\frac{2}{x}=\frac{1}{26}+\frac{1}{x+39}\Leftrightarrow\frac{2x+78-x}{x(x+39)}=\frac{1}{26}\Leftrightarrow\frac{x+78}{x(x+39)}=\frac{1}{26}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+13x-2028=0.$$

Получим корни: $x=39$, $x=-52$. Отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи.

Таким образом, скорость «Лады» равна 39 км/ч.

Ответ: 39.

Пример 8

Часы на Фроловской башне Кремля показывают 11 часов 00 минут. Сколько минут нужно находиться туристу на Красной площади, чтобы увидеть, как минутная стрелка в двенадцатый раз поравняется с часовой?

■ Решение

В исходном положении часовая стрелка стоит на 11 часах, а минутная — на 12 часах, значит, минутная стрелка отстаёт от часовой на $\frac{11}{12}$ окружности. Разница в расстоянии, пройденном минутной и часовой стрелками к моменту, когда они первый раз поравняются (это будет в отметке 12 часов), будет составлять те самые $\frac{11}{12}$ окружности. Далее же минутная стрелка с каждым разом будет опережать на один полный круг часовую каждый раз, когда догонит её, и так должно произойти ещё 11 раз.

Положим, что длина окружности круга равна 1, тогда минутная стрелка пройдёт больше часовой на $11+\frac{11}{12}$ кругов.

Выразим скорость минутной и часовой стрелок в частях окружности в минуту: один круг составляет 60 минут, следовательно, скорость минутной стрелки $\frac{1}{60}$ круга в минуту. С другой стороны, круг составляет 12 часов по 60 минут, следовательно, скорость часовой $\frac{1}{12\cdot 60}$ круга в минуту. Пусть t — время, за которое минутная стрелка обгонит часовую 12 раз, тогда:

$$\frac{1}{60}t-\frac{1}{12\cdot 60}t=11+\frac{11}{12}\Leftrightarrow t\cdot\left(\frac{12-1}{12\cdot 60}\right)=\frac{11\cdot 12+11}{12}\Leftrightarrow\frac{11}{60}t=143\Leftrightarrow t=780.$$

Ответ: 780.

Пример 9

Теплоход, отчалив от пристани в Петергофе, плыл по течению реки 60 км, а затем против течения 20 км до пристани в Санкт-Петербурге. Весь путь от Петергофа до Санкт-Петербурга теплоход прошёл за 7 часов. Скорость течения реки равна 1 км/ч. Найдите скорость теплохода.

■ Решение

Пусть x км/ч — скорость теплохода. Тогда вниз по течению реки он шёл со скоростью $x+1$ км/ч и затратил на этот путь $\frac{60}{x+1}$ ч. Против течения теплоход шёл со скоростью $x-1$ км/ч и затратил на этот путь $\frac{20}{x-1}$ ч. На весь путь теплоход затратил 7 часов. Значит, $\frac{60}{x+1}+\frac{20}{x-1}=7.$

Перенесём все члены в одну часть и применим правила сложения и вычитания дробей, получим: $\frac{7x^2-80x+33}{(x+1)(x-1)}=0.$

Уравнение $7x^2-80x+33=0$ имеет корни $x_1=11$ и $x_2=\frac{3}{7}$. Оба они не обращают в нуль знаменатель, и поэтому оба корня являются корнями исходного уравнения. Однако по условию задачи скорость теплохода не может быть меньше 1 км/ч, следовательно, условию удовлетворяет корень $x_1 = 11$.

Ответ: 11.

Пример 10

Расстояние между пристанями Андреевка и Софьино, расположенными на озере, 390 км. 21 мая грузовое судно отправилось с постоянной скоростью из Андреевки в Софьино. 22 мая грузовое судно отправилось обратно со скоростью на 3 км/ч больше прежней, сделав по пути остановку на 9 часов. В результате грузовое судно затратило на путь из Софьино в Андреевку столько же времени, сколько на путь из Андреевки в Софьино. Найдите скорость судна на пути из Андреевки в Софьино. Ответ дайте в км/ч.

■ **Решение**

Пусть v км/ч — скорость грузового судна на пути из Андреевки в Софьино, тогда скорость судна на пути из Софьино в Андреевку — $v+3$ км/ч.

На обратном пути судно сделало остановку на 9 часов и в результате затратило на обратный путь столько же времени, сколько и на прямой, отсюда имеем:

$\dfrac{390}{v} = \dfrac{390}{v+3} + 9 \Leftrightarrow v^2 + 3v - 130 = 0$, откуда $v = -13$ или $v = 10$.

$v = -13$ не подходит по условию задачи, следовательно, собственная скорость грузового судна равна 10 км/ч.

Ответ: 10.

Совместная работа

ПРИМЕЧАНИЕ

Для решения задач на совместную работу применяются уравнения или системы уравнений.

Пример 11

Экскаваторщику Виктору Васильевичу нужно выкопать на разных участках два рва одинаковой глубины. Виктор Васильевич сначала выкопал первый ров длиной 5 метров, потом доехал до второго участка и выкопал второй ров длиной 3 метра. Время, затраченное на первый ров, на 1 час 12 минут меньше, чем время, затраченное на переезд экскаватора ко второму участку. Если бы производительность экскаватора была в 4 раза меньше, то время, затраченное на первый ров, равнялось бы времени переезда экскаватора с одного места работы на другое. Найдите длину рва, выкапываемого экскаватором за один час.

■ **Решение**

Пусть x — длина рва, выкапываемого экскаватором за один час. Тогда на рытьё первого рва экскаватор затратил $\frac{5}{x}$ часов, а на рытьё второго — $\frac{3}{x}$ часов. По условию время, затраченное на переезд с одного места на другое, в 4 раза больше времени, затраченного на рытьё первого рва, то есть равно $\frac{20}{x}$ часов.

Так как время, в течение которого экскаватор прокладывал первый ров, на $1\frac{12}{60}=\frac{72}{60}$ часа меньше времени, затраченного на переезд и рытьё второго рва, то получаем уравнение: $\frac{5}{x}+\frac{72}{60}=\frac{3}{x}+\frac{20}{x}$.

Перенесём все члены в левую часть и применим правила сложения и вычитания дробей, получаем: $72x=1080$. Это уравнение имеет единственный корень $x=15$. Следовательно, длина рва составляет 15 метров.

Ответ: 15.

Пример 12

Мастер Иванов изготовляет в час целое число деталей, большее 5, а ученики Петров и Сидоров каждый на 2 детали меньше. Иванов выполняет заказ за целое число часов, а Петров и Сидоров вместе на 1 час быстрее. Сколько деталей нужно было изготовить?

■ **Решение**

Пусть мастер изготовляет в час n деталей и выполняет заказ за m часов. Тогда по условию мастер изготовит $n\cdot m$ деталей, а ученики вместе $2(n-2)\cdot(m-1)$ деталей. Так как мастер и ученики выполняют одинаковый заказ, то $n \cdot m = 2(n-2) \cdot (m-1)$, следовательно, $n \cdot m = (2n-4) \cdot m - (2n-4) \Leftrightarrow 2n-4 = (2n-4) \cdot m - nm$, то есть $2n-4 = (2n-4-n) \cdot m$, отсюда $m = \dfrac{2n-4}{n-4} = 2 + \dfrac{4}{n-4}$.

Поскольку $n > 5$ и число m — целое (следовательно, и $\dfrac{4}{n-4}$ должно быть целым), то $n-4=4$ или $n-4=2$. В первом случае $n=6$, значит, $m=4$. Во втором $n=8$, следовательно, $m=3$. В обоих случаях искомое число деталей $mn=24$.

Ответ: 24.

Арифметическая и геометрическая прогрессия

ПРИМЕЧАНИЕ

При подготовке необходимо повторить определения прогрессий, формулы для вычисления отдельных членов арифметической и геометрической прогрессии, суммы членов.

Пример 13

Для подготовки к ЕГЭ Степану надо выполнить 434 задания. Ежедневно Степан выполняет на одно и то же количество заданий больше по сравнению с предыдущим днём. Известно, что за первый день Степан выполнил 5 заданий. Определите, сколько заданий решил Степан в последний день, если со всеми заданиями он справился за две недели.

■ **Решение**

Исходя из условия, можно сделать вывод, что последовательность из количества решённых заданий является арифметической прогрессией: $a_1 = 5$, $n = 14$, $S_{14} = 434$. Надо найти a_{14}.

Воспользуемся формулой $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} n$.

Получим уравнение: $434 = \dfrac{5 + a_{14}}{2} \cdot 14 \Leftrightarrow 7 \cdot (5 + a_{14}) = 434 \Leftrightarrow 5 + a_{14} = 62 \Leftrightarrow a_{14} = 57$.

Ответ: 57.

Пример 14

Компания «Дельта» начала вкладывать средства в отрасль информационных технологий в 2015 году, имея капитал в размере 4000 евро. Каждый год начиная с 2016 года она получала прибыль, которая составляла 100 % от капитала предыдущего года. А компания «Гамма» начала вкладывать средства в химическую промышленность в 2018 году, имея капитал в размере 4500 евро, и начиная с 2019 года ежегодно получает прибыль, составляющую 200 % от капитала предыдущего года. На сколько евро капитал одной из компаний будет больше капитала другой к концу 2021 года, если прибыль из оборота не изымалась?

■ **Решение**

Каждый год прибыль компании «Дельта» составляла 100 % от капитала предыдущего года, значит, капитал каждый год составлял 200 % от капитала предыдущего года. В конце 2021 года на счёте компании «Дельта» будет сумма $4000 \cdot 2^{2021-2015} = 4000 \cdot 2^6 = 256\,000$ евро. Каждый год прибыль компании «Гамма» составляла 200 % от капитала предыдущего года, значит, капитал каждый год составлял 300 % от капитала предыдущего. В конце 2021 года на счёте компании «Гамма» будет сумма $4500 \cdot 3^{2021-2018} = 4500 \cdot 3^3 = 121\,500$ евро. Значит, капитал компании «Дельта» будет на 134 500 евро больше.

Ответ: 134 500.

Задание 17

Описание: задание состоит из задачи на оптимальный выбор или банковской задачи, проверяется умение использовать математический аппарат при решении указанных типов финансовых задач. Банковские задачи связаны с определением суммы вклада или процента по вкладу. Решение задач на оптимальный выбор предполагает нахождение наибольшего значения функции, заданной уравнением или записанной в виде текста.

Оценивание: максимально 3 балла.

Оформление ответа: при выполнении задания требуется чётко и разборчиво записать в бланк ответов № 2 полное решение и ответ. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными.

ПРИМЕЧАНИЕ

При подготовке нужно повторить правила нахождения производной, методы решения уравнений, свойства геометрической и арифметической прогрессии, правила нахождения процента от числа и числа по его проценту.

План выполнения

1. Внимательно прочитайте условие задачи. Запишите номер задания в бланк ответов № 2.

2. Определите, что необходимо найти в задаче. С учётом данных составьте математическую модель, формулу для нахождения искомой величины.

3. Выполните необходимые вычисления на черновике, соблюдая логическую последовательность изложения.

4. Перенесите ход решения и ответ в бланк ответов № 2.

Банковские задачи

ПОМНИТЕ!

В мировой практике существует два способа погашения кредитов: **дифференцированный** и **аннуитетный**.

В случае применения дифференцированного способа периодический платёж включает постоянную сумму для погашения основного долга по кредиту, к которой прибавляются проценты на оставшуюся часть долга. При такой схеме погашения кредита платежи разные. Задачи на дифференцированные платежи можно распознать по фразам «долг уменьшается равномерно», «долг уменьшается на одну и ту же величину», «долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга предыдущего года».

При погашении кредита аннуитетным способом кредит выплачивается равными платежами. Задачи на аннуитетные платежи можно распознать по фразе «долг выплачивается равными платежами».

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

Использование в решении задач о кредитах и вкладах готовых формул без вывода (решение имеет вид «формула — ответ») можно трактовать как отсутствие построения модели задачи. Такое решение будет оценено нулём баллов.

Пример 1

1 января 2019 года Николай Александрович взял в банке кредит в размере 900 000 рублей. Схема выплаты кредита такова: 1-го числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 % на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1 %), затем Николай Александрович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Николай Александрович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 300 000 рублей?

Решение:

Для того чтобы срок кредитования был наименьшим, платежи должны быть наибольшими, то есть равными 300 000 рублей.

Через 1 месяц долг составит: $1{,}01 \cdot 900\,000 - 300\,000 = 609\,000$ (руб.).

Через 2 месяца долг составит: $1{,}01 \cdot 609\,000 - 300\,000 =$ $= 315\,090$ (руб.).

Через 3 месяца долг составит: $1{,}01 \cdot 315\,090 - 300\,000 =$ $= 18\,240{,}9$ (руб.).

Через 4 месяца: $1{,}01 \cdot 18\,240{,}9 - 18\,423{,}309 = 0$ (руб.), последний платёж будет равным $18\,423{,}309$ руб.

Ответ: 4 месяца.

Пример 2

13 января 2010 года Максим взял в банке кредит на открытие малого бизнеса под 10 % годовых. Условия кредитования таковы: 13 января каждого следующего года банк увеличивает долг на 10 %, 15 января нужно перевести платёж в размере 292 820 рублей. Найдите сумму, которую Максим взял в кредит, если известно, что кредит был погашен за 4 года.

Решение:

Введём обозначения: S руб. — размер кредита, $r = 10\,\%$ — процентная ставка, $p = 292\,820$ руб. — ежегодные платежи, $n = 4$ года — срок кредитования. Пусть $\alpha = 1 + \frac{r}{100} = 1{,}1.$

Через 1 год: $\alpha S - p$.

Через 2 года: $(\alpha S - p)\alpha - p = \alpha^2 S - \alpha p - p.$

Через 3 года: $(\alpha^2 S-\alpha p-p)\alpha-p=\alpha^3 S-\alpha^2 p-\alpha p-p.$

Через 4 года кредит был погашен: $(\alpha^3 S-\alpha^2 p-\alpha p-p)\alpha-p=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^4 S-\alpha^3 p-\alpha^2 p-\alpha p-p=0.$

$\alpha^4 S-p(\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0,$ или $\alpha^4 S-p(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3)=0.$

В скобках записана сумма четырёх членов геометрической прогрессии. Вычислим её по формуле $S_n=\dfrac{b_1(q^n-1)}{q-1}.$

Тогда $\alpha^4 S-p\dfrac{\alpha^4-1}{\alpha-1}=0.$

Выразим S: $S=\dfrac{p(\alpha^4-1)}{\alpha^4(\alpha-1)}=\dfrac{292\ 820\cdot 0{,}4641}{1{,}4641\cdot 0{,}1}=928\ 200$ (руб.).

Ответ: 928 200 рублей.

Пример 3

30 сентября 2018 года Олег планирует взять в банке 7,007 млн рублей в кредит под 20 % годовых. Кредит выплачивается по такой схеме: 30 сентября каждого следующего года банк будет увеличивать долг на 20 %, 1 октября нужно перевести в банк платёж. Долг Олегу можно выплатить двумя или тремя равными платежами. На сколько рублей меньше Олег отдаст банку, если будет выплачивать долг двумя равными платежами?

Решение:

Введём обозначения: $S=7\ 007\ 000$ руб. — размер кредита, $r=20\,\%$ — процентная ставка, p_1 руб. — платежи в случае выплаты двумя равными платежами, p_2 руб. — платежи в случае выплаты тремя равными платежами.

Рассмотрим случай выплат двумя равными платежами.

Через 1 год остаток на счёте равен $1{,}2S-p_1$.

Через 2 года долг будет погашен полностью: $(1{,}2S-p_1)\cdot 1{,}2-p_1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1{,}44S-1{,}2p_1-p_1=0 \Leftrightarrow 1{,}44S-2{,}2p_1=0 \Leftrightarrow p_1=\dfrac{1{,}44S}{2{,}2}=\dfrac{1{,}44\cdot 7\ 007\ 000}{2{,}2}=$

$=4\ 586\ 400$ (руб.).

Значит, за 2 года Вячеслав выплатит сумму $S_1 = 2 \cdot p_1 = 2 \cdot 4\,586\,400 = 9\,172\,800$ (руб.).

Рассмотрим случай выплат тремя равными платежами.

Через 1 год остаток на счёте равен: $1{,}2S - p_2$.

Через 2 года остаток на счёте равен: $(1{,}2S - p_2) \cdot 1{,}2 - p_2 = 1{,}44S - 1{,}2p_2 - p_2$.

Через 3 года: $(1{,}44S - 1{,}2p_2 - p_2) \cdot 1{,}2 - p_2 = 1{,}728S - 1{,}44p_2 - 1{,}2p_2 - p_2 = 1{,}728S - 3{,}64p_2$.

Так как кредит будет погашен, то $1{,}728S - 3{,}64p_2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow p_2 = \dfrac{1{,}728S}{3{,}64} = \dfrac{1{,}728 \cdot 7\,007\,000}{3{,}64} = 3\,326\,400$ (руб.).

Значит, за 3 года Вячеслав выплатит сумму $S_2 = 3 \cdot p_2 = 3 \cdot 3\,326\,400 = 9\,979\,200$ (руб.).

Получим: $S_2 - S_1 = 9\,979\,200 - 9\,172\,800 = 806\,400$ (руб.).

Ответ: на 806 400 рублей меньше.

Пример 4

Семья Васильевых взяла в банке потребительский кредит для покупки автомобиля. Срок кредита составляет 12 лет. Условия кредитования таковы: в конце каждого года к оставшейся сумме долга добавляется r % от этой суммы, затем Васильевы погашают эти добавленные проценты и уменьшают сумму долга. Ежегодные платежи подбираются так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину каждый год. Известно, что общая сумма, выплаченная Васильевыми банку за весь срок кредитования, оказалась на 13 % больше, чем сумма, взятая ими в кредит. Найдите r.

Решение:

По условию задачи долг уменьшается на одну и ту же величину, значит, это задача на дифференцированные платежи.

Введём обозначения: S руб. — размер кредита, p_i руб. — платёж в i-м году, $n = 12$ лет — срок кредитования. Пусть $\alpha = 1 + \dfrac{r}{100}$.

$$n=1:\ \alpha S-p_1=\frac{11}{12}S\Rightarrow p_1=\alpha S-\frac{11}{12}S.$$

$$n=2:\ \frac{11}{12}\alpha S-p_2=\frac{10}{12}S\Rightarrow p_2=\frac{11}{12}\alpha S-\frac{10}{12}S.$$

$$n=3:\ \frac{10}{12}\alpha S-p_3=\frac{9}{12}S\Rightarrow p_3=\frac{10}{12}\alpha S-\frac{9}{12}S.$$

...

$$n=11:\ \frac{2}{12}\alpha S-p_{11}=\frac{1}{12}S\Rightarrow p_{11}=\frac{2}{12}\alpha S-\frac{1}{12}S.$$

$$n=12:\ \frac{1}{12}\alpha S-p_{12}=0\Rightarrow p_{12}=\frac{1}{12}\alpha S.$$

Найдём сумму платежей:

$$p_1+p_2+p_3+\ldots+p_{11}+p_{12}=\frac{\alpha S}{12}(12+11+10+\ldots+2+1)-\frac{S}{12}(11+10+9+\ldots+1).$$

Для нахождения суммы чисел в скобках можно воспользоваться формулой суммы членов арифметической прогрессии:

$$\frac{\alpha S}{12}\left(\frac{1+12}{2}\cdot 12\right)-\frac{S}{12}\left(\frac{1+11}{2}\cdot 11\right)=\frac{\alpha S}{12}\cdot 78-\frac{S}{12}\cdot 66=\frac{13\alpha S}{2}-\frac{11S}{2}.$$

По условию задачи выплаченная сумма (то есть сумма платежей p_i) на 13 % больше суммы кредита, то есть она равна $1{,}13S$. Получим уравнение:

$$\frac{13\alpha S}{2}-\frac{11S}{2}=1{,}13S\Leftrightarrow 6{,}5\alpha-5{,}5=1{,}13\Leftrightarrow 6{,}5\alpha=6{,}63\Leftrightarrow \alpha=1{,}02\Rightarrow r=2\,\%.$$

Ответ: 2 %.

Пример 5

В марте 2022 года компания «Скиф» планирует начать развитие нового направления в бизнесе. Для этого необходимо взять в банке кредит в размере 28 млн рублей на n лет. Условия возврата кредита таковы:

- каждый август долг увеличивается на 25 % по сравнению с мартом;
- с сентября по декабрь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в марте следующего года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга, чем в марте предыдущего года.

Наибольший годовой платёж составит 9 млн рублей. Найдите n.

Решение:

По условию задачи долг уменьшается на одну и ту же сумму, значит, это задача на дифференцированные платежи.

Введём обозначения: $S = 28$ млн руб. — размер кредита, p_i млн руб. — платёж в i-м году. Пусть $\alpha = 1 + \frac{r}{100} = 1{,}25$.

Через 1 год: $\alpha S - p_1 = \frac{n-1}{n}S \Rightarrow p_1 = \alpha S - \frac{n-1}{n}S = 1{,}25 \cdot 28 - \frac{28(n-1)}{n} =$

$= \frac{35n - 28n + 28}{n} = \frac{7n+28}{n}.$

Через 2 года: $\frac{n-1}{n}\alpha S - p_2 = \frac{n-2}{n}S \Rightarrow p_2 = \frac{n-1}{n}\alpha S - \frac{n-2}{n}S =$

$= \frac{35(n-1)}{n} - \frac{28(n-2)}{n} = \frac{35n - 35 - 28n + 56}{n} = \frac{7n+21}{n} = \frac{7(n-1)+28}{n}.$

Через 3 года: $\frac{n-2}{n}\alpha S - p_3 = \frac{n-3}{n}S \Rightarrow p_3 = \frac{n-2}{n}\alpha S - \frac{n-3}{n}S =$

$= \frac{35(n-2)}{n} - \frac{28(n-3)}{n} = \frac{35n - 70 - 28n + 84}{n} = \frac{7n+14}{n} = \frac{7(n-2)+28}{n}.$

...

Через $n-1$ лет: $\frac{2}{n}\alpha S - p_{n-1} = \frac{1}{n}S \Rightarrow p_{n-1} = \frac{2}{n}\alpha S - \frac{1}{n}S = \frac{70}{n} - \frac{28}{n} =$

$= \frac{42}{n} = \frac{7 \cdot 2 + 28}{n}.$

Через n лет: $\frac{1}{n}\alpha S - p_n = 0 \Rightarrow p_n = \frac{1}{n}\alpha S = \frac{35}{n} = \frac{7 \cdot 1 + 28}{n}.$

Ежегодные платежи уменьшаются, значит, наибольшим был первый платёж: $p_1 = \frac{7n+28}{n} = 7 + \frac{28}{n}.$

По условию этот платёж равен 9 млн руб. Составим уравнение: $7 + \frac{28}{n} = 9 \Rightarrow n = 14.$

Ответ: 14 лет.

Задачи на оптимальный выбор

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

Если решение основано на методе перебора, необходимо обосновать единственность решения задачи.

Пример 6

Строительство нового маслосырзавода обошлось предпринимателю в 75 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на данном маслосырзаводе равны $0{,}5x^2+x+7$ млн рублей в год. Если продукцию маслосырзавода продавать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль за один год составит $px-(0{,}5x^2+x+7)$ млн рублей. Когда маслосырзавод будет построен, он станет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство маслосырзавода окупится за 3 года?

Решение:

Строительство маслосырзавода окупится, когда прибыль будет не менее 75 млн руб. за 3 года, значит, ежегодная прибыль должна быть не менее 25 млн руб. Составим неравенство: $px-(0{,}5x^2+x+7)\ge 25;\ \ -0{,}5x^2-x+px-7\ge 25;\ \ -0{,}5x^2+(p-1)x-7\ge 25.$

Рассмотрим функцию прибыли за один год: $f(x)=-0{,}5x^2+(p-1)x-7$. Это квадратичная функция, графиком которой является парабола, ветви направлены вниз. Наибольшее значение эта функция принимает в вершине $x_0=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{p-1}{2\cdot(-0{,}5)}=p-1.$

Значит, $f_{\text{наиб}}(x)=f(x_0)=-\dfrac{(p-1)^2}{2}+(p-1)^2-7=\dfrac{(p-1)^2}{2}-7.$

Тогда можно перейти к неравенству

$$f_{\text{наиб}}(x)\ge 25\Leftrightarrow\frac{(p-1)^2}{2}-7\ge 25\Leftrightarrow(p-1)^2\ge 64;\quad p^2-2p-63\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}p\le -7,\\ p\ge 9.\end{array}\right.$$

Отрицательные значения p не удовлетворяют условию задачи, поэтому наименьшее значение $p=9$.

Ответ: 9.

Пример 7

Компания владеет двумя предприятиями — «Альфа» и «Бета». Оба предприятия производят одинаковые бытовые приборы. На предприятии «Бета» установлено более современное оборудование, поэтому на нём может быть выпущено больше единиц продукции. Известно, что если рабочие предприятия «Альфа» суммарно трудятся t^2 часов в неделю, то выпускают t единиц продукции. А если рабочие предприятия «Бета» суммарно трудятся t^2 часов в неделю, то выпускают $2t$ единиц продукции. Ставка заработной платы рабочего составляет 500 рублей в час. Компания выплачивает рабочим 30 250 000 рублей в неделю. На какое максимальное количество единиц продукции она может рассчитывать?

Решение:

Заработная плата рабочих составляет 30 250 000 рублей, а ставка — 500 рублей в час. Вычислим количество часов:

$$\frac{30\,250\,000}{500}=60\,500 \text{ (ч)}.$$

Пусть на предприятии «Альфа» рабочие трудятся x^2 часов, тогда они выпускают x единиц продукции.

Пусть на предприятии «Бета» рабочие трудятся y^2 часов, тогда они выпускают $2y$ единиц продукции.

Общее время составляет 60 500 часов, поэтому $x^2+y^2=60\,500$.

Выразим y: $y=\sqrt{60\,500-x^2}$ $(y>0)$.

Рассмотрим функцию «сумма единиц продукции»:

$$f(x)=x+2\sqrt{60\,500-x^2},\quad x\in\left[0;\sqrt{60\,500}\right].$$

Исследуем функцию на наибольшее значение с помощью производной: $f'(x)=1+2\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{60\,500-x^2}}=1+\dfrac{-2x}{\sqrt{60\,500-x^2}}=\dfrac{\sqrt{60\,500-x^2}-2x}{\sqrt{60\,500-x^2}}$,

$f'(x)=0$, следовательно, $\sqrt{60\,500-x^2}-2x=0\Leftrightarrow\sqrt{60\,500-x^2}=2x$;

$\begin{cases}60\,500-x^2=4x^2,\\ x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=12\,100,\\ x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x=110$ — точка максимума на отрезке $x\in\left[0;\sqrt{60\,500}\right]$.

Получим искомое количество единиц продукции:

$$f_{\text{наиб}}(x)=f(110)=110+2\sqrt{60\,500-110^2}=550 \text{ (ед.)}.$$

Ответ: 550 единиц продукции.

Задание 19

Описание: данное задание является наиболее сложным, оно требует нестандартного подхода и хорошего знания свойств чисел и числовой последовательности. Задание состоит из условия и трёх вопросов (*а*, *б*, *в*). Как правило, пункт *а* наиболее простой, его сложность не превышает уровень задач первой части.

Оценивание: максимально 4 балла.

Оформление ответа: необходимо чётко и разборчиво записать в бланк ответов № 2 подробное обоснованное решение и общий ответ для каждого пункта задания: *а*, *б*, *в*.

План выполнения

1. Внимательно прочитайте условие задачи. Запишите номер задания в бланк ответов № 2.

2. Определите, что необходимо найти в задаче. С учётом данных составьте математическую модель, формулу для нахождения искомой величины.

3. Выполните необходимые вычисления на черновике, соблюдая логическую последовательность изложения.

4. Перенесите ход решения и ответ в бланк ответов № 2.

ПРИМЕЧАНИЕ

При подготовке нужно повторить понятия натурального, целого и простого чисел, признаки делимости и разложение на множители; основные методы решения уравнений и систем уравнений; методы решения неравенств; формулы для суммы арифметической и геометрической прогрессий, нахождения членов арифметической и геометрической прогрессий.

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

В зависимости от формулировок вопросов в пунктах задания критерии оценивания могут различаться. Как правило, эксперты руководствуются следующими показателями.

- **1 балл**, если верно получен **один** из указанных результатов:
  - ✓ обоснованное решение пункта *а*;
  - ✓ обоснованное решение пункта *б*;
  - ✓ искомая оценка в пункте *в*;
  - ✓ пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки.
- **2 балла**, если верно получены **два** из перечисленных выше результатов.
- **3 балла**, если верно получены **три** из перечисленных выше результатов.
- **4 балла**, если верно получены **все** перечисленные выше результаты.

Числа и их свойства

Пример 1

На шахматном турнире за победу в партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. В турнире принимают участие m мальчиков и d девочек, причём каждый играет с каждым дважды.

а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если $m=3$, $d=2$?

б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если $m+d=$ $=10$?

в) Каковы все возможные значения d, если $m=7d$ и известно, что в сумме мальчики набрали ровно в 3 раза больше очков, чем девочки?

Решение:

а) Каждая из двух девочек могла выиграть оба раза у всех троих мальчиков, получив в сумме 6 очков. Сыграв две партии друг с другом, девочки распределили между собой ещё 2 очка. Всего $6+6+2=14$ очков.

б) Играя по две партии каждый с каждым, 10 детей играют всего $2\cdot\dfrac{9\cdot 10}{2}=90$ партий. В каждой партии вне зависимости от её исхода разыгрывается одно очко, поэтому всего набрано 90 очков.

в) Всего детей было $7d+d=8d$. Играя по две партии каждый с каждым, они сыграли между собой $2\cdot\frac{8d(8d-1)}{2}=8d(8d-1)$ партий и разыграли $8d(8d-1)$ очков. Из них у мальчиков три четверти очков, а у девочек — одна четверть, то есть у девочек $2d(8d-1)=16d^2-2d$ очков. Заметим, что если каждая девочка выиграла у всех мальчиков, то вместе девочки набрали максимум $2d\cdot 7d$ очков, а играя между собой, девочки распределили $2\cdot\frac{d(d-1)}{2}=d(d-1)$ очков. Поэтому наибольшее количество очков, которое могли набрать девочки, равно $14d^2+d(d-1)$. Тем самым имеем: $16d^2-2d\le 15d^2-d$; $d^2\le d$. Следовательно, девочек не могло быть больше одной.

Если девочка была одна, то мальчиков было семеро. Девочка и мальчики сыграли всего 56 партий и разыграли 56 очков. Девочка набрала 14 очков, выиграв у каждого из мальчиков по две партии. Играя между собой, мальчики разыграли оставшиеся 42 очка.

Ответ: а) 14; б) 90; в) 1.

Пример 2

Будем называть четырёхзначное число интересным, если среди четырёх цифр в его десятичной записи нет нулей, а одна из этих цифр равна сумме трёх других из них. Например, интересным является число 6321.

а) Приведите пример двух интересных четырёхзначных чисел, разность между которыми равна 3.

б) Найдутся ли два интересных четырёхзначных числа, разность между которыми равна 111?

в) Найдите наименьшее простое число, для которого не существует кратного ему интересного четырёхзначного числа.

Решение:

а) Примером таких чисел являются числа 6222 и 6219.

б) Предположим, что такие числа существуют. Рассмотрим какие-либо два таких интересных числа. Пусть $\overline{abcd}$ — десятичная запись большего из них, а k — та из цифр a, b, c или d, которая равна сумме трёх других. Тогда сумма цифр этого числа равна $2k$, то есть чётна. Аналогично получаем, что сумма цифр меньшего из рассматриваемых интересных чисел также чётна. Так как $d \neq 0$, четвёртая цифра меньшего из рассматриваемых интересных чисел равна $d-1$. Так как $c \neq 0$, третья цифра этого числа равна $c-1$.

Аналогично получаем, что вторая цифра этого числа равна $b-1$. Наконец, первая цифра этого числа равна a. Значит, сумма цифр меньшего из рассматриваемых интересных чисел на три меньше суммы чисел большего из них. Пришли к противоречию.

в) Покажем, что искомое число равно 11. Для этого сначала приведём примеры интересных четырёхзначных чисел, кратных 2, 3, 5 и 7: число 2114 кратно 2 и 7, число 9135 кратно 3 и 5.

Пусть $\overline{abcd}$ — десятичная запись какого-либо интересного числа, кратного 11. Тогда $\overline{abcd} = 11(91a + 9b + c) + (b - a + d - c)$. Получаем, что число $(b - a + d - c)$ кратно 11.

Поскольку a, b, c и d — цифры, отсюда следует, что либо $b + d = a + c$, либо эти две суммы отличаются на 11.

Составим две пары чисел: a и c, b и d. Пусть k — цифра, равная сумме трёх других, l — та из них, которая в паре с k. Пусть m и n — две оставшиеся из цифр. Поскольку $k = l + m + n$, имеем $k + l \geq m + n$. Значит, $k + l = m + n + 11$. Вычитая из этого равенства равенство $k = l + m + n$, получаем $l = 11 - l$. Следовательно, $2l = 11$. Пришли к противоречию. Значит, не существует интересных четырёхзначных чисел, кратных 11.

Ответ: а) да, например 6222 и 6219; б) нет; в) 11.

ПОДСКАЗКА

$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d.$

Последовательности и прогрессии

Пример 3

На доске написано 30 натуральных чисел. Какие-то из них красные, а какие-то зелёные. Красные числа кратны 8, а зелёные числа кратны 3. Все красные числа отличаются друг от друга, как и все зелёные. Но между красными и зелёными могут быть одинаковые.

а) Может ли сумма зелёных чисел быть меньше 1395?

б) Может ли сумма чисел быть 1066, если только одно число красное?

в) Найдите наименьшее количество красных чисел, которое может быть при сумме 1066.

Решение:

а) Ряд зелёных чисел, кратных 3, составляет арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = 3$ и разностью $d = 3$ (то есть ряд 3, 6, 9 и т. д.). Пусть на доске записано 30 зелёных чисел, тогда последнее число можно найти по формуле $a_{30} = a_1 + d(n-1) = 3 + 3(30-1) = 90$. Тогда сумма всех зелёных чисел составит $S_{30} = \frac{a_1 + a_{30}}{2} n = \frac{3+90}{2} 30 = 1395$.

Теперь заменим любое зелёное число на доске на красное, тогда сумма 29 оставшихся зелёных чисел будет меньше суммы 30 зелёных, написанных до этого, а значит, и меньше 1395. Следовательно, сумма зелёных чисел может быть меньше 1395.

б) Ясно, что сумма 30 зелёных чисел, приведённая в пункте *а*, минимальна, так как минимально значение $a_1 = 3$ (при больших значениях a_1 сумма будет возрастать). Чтобы получить минимально возможную сумму 29 зелёных чисел, вычтем из минимально возможной суммы 30 зелёных чисел самое большое — последнее число, равное 90: $1395 - 90 = 1305$.

Теперь, чтобы получить минимально возможную сумму 29 зелёных и 1 красного чисел, прибавим к минимально возможной сумме 29 зелёных чисел минимально возможное красное число, то есть число 7: $1305 + 7 = 1312$. Таким образом, получаем, что минимально возможная сумма 29 зелёных и 1 красного чисел $1312 > 1066$, а это означает, что если на доске написано только 1 красное число, то сумма чисел не может быть равна 1066.

в) Пусть n — число красных чисел, тогда число зелёных составит $(30 - n)$. Суммы красных и зелёных чисел по формуле суммы арифметической прогрессии будут составлять

$$S_{кр} = \frac{8+8+8(n-1)}{2} n = \frac{8+8n}{2} n;$$

$$S_{зел} = \frac{3+3+3(30-n-1)}{2}(30-n) = \frac{3+3(30-n)}{2}(30-n).$$

Сумма всех чисел должна быть по крайней мере меньше или равна 1066, тогда $S=\frac{8+8n}{2}n+\frac{3+3(30-n)}{2}(30-n)\le 1066;$

$11n^2-175n+658\le 0;\quad 6<n<9.$

В ряду из 30 зелёных чисел заменим зелёные числа на красные: 90 на 8, 87 на 16, 84 на 24, 81 на 32, 78 на 40, 75 на 48. Таким образом, сумма записанных на доске чисел составит $S=\frac{8+48}{2}6+\frac{3+72}{2}24=1068.$

Теперь заменим ещё 66 на 64, получим: $S=(S_{6кр}+68)+(S_{24зел}-66)=$ $=168+68+900-66=1066.$

Таким образом, наименьшее количество красных чисел равно 7.

Ответ: а) да; б) нет; в) 7.

ПОДСКАЗКА

В решении необходимо использовать формулы суммы арифметической прогрессии: $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n$ и $S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}n.$

Пример 4

Все члены возрастающих арифметических прогрессий $a_1, a_2\ldots$ и $b_1, b_2\ldots$ являются натуральными числами.

а) Приведите пример таких прогрессий, для которых $a_1b_1+2a_3b_3=4a_2b_2.$

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $2a_1b_1+a_4b_4=$ $=3a_2b_2$?

в) Какое наибольшее значение может принимать произведение a_2b_2, если $2a_1b_1+a_4b_4\le 210$?

Решение:

а) Проверим, что пример прогрессий 2, 3, 4... и 2, 3, 4... удовлетворяет условию: $a_1b_1+2a_3b_3=2\cdot 2+2\cdot 4\cdot 4=36=4a_2b_2.$

б) Введём следующие обозначения:

c — разность прогрессии $a_1, a_2...$;

d — разность прогрессии $b_1, b_2...$

Тогда получим: $2a_1b_1 + a_4b_4 = 2a_1b_1 + (a_1 + 3c)(b_1 + 3d) = 3a_1b_1 + 3a_1d +$ $+ 3b_1c + 9cd$; $3a_2b_2 = 3(a_1 + c)(b_1 + d) = 3a_1b_1 + 3a_1d + 3b_1c + 3cd$;

$2a_1b_1 + a_4b_4 - 3a_2b_2 = 6cd.$

Если $2a_1b_1 + a_4b_4 = 3a_2b_2$, то $cd = 0$ — противоречие, так как по условию прогрессии возрастающие, то есть $c \geq 1$, $d \geq 1$. Значит, таких прогрессий не существует.

в) По условию $c \geq 1$, $d \geq 1$. В пункте *б* доказано, что $2a_1b_1 + a_4b_4 - 3a_2b_2 = 6cd.$

Отсюда следует, что $a_2b_2 = \dfrac{2a_1b_1 + a_4b_4 - 6cd}{3} \leq \dfrac{210 - 6}{3} = 68.$

Равенство выполняется, например, для прогрессий 3, 4, 5... и 16, 17, 18...

$2a_1b_1 + a_4b_4 = 210$, $a_2b_2 = 4 \cdot 17 = 68.$

Ответ: а) 2, 3, 4... и 2, 3, 4...; б) нет; в) 68.

Пример 5

Последовательность $a_1, a_2... a_6$ состоит из неотрицательных однозначных чисел. Пусть M_k — среднее арифметическое всех членов этой последовательности, кроме k-го. Известно, что $M_1 = 7$, $M_2 = 6$.

а) Приведите пример такой последовательности, для которой $M_3 = 6{,}4$.

б) Существует ли такая последовательность, для которой $M_3 = 5$?

в) Найдите наименьшее возможное значение M_3.

Решение:

а) Например, последовательность 4, 9, 7, 7, 7, 5 удовлетворяет условию задачи.

б) Нет. Если $M_1 = 7$, $M_3 = 5$, получаем: $a_1 + a_2 + ... + a_6 = 25$, $a_2 + ... + a_6 = 35$, откуда $a_3 - a_1 = 10$, что невозможно.

в) Поскольку $M_1 = 7$, получаем: $a_2 + \ldots + a_6 = 35$, а так как $a_3 - a_1 \leq 9$, получаем: $a_1 + a_2 + \ldots + a_6 \geq 26$, то есть $M_3 \geq 5{,}2$.

Ответ: а) 4, 9, 7, 7, 7, 5; б) нет; в) 5,2.

Сюжетные задачи

Пример 6

Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{4}{13}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов *а* и *б*?

Решение:

а) Если группа состоит из 4 мальчиков, посетивших только театр, 6 мальчиков, посетивших только кино, и 10 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено. Значит, в группе из 20 учащихся могло быть 10 мальчиков.

б) Предположим, что мальчиков было 11 или больше. Тогда девочек было 9 или меньше. Театр посетило не более 4 мальчиков, поскольку если бы их было 5 или больше, то доля мальчиков в театре была бы не меньше $\frac{5}{5+9} = \frac{5}{14}$, что больше $\frac{4}{13}$. Аналогично кино посетило не более 6 мальчиков, поскольку $\frac{7}{7+9} = \frac{7}{16} > \frac{2}{5}$, но тогда хотя бы один мальчик не посетил ни театра, ни кино, что противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в группе из 20 учащихся могло быть 10 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков в группе — 10.

в) Предположим, что некоторый мальчик сходил и в театр, и в кино. Если бы вместо него в группе присутствовало два мальчика, один из которых посетил только театр, а другой — только кино, то доля мальчиков и в театре, и в кино осталась бы прежней, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек в группе можно считать, что каждый мальчик сходил или только в театр, или только в кино.

Пусть в группе m_1 мальчиков, посетивших театр, m_2 мальчиков, посетивших кино, и d девочек. Оценим долю девочек в этой группе. Будем считать, что все девочки ходили и в театр, и в кино, поскольку их доля в группе от этого не изменится, а доля в театре и в кино не уменьшится.

Из условия $\frac{m_1}{m_1+d} \le \frac{4}{13}$, $\frac{m_2}{m_2+d} \le \frac{2}{5}$, значит, $\frac{m_1}{d} \le \frac{4}{9}$, $\frac{m_2}{d} \le \frac{2}{3}$. Тогда $\frac{m_1+m_2}{d} \le \frac{10}{9}$, поэтому доля девочек в группе $\frac{d}{m_1+m_2+d} = \frac{1}{\frac{10}{9}+1} = \frac{9}{19}$.

Если группа состоит из 4 мальчиков, посетивших только театр, 6 мальчиков, посетивших только кино, и 9 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено, а доля девочек в группе равна $\frac{9}{19}$.

Ответ: а) да; б) 10; в) $\frac{9}{19}$.

Пример 7

Вася играет солдатиками из двух разных наборов. В первом наборе солдатиков меньше, чем во втором, но больше, чем 46. А всего солдатиков у Васи меньше 111. Вася знает, что может построить колонну по несколько солдатиков в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдатиков, большее 8, и при этом ни в каком ряду не будет солдатиков из разных наборов.

а) Сколько солдатиков может быть в первом наборе и сколько во втором? Приведите один пример.

б) Может ли Вася построить колонну указанным способом по 13 солдатиков в ряд?

в) Сколько всего солдатиков может быть у Васи? Укажите все возможные варианты.

Решение:

Пусть в первом наборе k солдатиков, во втором — l солдатиков. Тогда числа k и l имеют общий делитель, больший 8, и при этом

$$\begin{cases} 47 \le k < l, \\ k + l \le 110. \end{cases}$$

а) Например, 50 и 60 солдатиков. Вместе солдатиков 110, их можно построить в колонну по 10 солдатиков в ряд так, что 5 рядов будет заполнено солдатиками только из первого набора, а 6 рядов — только из второго.

б) Предположим, что общий делитель равен 13. Тогда, учитывая, что $47 \le k < l$, получаем, что $k = 52$. Наименьшее возможное значение $l = 52 + 13 = 65$, но вместе получается 117 солдатиков, что противоречит условию.

в) Число $l - k > 0$ и делится на общий делитель чисел k и l, поэтому $l - k \ge 9 \Rightarrow k - l \le -9$, а также $k + l \le 110$. Получим неравенство $2k \le 101 \Rightarrow k \le 50$. При этом $k + d \le l \le 110 - k$, где d — наименьший общий делитель, $d > 8$.

Если $k = 47$, то $d = 47$, $47 + 47 = 94 \le l \le 110 - 47$. Противоречие.

Если $k = 48$, то $d = 12$, $l = 60$, а в наборах всего 108 солдатиков.

Если $k = 49$, то $98 \le l \le 110 - 49 = 61$. Противоречие.

Если $k = 50$, то $d = 10$, $l = 60$, а в наборах всего 110 солдатиков.

Ответ: а) например, 50 и 60; б) нет; в) 108 или 110.

Задачи для самостоятельного решения

1.1 Марина едет в поезде из Оленегорска в Петрозаводск. Поезд отправляется в 19:23, а прибывает на следующий день в 8:23 по московскому времени. Сколько часов Марина потратит на дорогу?

Ответ: ______________________.

1.2 Артём сделал рассылку MMS-сообщений с праздничными открытками своим коллегам. Перед отправкой сообщений на счету у Артёма было 79 рублей. Цена MMS-сообщения 1 рубль 20 копеек. Сколько рублей останется у Артёма после отправки всех сообщений, если у него 15 коллег?

Ответ: ______________________.

1.3 В кулинарной книге имеется рецепт ватрушки с джемом. Для ватрушки на 4 человека нужно взять $\frac{3}{10}$ фунта джема. Сколько граммов джема нужно взять для ватрушки, рассчитанной на пятерых гостей? Считайте, что 1 фунт равен 0,4 кг.

Ответ: ______________________.

1.4 Древесина покрывается эмалью из расчёта 150 г эмали на 1 м^2 древесины. В магазине эмаль продаётся в банках по 2 кг. Какое наименьшее количество банок эмали нужно купить для покраски древесины площадью 48 м^2?

Ответ: ______________________.

1.5 Володя живёт в 9-этажном доме. В доме некоторое количество подъездов. В любом подъезде на каждом этаже расположено 4 квартиры. Володя живёт в квартире № 83. В каком подъезде находится квартира Володи?

Ответ: ____________________.

1.6 В канцелярском магазине цена карандаша составляет 6 рублей 60 копеек. У Алёны 80 рублей. Какое наибольшее число карандашей она сможет купить на эти деньги?

Ответ: ____________________.

1.7 Упаковка зефира стоит 60 рублей. 13 августа в гипермаркете действует акция: заплатив за две упаковки зефира, покупатель получает ещё одну в подарок. Какое наибольшее количество упаковок зефира можно получить, потратив не более 500 рублей 13 августа?

Ответ: ____________________.

1.8 Обладатели клубной карты магазина «Книголюб» получают при покупке скидку 3 %. Учебник стоит 320 рублей. Сколько рублей заплатит Максим за этот учебник, если у него имеется клубная карта?

Ответ: ____________________.

1.9 Задание 5 из профильного ЕГЭ по математике правильно решили 20 460 учащихся, что составляет 62 % выпускников города Твери. Сколько всего выпускников в Твери?

Ответ: ____________________.

1.10 В Таганроге насчитывается 250 000 жителей. 15 % всех жителей составляют дети и подростки. 30 % взрослого населения не работают (пенсионеры, студенты, домохозяйки и т. п.). Сколько взрослых жителей Таганрога работает?

Ответ: ____________________.

1.11 Папка-регистратор стоит 45 рублей. Какое максимальное количество таких папок может купить секретарь на 900 рублей после повышения цены на 10 %?

Ответ: ____________________.

1.12 Алексей Петрович живёт в 6-этажном доме. В каждом подъезде этого дома на каждом этаже находится по 4 квартиры. Алексей Петрович живёт в квартире № 51. В каком подъезде находится квартира Алексея Петровича?

Ответ: ____________________.

1.13 В апреле автомобиль «Лада Калина» проехал 1800 км. Цена бензина составляет 45 рублей за литр. Средний расход бензина на 100 км — 9 литров. Сколько рублей потратил водитель автомобиля на бензин в апреле?

Ответ: ____________________.

1.14 Одна капсула лекарственного препарата весит 50 мг и содержит 9 % действующего вещества. Пациенту весом 60 кг врач прописывает 0,3 мг действующего вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько капсул этого лекарства следует дать пациенту в течение суток?

Ответ: ____________________.

4.1 Симметричную монету бросают 3 раза. Определите вероятность того, что орёл не выпадет ни разу.

Ответ: ____________________.

4.2 Предприятие выпускает стереосистемы. Из 200 стереосистем в среднем 23 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что приобретённая стереосистема окажется без дефектов.

Ответ: ____________________.

4.3 Группа археологов состоит из 48 человек. Их катером перевозят на другой берег реки по 6 человек за один рейс. Порядок перевозки археологов случаен. Найдите вероятность того, что археолог Никитин будет перевезён первым рейсом.

Ответ: ______________________________.

4.4 На потоке 2401 студент, среди них два друга — Сергей и Валерий. Поток случайным образом разбивают на 49 равных групп. Найдите вероятность того, что Сергей и Валерий окажутся в одной группе.

Ответ: ______________________________.

4.5 Вероятность того, что изделие содержит дефект, — 0,03. В каждой упаковке по 2 изделия. Найдите вероятность того, что оба изделия в упаковке не содержат дефектов.

Ответ: ______________________________.

4.6 Из Пскова в Печоры ежедневно ходит рейсовый автобус. Вероятность того, что 1 сентября в автобусе окажется меньше 13 школьников, равна 0,84. Вероятность того, что окажется меньше 8 школьников, равна 0,49. Найдите вероятность, что 1 сентября в автобусе будет от 8 до 12 школьников.

Ответ: ______________________________.

4.7 В кафе работает 3 официанта. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,6. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все 3 официанта заняты одновременно.

Ответ: ______________________________.

4.8 Футбольная команда рассчитывает пройти в следующий тур соревнований. Для этого нужно набрать хотя бы 8 очков в двух встречах. Если команда выигрывает, она получает 5 очков, в случае ничьей — 3 очка, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий тур соревнований. Известно, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,3.

Ответ: ______________________________.

4.9 В Тридевятом царстве бывает два типа погоды: хорошая и плохая, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,7 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня, 13 августа, погода в Тридевятом царстве хорошая. Найдите вероятность того, что 16 августа в Тридевятом царстве будет плохая погода.

Ответ: ______________________________.

4.10 В распоряжении стрелка 5 ружей, из которых 3 пристреляны. Вероятность попадания при выстреле из пристрелянного ружья равна 0,95, для непристрелянного ружья эта вероятность равна 0,7. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок производит один выстрел из наудачу взятого ружья.

Ответ: ______________________________.

4.11 В копилке Максима лежат монеты различного достоинства: 10 рублёвых, 8 двухрублёвых, 9 пятирублёвых и 13 десятирублёвых. Максим наугад достаёт из копилки одну монету. Найдите вероятность того, что оставшаяся в копилке сумма составит более 198 рублей.

Ответ: ______________________________.

4.12 В наборе домино 28 костей. Какова вероятность, что игрок возьмёт кость с суммой очков менее 4? Ответ округлите до сотых.

Ответ: ______________________________.

4.13 При изготовлении гаек высотой 31 мм вероятность того, что высота будет отличаться от заданной не больше чем на 0,1 мм, равна 0,936. Найдите вероятность того, что случайная гайка будет иметь высоту менее 30,9 мм или более 31,1 мм.

Ответ: ______________________________.

4.14 Магазин закупает лампочки у двух производителей. У первого производителя являются качественными 92 % лампочек, у второго производителя — 84 %. Всего в магазине 87 % качественных лампочек. Найдите вероятность того, что качественная лампочка, купленная в магазине, заказана у первого производителя.

Ответ: ______________________________.

10 **10.1** Независимое бюро ведёт рейтинг новостных порталов. Рейтинг зависит от индекса содержательности *Sd*, актуальности *Ak*, объективности публикаций *Tr*, а также от качества сайта *Q*. Каждый отдельный индекс является натуральным числом от 1 до 6. Рейтинг вычисляется по формуле

$$R=\frac{4Sd+Ak+2Tr+Q}{N}.$$

Вычислите рейтинг портала «Нева», у которого все индексы максимальны и $N=5$.

Ответ: ______________________________.

10.2 В дне бассейна есть отверстие для слива воды. После его открытия высота воды меняется по закону $H(t)=H_0-\sqrt{2gH_0}kt+\frac{g}{2}k^2t^2$, где t — время в секундах, прошедшее с момента открытия слива, $H_0=20$ — начальная высота столба воды в метрах, $k=0{,}01$ — отношение площадей поперечных сечений слива и бассейна, g — ускорение свободного падения $\left(g=10\text{ м/с}^2\right)$. Найдите высоту воды в бассейне через 150 секунд с момента открытия слива. Ответ дайте в метрах.

Ответ: ______________________________.

10.3 Кровлю поддерживает цилиндрическая балка. Кровля и балка оказывают давление на опору, которое вычисляется по формуле $P=\frac{4mg}{\pi D^2}$ (Па). Известно, что общая масса кровли и балки m = 300 кг, D — диаметр балки (в метрах). Примите, что $g=10\text{ м/с}^2$, $\pi=3$. Каков диаметр балки (в метрах), если давление, оказываемое на опору, составляет 100 кПа?

Ответ: ________________________________.

10.4 С холма высотой h метров Сергей Петрович наблюдает линию горизонта. Расстояние от Сергея Петровича до наблюдаемой им линии горизонта можно вычислить по формуле $l=\sqrt{\dfrac{Rh}{500}}$ (км), где $R=6400$ км — радиус Земли. Найдите высоту холма, если горизонт виден на расстоянии 10 километров. Ответ округлите до десятых долей метра.

Ответ: ________________________________.

10.5 Два набивных мяча движутся с одинаковой скоростью $v=6$ м/с под углом 2α друг к другу. Масса каждого мяча составляет 5 кг. Энергия (в Дж), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, вычисляется по формуле $Q=mv^2\sin^2\alpha$, где m — масса (в кг), v — скорость (в м/с). Найдите, под каким углом 2α должны двигаться набивные мячи, чтобы в результате соударения выделилась энергия, равная 135 Дж. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ________________________________.

10.6 На нити подвешен груз, совершающий колебания. Амплитуда колебаний вычисляется по формуле $A=\dfrac{A_0\omega_p^{\,2}}{\left|\omega_p^{\,2}-\omega^2\right|}$, где ω — частота вынуждающей силы (c^{-1}), A_0 — постоянный параметр, $\omega_p=744\ c^{-1}$ — резонансная частота. Найдите наибольшую частоту ω, не превышающую резонансную, для которой амплитуда колебаний превосходит A_0 на 80 %. Ответ дайте в c^{-1}.

Ответ: ________________________________.

10.7 Электрическая цепь включает реостат и звонок, подключённые параллельно. Сопротивление реостата составляет

$R_1 = 90$ Ом. Каково наибольшее сопротивление R_2 звонка, если известно, что общее сопротивление реостата и звонка вычисляется по формуле $R_{общ} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ (Ом) и оно не превышает 9 Ом? Ответ выразите в омах.

Ответ: ____.

10.8 Конструкторское бюро «Рубин» испытывает изобретённый аппарат для погружения под воду. Аппарат имеет форму куба. На него действует выталкивающая сила $F_A = \rho g l^3$ (Н), где l — длина ребра куба в метрах, $\rho = 1000$ кг/м^3 — плотность воды, g — ускорение свободного падения (считайте $g = 9{,}8$ Н/кг). Какой может быть максимальная длина ребра куба (в метрах), если выталкивающая сила при погружении не более 264,6 кН?

Ответ: ____.

10.9 На пружине колеблется гиря. Её скорость меняется по закону $\upsilon(t) = 4\sin \pi t$ (см/с), где t — время (в секундах). Какую долю времени из первой секунды скорость движения была не менее 2 см/с? Ответ выразите десятичной дробью. Ответ округлите до сотых.

Ответ: ____.

10.10 Платформа массой $M = 180$ кг стоит на рельсах. От прыжка скейтбордиста она начинает двигаться со скоростью $u = \frac{m}{m+M} \upsilon \cos \alpha$ (м/с), где $m = 60$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, $\upsilon = 4$ м/с — скорость прыжка. Под каким максимальным углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу не менее чем до 0,5 м/с?

Ответ: ____.

10.11 Чтобы получить на экране увеличенное изображение лампочки, используется собирающая линза с фокусным расстоянием $f = 40$ см. Расстояние l_1 от линзы до лампочки изменяется в пределах от 35 до 65 см, а расстояние l_2 от линзы до экрана — в пределах от 200 до 250 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение $\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}=\frac{1}{f}$. На каком наибольшем расстоянии от линзы нужно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким? Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: ______________________.

10.12 Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана — Больцмана, согласно которому $P=\sigma ST^4$, где P — мощность излучения звезды (в ваттах), $\sigma=5{,}7\cdot10^{-8}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{К}^4}$ — постоянная, S — площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), а T — температура (в кельвинах). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\frac{1}{128}\cdot10^{20}\ \text{м}^2$, а мощность её излучения — $1{,}14\cdot10^{25}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в кельвинах.

Ответ: ______________________.

10.13 Серёжа быстро вращает ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости. При вращении ведёрка сила давления воды на дно максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет неотрицательной. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна $P=m\left(\frac{v^2}{L}-g\right)$, где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте, что $g=10\ \text{м/с}^2$). С какой наименьшей скоростью Серёже надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 202,5 см? Ответ выразите в м/с.

Ответ: ______________________.

11.1 Цена на робот-пылесос снизилась на 15 %, затем ещё на 12 %. Какой стала новая цена робота-пылесоса, если до первого снижения она составляла 18 000 рублей?

Ответ: ______________________________.

11.2 Елисей решил 85 % задач в зачётной работе, а Мирослава — 90 %. При этом Елисей решил только на одну задачу больше, чем Мирослава. Сколько задач было в зачётной работе?

Ответ: ______________________________.

11.3 Новая заработная плата врачей в результате последовательных повышений в январе и мае 2018 года составила $\frac{15}{8}$ частей от заработной платы в декабре 2017 года. На сколько процентов повысилась заработная плата врачей в первый раз, если второе повышение было вдвое больше (в процентном отношении) первого?

Ответ: ______________________________.

11.4 Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора после смешивания 8 литров 15%-ного раствора прополиса с 12 литрами 25%-ного раствора прополиса?

Ответ: ______________________________.

11.5 В доменной печи 20 тонн чугуна можно выплавить из 40 тонн руды. Получившийся чугун содержит 6 % примесей. Каков процент примесей в руде?

Ответ: ______________________________.

11.6 Путешественник Михаил проехал расстояние от Подпорожья до Луги за 3 дня. В первый день Михаил проехал $\frac{1}{5}$ всего пути и ещё 60 км, во второй — $\frac{1}{4}$ всего пути и ещё 20 км, в третий день — $\frac{23}{80}$ всего пути и оставшиеся 25 км. Сколько километров между Подпорожьем и Лугой?

Ответ: ______________________________.

11.7 Из городов Москвы и Иваново навстречу друг другу одновременно выехали две легковые машины и встретились через 3 часа на расстоянии 130 км от города Иваново. Найдите скорость легковой машины, выехавшей из Москвы, если известно, что расстояние от Москвы до Иваново равно 310 км. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ______________________________.

11.8 Если Дима стоит неподвижно на ступени эскалатора в торговом центре, то он поднимается на второй этаж за 1 минуту. Если Дима будет взбегать по ступеням неподвижного эскалатора, то он доберётся до второго этажа за 40 с. За какое время Дима поднимется на второй этаж, если начнёт взбегать по движущемуся эскалатору?

Ответ: ______________________________.

11.9 В 12:00 путешественники отправляются от пристани на моторной лодке по течению реки. Им необходимо вернуться обратно к 18:00. Скорость течения реки 3 км/ч, скорость моторной лодки в неподвижной воде 12 км/ч. На какое наибольшее расстояние путешественники могут отплыть от пристани если перед тем, как возвратиться обратно, они пробудут на берегу 2 ч?

Ответ: ______________________________.

11.10 Василий и Пётр, работая над заказом одновременно, выполнили всю работу за 5 дней. Если бы Василий работал в 2 раза быстрее, а Пётр — в 2 раза медленнее, то всю работу они выполнили бы за 4 дня. За сколько дней выполнил бы всю работу Василий, работая один?

Ответ: ______________________________.

11.11 Марина и Настя выполняют одинаковое тестовое задание по немецкому языку. Марина отвечает за час на 24 вопроса теста, а Настя — на 40. Девочки одновременно приступили к выполнению задания, и Марина закончила свой тест позже Насти на 90 минут. Сколько вопросов содержит тест?

Ответ: ______________________________.

11.12 Бригада рабочих должна по плану заготовить за несколько дней 216 $м^3$ лесоматериалов. Первые 3 дня бригада выполняла ежедневно установленную планом норму, а затем каждый день заготовляла 8 $м^3$ сверх плана, поэтому за день до установленного планом срока было заготовлено 232 $м^3$ лесоматериалов. Сколько кубических метров лесоматериалов в день должна была заготовлять по плану бригада рабочих?

Ответ: ______________________________.

11.13 Рабочие компании «Аква» производят замену водопроводных труб общей длиной 200 метров. Ежедневно рабочие увеличивают норму замены труб на одно и то же число метров. Известно, что за первый день рабочие заменили 10 метров водопроводных труб. Определите, сколько метров труб заменили рабочие в последний день, если вся работа была выполнена за 5 дней.

Ответ: ______________________________.

11.14 Муравей ползёт от одной берёзы к другой. Каждый день муравей проползает на одно и то же расстояние больше, чем в предыдущий. Известно, что в первый день муравей прополз 3 метра. Сколько метров прополз муравей в третий день, если весь путь он преодолел за 4 дня, а расстояние между берёзами 48 метров?

Ответ: ______________________________.

11.15 В семье три взрослых человека: муж, жена и бабушка-пенсионерка. Если бы зарплата жены увеличилась втрое, общий доход семьи вырос бы на 80 %. Если бы пенсия бабушки уменьшилась вдвое, общий доход семьи сократился бы на 4 %. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата мужа?

Ответ: ______________________________.

11.16 Семь одинаковых ручек дешевле пенала на 9 %. На сколько процентов десять таких же ручек дороже пенала?

Ответ: ______________________________.

11.17 Юбка дороже блузки на 30 % и дешевле кардигана на 22 %. На сколько процентов блузка дешевле кардигана?

Ответ: ______________________________.

11.18 Смешали два раствора уксусной кислоты, одинаковые по массе. Концентрация первого раствора составляет 15 %. В результате смешивания получили 18%-ный раствор уксусной кислоты. Определите концентрацию второго раствора. Ответ дайте в процентах.

Ответ: ______________________________.

11.19 Первая и вторая трубы могут наполнить резервуар за 21 час. Вторая и третья трубы могут наполнить этот же резервуар за 28 часов, а первая и третья — за 36 часов. За сколько часов три трубы наполнят резервуар, работая вместе?

Ответ: ______________________________.

11.20 В цехе работают три мастера и два подмастерья. Они могут выполнить заказ за 2 часа. Если к ним добавить ещё двух подмастерьев, то заказ будет выполнен за 1,5 часа. Сколько подмастерьев нужно добавить в цех, чтобы заказ был выполнен за 1 час?

Ответ: ______________________________.

17.1 В январе 2001 года в банке брали кредит в размере S млн рублей сроком на 3 года. Кредит возвращался в соответствии с условиями:

- каждый февраль долг увеличивался на 30 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с марта по август каждого года выплачивалась одним платежом часть долга;
- в сентябре каждого года долг составлял часть кредита согласно таблице:

Месяц и год	Янв. 2001	Янв. 2002	Янв. 2003	Янв. 2004
Долг (млн руб.)	S	$0{,}6S$	$0{,}25S$	0

При каком наибольшем целом значении S каждая из выплат будет меньше 4 млн рублей?

17.2 Елена Владимировна решила взять в банке 331 000 рублей в кредит на 3 месяца под 10 % в месяц. Елена Владимировна знает, что существует две схемы выплаты кредита.

По первой схеме банк в конце каждого месяца начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10 %), затем Елена Владимировна должна перевести в банк фиксированную сумму и в результате выплатить весь долг тремя равными платежами (аннуитетные платежи).

По второй схеме сумма долга в конце каждого месяца увеличивается на 10 %, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Еленой Владимировной. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину (дифференцированные платежи).

Какую схему выгоднее выбрать Елене Владимировне? Сколько рублей будет составлять эта выгода?

17.3 Владимир Петрович купил акцию за 8000 рублей. Цена акции каждый год возрастает на 1000 рублей. Владимир Петрович может в любой момент продать акцию и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 8 %. В течение какого года после покупки Владимир Петрович должен продать акцию, чтобы через 25 лет после покупки этой акции сумма на банковском счёте была наибольшей?

17.4 У Сергея Никаноровича 28 мая 2010 года родился сын. В связи с этим он открыл в банке «Мечта» вклад на 1000 рублей. Каждый следующий год 28 мая Сергей Никанорович пополнял вклад на 1000 рублей. По условиям договора банк ежегодно 18 мая начислял 20 % на сумму вклада. Через 6 лет у Сергея Никаноровича родилась дочь, и он открыл в банке «Эксперт» ещё один вклад на 2200 рублей. Каждый следующий год он пополнял этот вклад на 2200 рублей, а банк ежегодно начислял 44 % на сумму вклада. Через сколько лет после рождения сына суммы на каждом из двух вкладов сравняются, если деньги из вкладов не изымаются?

17.5 15 января Артур взял в кредит 6 миллионов рублей на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего месяца;
- с 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15 февраля, апреля и июня долг должен быть на $\frac{2}{9}$ части от исходной суммы долга меньше, чем величина долга 15-го числа предыдущего месяца;
- 15 марта, мая и июля долг должен быть на $\frac{1}{9}$ часть от исходной суммы долга меньше, чем величина долга 15-го числа предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 600 000 рублей больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

17.6 Дмитрий Казимирович взял кредит в банке на 4 года на сумму 7 320 000 рублей. Условия возврата кредита таковы: в конце каждого года банк увеличивает текущую сумму долга на 20 %. Дмитрий Казимирович хочет выплатить весь долг двумя равными платежами — в конце второго и четвёртого годов. При этом платежи в каждом случае выплачиваются после начисления процентов. Сколько рублей составит каждый из этих платежей?

17.7 В распоряжении бригадира Семёнова имеется 24 рабочих. Семёнов должен распределить рабочих на объекты A и B. Если на объекте A работает t человек, то их зарплата составляет $4t^2$ тысяч рублей. Если на объекте B работает t человек, то их зарплата составляет t^2 тысяч рублей. Как нужно распределить на эти объекты рабочих, чтобы выплаты на их зарплату оказались наименьшими? Сколько тысяч рублей в этом случае нужно будет заплатить рабочим?

17.8 ОАО «Мясной двор» производит тушёнку в двух видах тары — стеклянной и жестяной. Производственные мощности позволяют выпускать в день 90 центнеров тушёнки в стеклянной таре или 80 центнеров в жестяной таре. Необходимо, чтобы тушёнки в каждом из видов тары было выпущено не менее 20 центнеров. В таблице приведены себестоимость и отпускная цена завода за 1 центнер продукции для обоих видов тары.

Вид тары	Себестоимость (за 1 центнер)	Отпускная цена (за 1 центнер)
Стеклянная	1500 руб.	2100 руб.
Жестяная	1100 руб.	1750 руб.

Прибыль — это разница между отпускной стоимостью всей продукции и её себестоимостью. Определите, какую наибольшую прибыль получит ОАО «Мясной двор» за один день, если вся продукция реализуется без остатка.

17.9 В городе открыли новый отель. В отеле есть стандартные номера площадью 15 квадратных метров и номера люкс площадью 75 квадратных метров. Стандартный номер приносит отелю прибыль 1000 рублей в сутки, а номер люкс — 4000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег может заработать в сутки отель, если общая площадь номеров составляет 750 квадратных метров?

17.10 На двух предприятиях добывающей отрасли есть по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче руды чёрных или цветных металлов. На первом предприятии один рабочий за час добывает 0,1 кг руды чёрных металлов или 0,1 кг руды цветных металлов. На втором предприятии для добычи x кг руды чёрных металлов в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг руды цветных металлов в день требуется y^2 человеко-часов труда. Для нужд промышленности можно использовать руду или чёрных, или цветных металлов, причём 1 кг руды чёрных металлов можно заменить 1 кг руды цветных металлов. Какую наибольшую массу руды можно за сутки суммарно добыть на двух предприятиях?

17.11 Марк Захарович в июле 2019 года взял кредит в размере 6 600 000 рублей. Условия возврата кредита таковы:

- каждый январь долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь Марк Захарович должен выплатить часть долга;
- в июле 2020, 2021 и 2022 годов долг остаётся равным 6 600 000 рублей;
- суммы выплат 2023 и 2024 годов равны.

Найдите r, если в 2024 году Марк Захарович полностью выплатит долг и общие выплаты составят 12 600 000 рублей.

17.12 Пират Джек обнаружил затонувшее судно с изумрудами и рубинами. У Джека с собой был мешок. Полный мешок изумрудов весит 200 кг, полный мешок рубинов — 40 кг, а пустой мешок ничего не весит. Килограмм изумрудов можно продать за 20 тенге, а килограмм рубинов — за 60 тенге. Капитан Джек может унести с собой не более 100 кг. Какую наибольшую сумму денег он может выручить?

19.1 На окружности некоторым способом расставили натуральные числа от 1 до 21 (каждое число поставлено по одному разу). Затем для каждой пары соседних чисел нашли разность большего и меньшего.

а) Могли ли все полученные разности быть не меньше 11?

б) Могли ли все полученные разности быть не меньше 10?

в) Помимо полученных разностей, для каждой пары чисел, стоящих через одно, нашли разность большего и меньшего. Для какого наибольшего целого числа k можно так расставить числа, чтобы все разности были не меньше k?

19.2 На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 363. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

19.3 Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел: 1; –2; –3; 4; –5; 7; –8; 9. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел: 1; –2; –3; 4; –5; 7; –8; 9. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

19.4 На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно –3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

19.5 Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 14?

б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 900?

в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 123.

19.6 Целое число S является суммой не менее трёх последовательных членов непостоянной арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел.

а) Может ли S равняться 8?

б) Может ли S равняться 1?

в) Найдите все значения, которые может принимать .

19.7 Все члены возрастающих арифметических прогрессий $a_1, a_2 \ldots$ и $b_1, b_2 \ldots$ являются натуральными числами.

а) Приведите пример таких прогрессий, для которых $a_1b_1 + a_3b_3 = 3a_2b_2$.

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1b_1 + 2a_4b_4 = 3a_3b_3$?

в) Какое наибольшее значение может принимать произведение a_3b_3, если $a_1b_1 + 2a_4b_4 \leq 300$?

19.8 В группе поровну юношей и девушек. Юноши отправляли электронные письма девушкам. Каждый юноша отправил или 4 письма, или 21 письмо, причём и тех и других юношей было не менее двух. Возможно, что какой-то юноша отправил какой-то девушке несколько писем.

а) Могло ли оказаться так, что каждая девушка получила ровно 7 писем?

б) Какое наименьшее количество девушек могло быть в группе, если известно, что все они получили писем поровну?

в) Пусть все девушки получили различное количество писем (возможно, какая-то девушка не получила писем вообще). Каково наибольшее возможное количество девушек в такой группе?

19.9 Каждый из 28 студентов писал или одну из двух контрольных работ, или обе контрольные работы. За каждую работу можно было получить целое число баллов от 0 до 20 включительно. По каждой из двух контрольных работ в отдельности средний балл составил 15. Затем каждый студент назвал наивысший из своих баллов (если студент писал одну работу, то он назвал балл за неё). Среднее арифметическое названных баллов равно S.

а) Приведите пример, когда $S<15$.

б) Могло ли значение S быть равным 5?

в) Какое наименьшее значение могло принимать S, если обе контрольные работы писали 10 студентов?

19.10 Ученики одной школы писали тест. Результатом каждого ученика является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если он набрал не менее 73 баллов. Из-за того что задания оказались слишком трудными, было принято решение всем участникам теста добавить по 5 баллов, благодаря чему количество сдавших тест увеличилось.

а) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, не сдавших тест, понизился?

б) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, сдавших тест, понизился, и средний балл участников, не сдавших тест, тоже понизился?

в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 80, средний балл участников, сдавших тест, составил 90, а средний балл участников, не сдавших тест, составил 65. После добавления баллов средний балл участников, сдавших тест, стал равен 93, а не сдавших — 69. При каком наименьшем числе участников теста возможна такая ситуация?

Ответы

1.1 13.

■ **Решение**

В день отправления поезд едет $24\text{ ч }00\text{ мин}-19\text{ ч }23\text{ мин}=$ $=4\text{ ч }37\text{ мин}$, а на следующий день до момента прибытия он едет $7\text{ ч }25\text{ мин}$.

Всего в пути поезд проведёт $4\text{ ч }37\text{ мин}+8\text{ ч }23\text{ мин}=13\text{ ч}$.

1.2 61.

■ **Решение**

За 15 MMS-сообщений Артём заплатил $15\cdot 1{,}2=18$ (руб.). Значит, после отправки всех сообщений у Артёма осталось $79-18=61$ (руб.).

1.3 150.

■ **Решение**

Поскольку на 4 человека следует взять $\frac{3}{10}$ фунта джема, на одного человека нужно взять $\frac{3}{40}$ фунта джема. Тогда на 5 человек потребуется $\frac{15}{40}$ фунта джема, что составляет в граммах $\frac{15}{40}\cdot 400=150$ (г).

1.4 4.

■ **Решение**

Для покраски 48 м^2 древесины потребуется $48\cdot 150=7200\text{ г}=7{,}2$ (кг) эмали.

$7{,}2:2=3{,}6$. Следовательно, потребуется 4 банки эмали.

1.5 3.

■ **Решение**

В доме, в котором живёт Володя, на девяти этажах каждого подъезда $9 \cdot 4 = 36$ квартир. Разделим 83 на 36: $83 : 36 = 2\frac{11}{36}$. Значит, Володя живёт в третьем подъезде.

1.6 12.

■ **Решение**

$80 : 6{,}6 = 12\frac{4}{33}$, значит, можно купить 12 карандашей.

1.7 12.

■ **Решение**

Разделим 500 на 60: $500 : 60 = 8\frac{1}{3}$.

Значит, можно будет купить 8 упаковок зефира. Ещё 4 будут даны в подарок. Всего можно будет получить 12 упаковок зефира.

1.8 310,4.

■ **Решение**

Вычислим размер скидки: $320 \cdot 0{,}03 = 9{,}6$ (руб.).

Тогда учебник со скидкой будет стоить $320 - 9{,}6 = 310{,}4$ (руб.).

1.9 33 000.

■ **Решение**

Воспользуемся правилом нахождения числа по его проценту: $20\,460 : 0{,}62 = 33\,000$ (чел.).

1.10 148 750.

■ **Решение**

Численность детей в Таганроге составляет $250\,000 \cdot 0{,}15 = 37\,500$ (чел.).

Численность взрослого населения: $250\,000-37\,500=212\,500$ (чел.).

Из них не работает 30 %, значит, работающие жители составляют 70 % всего взрослого населения, то есть $212500\cdot 0,7=148750$ (чел.).

1.11 18.

■ **Решение**

После повышения цены папка-регистратор станет стоить $45+$ $+45\cdot 0,1=45\cdot 1,1=49,5$ (руб.).

Разделим 900 на 49,5: $900:49,5=18,1818...$

Значит, можно будет купить 18 папок.

1.12 3.

■ **Решение**

В каждом подъезде $6\cdot 4=24$ квартиры.

Разделим 51 на 24: $51:24=2\frac{1}{8}$, значит, Алексей Степанович живёт в третьем подъезде.

1.13 7290.

■ **Решение**

Так как расход на 100 км составляет 9 л, то на 1800 км: $1800:100\cdot 9=162$ (л).

Узнаем стоимость бензина: $45\cdot 162=7290$ (руб.).

1.14 4.

■ **Решение**

Вычислим, сколько миллиграммов действующего вещества содержится в одной капсуле: $50\cdot 0,09=4,5$ (мг).

Пациенту прописано в сутки количество действующего вещества $60\cdot 0,3=18$ (мг).

Ответим на вопрос задачи: $18:4,5=4$ (капсулы).

4.1 0,125.

■ **Решение**

Количество всевозможных исходов $n = 2^3 = 8$.

Так как орёл не выпал ни разу, то все 3 раза выпала решка, то есть благоприятный исход только один ($m = 1$).

Тогда $p = \frac{m}{n} = \frac{1}{8} = 0{,}125$.

4.2 0,885.

■ **Решение**

В среднем без дефектов выпускают $200 - 23 = 177$ стереосистем из каждых 200, поэтому искомая вероятность равна $p = \frac{m}{n} = \frac{177}{200} = 0{,}885$.

4.3 0,125.

■ **Решение**

В катере 6 мест, всего археологов 48. Тогда вероятность того, что археолог Никитин будет перевезён первым рейсом, равна $p = \frac{m}{n} = \frac{6}{48} = 0{,}125$.

4.4 0,02.

■ **Решение**

По условию задачи все группы равные, следовательно, количество студентов в каждой из них равно $\frac{2401}{49} = 49$.

В группе, в которую попал Сергей, для Валерия остаётся только 48 подходящих мест (ведь одно из мест в этой группе уже точно занял Сергей), то есть $m = 48$.

Всего же на потоке для Валерия остаётся $2401 - 1 = 2400$ различных мест, то есть $n = 2400$.

Тогда искомая вероятность равна $p = \frac{m}{n} = \frac{48}{2400} = 0{,}02$.

4.5 0,9409.

■ **Решение**

Вероятность того, что изделие не содержит дефекта, равно $p = 1 - 0{,}03 = 0{,}97$.

По теореме умножения вероятностей искомая вероятность равна $0{,}97 \cdot 0{,}97 = 0{,}9409$.

4.6 0,35.

■ **Решение**

Введём обозначения событий:

A — в автобусе меньше 8 школьников;

B — в автобусе от 8 до 12 школьников.

Тогда $A + B$ — в автобусе меньше 13 школьников.

События A и B несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий: $p(A+B) = p(A) + p(B)$.

Тогда, используя данные задачи, получаем: $0{,}84 = 0{,}49 + p(B)$, откуда $p(B) = 0{,}84 - 0{,}49 = 0{,}35$.

4.7 0,216.

■ **Решение**

Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Поэтому вероятность того, что все три официанта заняты, равна $0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}216$.

4.8 0,33.

■ **Решение**

Вероятность выигрыша и проигрыша равна 0,3, значит, вероятность ничьей равна $1 - 0{,}3 - 0{,}3 = 0{,}4$.

Команда может получить не меньше 8 очков в двух играх тремя способами: 3 + 5, 5 + 3, 5 + 5. Эти события несовместны, вероятность их суммы равна сумме их вероятностей. Каждое из этих событий представляет собой произведение двух независимых событий — результатов в первой и во второй играх. Отсюда имеем:

$$p(n \geq 8) = p(n=3) \cdot p(n=5) + p(n=5) \cdot p(n=3) + p(n=5) \cdot p(n=5) =$$
$$= 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}12 + 0{,}12 + 0{,}09 = 0{,}33.$$

4.9 0,468.

■ Решение

Для погоды на 14, 15 и 16 августа есть 4 варианта: ХХП, ХПП, ПХП, ППП (здесь Х — хорошая погода, П — плохая погода). Найдём вероятности наступления такой погоды:

$p(\text{ХХП}) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}147;$

$p(\text{ХПП}) = 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}147;$

$p(\text{ПХП}) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}027;$

$p(\text{ППП}) = 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}147.$

Указанные события несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий: $p(\text{ХХП}) + p(\text{ХПП}) + p(\text{ПХП}) +$

$+ p(\text{ППП}) = 0{,}147 + 0{,}147 + 0{,}027 + 0{,}147 = 0{,}468.$

4.10 0,85.

■ Решение

Пусть событие A — мишень поражена.

Введём систему гипотез:

H_1 — стрелок выберет пристрелянное ружьё;

H_2 — стрелок выберет непристрелянное ружьё.

Согласно условию задачи, $p(H_1) = \frac{3}{5} = 0{,}6$, $p(H_2) = \frac{2}{5} = 0{,}4.$

Условные вероятности равны $p(A|H_1) = 0{,}95$, $p(A|H_2) = 0{,}7.$

По формуле классической вероятности получим:

$$p(A) = p(A|H_1) \cdot p(H_1) + p(A|H_2) \cdot p(H_2) = 0{,}95 \cdot 0{,}6 + 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}85.$$

4.11 0,45.

■ Решение

У Максима в копилке лежит $10 + 8 + 9 + 13 = 40$ монет на сумму $10 + 16 + 45 + 130 = 201$ рубль.

Больше 198 рублей останется, если достать из копилки монету достоинством либо 1 рубль, либо 2 рубля. Таких монет $10+8=18$. Следовательно, искомая вероятность равна $18:40=0,45$.

4.12 0,21.

■ **Решение**

Подходящими являются кости: (0; 0); (0; 1); (0; 2); (0; 3); (1; 1); (1; 2), то есть 6 костей.

По формуле классической вероятности получим: $p=\frac{m}{n}=\frac{6}{28}\approx$ $\approx 0,214\approx 0,21$.

4.13 0,064.

■ **Решение**

Из условия имеем: вероятность того, что высота гайки будет в пределах от 30,9 до 31,1 мм, равна 0,936. Следовательно, искомая вероятность противоположного события равна $1-0,936=0,064$.

4.14 0,375.

■ **Решение**

Пусть событие A — лампочка является качественной.

Введём систему гипотез:

H_1 — лампочку изготовил первый производитель;

H_2 — лампочку изготовил второй производитель.

Условные вероятности равны $p(A|H_1)=0,92$, $p(A|H_2)=0,84$. По условию имеем: $p(A)=0,87$.

Пусть $p(H_1)=x$, тогда $p(H_2)=1-x$.

По формуле классической вероятности

$p(A)=p(A|H_1)\cdot p(H_1)+p(A|H_2)\cdot p(H_2)=0,92\cdot x+0,84\cdot(1-x)$.

Получим уравнение: $0,92\cdot x+0,84\cdot(1-x)=0,87\Leftrightarrow 0,08x=0,03\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=0,375$ — искомая вероятность.

10.1 9,6.

■ **Решение**

По условию задачи все показатели максимальны, то есть $Sd = Ak = Tr = Q = 6$.

Вычислим рейтинг по формуле: $R = \frac{4 \cdot 6 + 6 + 2 \cdot 6 + 6}{N} = \frac{48}{5} = 9{,}6.$

10.2 1,25.

Подставив значения в формулу, получим:

$$H(t) = 20 - \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 20} \cdot 0{,}01 \cdot 150 + \frac{10}{2} 0{,}01^2 \cdot 150^2 = 20 - 30 + 11{,}25 = 1{,}25.$$

10.3 0,2.

■ **Решение**

Заметим, что 100 кПа = 100 000 Па. Решим уравнение, исходя из того, что $P = 100\,000$. Подставив в формулу заданные значения, получим: $\frac{4 \cdot 300 \cdot 10}{3D^2} = 100\,000$; $4000 = 100\,000D$; $D^2 = \frac{1}{25}$; $D = \pm\frac{1}{5} = \pm 0{,}2$.
По условию задачи $D > 0$, поэтому отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи. Получаем $D = 0{,}2$ (м).

10.4 7,8.

■ **Решение**

Известно, что $l = 10$. Составим уравнение:

$$\sqrt{\frac{6400h}{500}} = 10 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{64h}{5}} = 10 \Leftrightarrow \frac{64h}{5} = 100 \Leftrightarrow h = 7{,}8125 \approx 7{,}8 \text{ м.}$$

10.5 120.

■ **Решение**

Подставим в формулу для вычисления энергии все известные значения.

Получим уравнение: $135 = 5 \cdot 6^2 \sin^2\alpha \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (так как $0° < \alpha < 90°$). Получим, что $\alpha = 60°$. Следовательно, $2\alpha = 120°$.

10.6 496.

■ Решение

Из условия задачи $\omega < \omega_p$, значит, $\omega^2 < \omega_p{}^2$, поэтому $\left|\omega_p{}^2 - \omega^2\right| = \omega_p{}^2 - \omega^2$. Получим формулу: $A = \frac{A_0\omega_p{}^2}{\omega_p{}^2 - \omega^2}$. По условию $A = 1{,}8A_0$.

Составим уравнение: $1{,}8A_0 = \frac{A_0\omega_p{}^2}{\omega_p{}^2 - \omega^2} \Leftrightarrow 1{,}8 = \frac{\omega_p{}^2}{\omega_p{}^2 - \omega^2} \Leftrightarrow \frac{9}{5} = \frac{\omega_p{}^2}{\omega_p{}^2 - \omega^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9\omega_p{}^2 - 9\omega^2 = 5\omega_p{}^2 \Leftrightarrow 4\omega_p{}^2 = 9\omega^2 \Leftrightarrow \omega^2 = \frac{4}{9}\omega_p{}^2$.

Отсюда получаем, что $\omega = \frac{2}{3}\omega_p = \frac{2}{3} \cdot 744 = 496$ с$^{-1}$.

10.7 10.

■ Решение

Решим неравенство $R_{общ} \le 9$ Ом.

Подставив значения, получим: $\frac{90R_2}{90 + R_2} \le 9$; $90R_2 \le 9(90 + R_2)$;

$90R_2 \le 810 + 9R_2$; $81R_2 \le 810$; $R_2 \le 10$ Ом.

10.8 3.

■ Решение

Будем учитывать, что 264,6 кН = 264 600 Н.

Решим неравенство $F_A \le 264\,600$.

При заданных значениях получим: $1000 \cdot 9{,}8 \cdot l^3 \le 264\,600$, $l^3 \le 27$, $l \le 3$ м.

10.9 0,67.

■ **Решение**

Из условия задачи получим неравенство: $\upsilon \geq 2$.

Подставив значения, получим: $4\sin\pi t \geq 2$; $\sin\pi t \geq \frac{1}{2}$;

$\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq \pi t \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Поскольку t — доля времени из первой секунды, то $\frac{1}{6} \leq t \leq \frac{5}{6}$.

Таким образом, $\frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3} = 0{,}666\ldots \approx 0{,}67$.

10.10 60.

■ **Решение**

Из условия получим неравенство: $u \geq 0{,}5$, где $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Подставив значения, получим: $\frac{60}{60+180} \cdot 4\cos\alpha \geq 0{,}5$; $\cos\alpha \geq \frac{1}{2}$;

$0^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$.

Следовательно, максимальный угол равен 60°.

10.11 50.

■ **Решение**

Требуется найти l_1. Из условия задачи получим: $\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} = \frac{1}{40}$, откуда $\frac{1}{l_1} = \frac{1}{40} - \frac{1}{l_2}$. Для того чтобы l_1 было наибольшим, необходимо, чтобы дробь $\frac{1}{l_1}$ принимала наименьшее значение, то есть разность $\frac{1}{40} - \frac{1}{l_2}$ должна принимать наименьшее значение. Это возможно при наибольшем значении вычитаемого $\frac{1}{l_2}$. Следовательно, $l_2 = 200$.

Значит, $\frac{1}{l_1} = \frac{1}{40} - \frac{1}{200} = \frac{5-1}{200} = \frac{4}{200} = \frac{1}{50}$. Таким образом, $l_1 = 50$.

10.12 4000.

■ **Решение**

Подставим значения в формулу: $1{,}14\cdot 10^{25}=5{,}7\cdot 10^{-8}\cdot\dfrac{1}{128}\cdot 10^{20}\cdot T^4$.

Отсюда получим: $T^4=\dfrac{1{,}14\cdot 10^{25}\cdot 128}{5{,}7\cdot 10^{-8}\cdot 10^{20}}\Leftrightarrow T^4=25{,}6\cdot 10^{13}\Leftrightarrow T^4=256\cdot 10^{12}$.

Учитывая, что $T>0$, получим $T=4\cdot 10^3=4000$.

10.13 4,5.

■ **Решение**

Заметим, что $L=202{,}5\,\text{см}=2{,}025\,\text{м}$. Подставим заданные значения в формулу: $P=m\left(\dfrac{v^2}{2{,}025}-10\right)$. Вода из ведёрка не будет выливаться, если $P\geq 0$. Получим неравенство: $m\left(\dfrac{v^2}{2{,}025}-10\right)\geq 0$.

Так как масса $m>0$, разделим обе части неравенства на m:

$\dfrac{v^2}{2{,}025}-10\geq 0\Leftrightarrow\dfrac{v^2}{2{,}025}\geq 10\Leftrightarrow v^2\geq 20{,}25$.

Учитывая, что $v>0$, получим: $v\geq 4{,}5$. Значит, наименьшая скорость равна 4,5 м/с.

11

11.1 13 464.

■ **Решение**

Перый раз цена робота-пылесоса снизилась на 15 % и стала составлять 85 % от первоначальной, поэтому $18\,000\cdot 0{,}85=$ $=15\,300$ (руб.) стоил робот-пылесос после первого снижения цены.

После второго снижения цена робота-пылесоса стала составлять 88% от предыдущей, то есть $15\,300\cdot 0{,}88=13\,464$ (руб.) — цена после двух снижений.

11.2 20.

■ **Решение**

Елисей решил на одну задачу больше, чем Мирослава, или на $90\% - 85\% = 5\%$. Отсюда количество задач в зачётной работе: $1:0,05 = 20$.

Другой способ решения: 5 % — это одна задача, а 100 % — $\frac{1 \cdot 100\%}{5\%} = 20$ (задач).

11.3 25.

■ **Решение**

После двух повышений зарплата составила $\frac{15}{8} = 1,875$ от первоначальной. Пусть в первый раз зарплата повысилась на x и составила $1 + x$. Во второй раз зарплата увеличилась на $2x$ и составила $1 + x + (1 + x)2x = 1,875 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 0,875 = 0$. Решая это уравнение, находим: $x_1 = 0,25$ и $x_2 = -1,75$. Второй корень не подходит по условию задачи, значит, ответом является число 0,25, или 25 %.

11.4 21.

■ **Решение**

Общая масса раствора составляет $8 + 12 = 20$ (л). В первом растворе содержится $8 \cdot 0,15 = 1,2$ (л) прополиса, во втором — $12 \cdot 0,25 = 3$ (л). В растворе содержится $1,2 + 3 = 4,2$ (л) вещества, или $\frac{4,2}{20} \cdot 100\% = 21\%$.

11.5 53.

■ **Решение**

В 20 т чугуна содержится 94 % чистого чугуна, или $20 \cdot 0,94 = 18,8$ (т). Следовательно, в руде содержится $40 - 18,8 = 21,2$ (т) примесей, или $\frac{21,2}{40} \cdot 100\% = 53\%$.

11.6 400.

■ **Решение**

Пусть S — весь путь. В первый день турист проехал $\frac{S}{5}+60$ км, во второй — $\frac{S}{4}+20$, в третий — $\frac{23S}{80}+25$.

Значит, $S=\frac{S}{5}+60+\frac{S}{4}+20+\frac{23S}{80}+25=\frac{23S+16S+20S}{80}+105=\frac{59S}{80}+105$.

Отсюда $S=400$ (км).

11.7 60.

■ **Решение**

Расстояние от места встречи до Москвы составляет $310-130=180$ (км).

Значит, скорость легковой машины, выехавшей из Москвы, — $v=\frac{180}{3}=60$ (км/ч).

11.8 24.

■ **Решение**

Одна минута — это 60 с. Пусть скорость эскалатора x м/с, тогда за минуту неподвижный человек на эскалаторе поднимется вверх на $60x$ м.

Скорость бегущего по неподвижному эскалатору человека составляет $v=\frac{60x}{40}=1{,}5x$ (м/с).

Скорость бегущего по движущемуся эскалатору человека $x+1{,}5x=2{,}5x$, значит, вверх по движущемуся эскалатору человек взбежит за $\frac{60x}{2{,}5x}=24$ (с).

11.9 22,5.

■ **Решение**

Пусть x — расстояние, на которое путешественники могут отплыть от пристани.

Тогда время, затраченное на путь по течению, составит $\frac{x}{12+3}=\frac{x}{15}$, против течения — $\frac{x}{12-3}=\frac{x}{9}$. На весь путь они затратили $6-2=4$ (ч).

Составим и решим уравнение: $\frac{x}{15}+\frac{x}{9}=4$; $8x=180$; $x=22{,}5$.

11.10 10.

■ **Решение**

Примем работу за единицу. Пусть x_1 — производительность Василия, x_2 — производительность Петра.

Работая вместе, они выполняют работу за 5 дней, то есть $\frac{1}{x_1+x_2}=5$. Если бы Василий работал в 2 раза быстрее, а Пётр — в 2 раза медленнее, то всю работу они выполнили бы за 4 дня, то есть $\frac{1}{2x_1+0{,}5x_2}=4$. Из первого выражения $x_2=\frac{1-5x_1}{5}$. Подставим его во второе выражение: $\frac{1}{2x_1+0{,}5\left(\frac{1-5x_1}{5}\right)}=4$, откуда $x_1=0{,}1$, значит, Василий выполнит работу за $1:0{,}1=10$ (дней).

11.11 90.

■ **Решение**

Пусть x — количество вопросов в тесте. Марина выполняла тест $\frac{x}{24}$ часа, Настя — $\frac{x}{40}$. Марина закончила свой тест на 90 минут (1,5 часа) позже Насти, значит, $\frac{x}{24}-\frac{x}{40}=1{,}5$. Отсюда $x=90$.

11.12 24.

■ **Решение**

Пусть x — план заготовки в день. Тогда по плану бригада должна выполнить работу за $\frac{216}{x}$ дней.

За первые 3 дня бригада заготовила $3x$ древесины. В четвёртый и последующий дни заготовка составила $x+8$, значит, за остальные дни бригада заготовила $(x+8)\left(\frac{216}{x}-4\right)$.

По условию $3x+(x+8)\left(\frac{216}{x}-4\right)=232$, отсюда $x=24$.

11.13 70.

■ **Решение**

Из условия задачи $a_1=10$, $n=5$, $S_5=200$.

$S_5=\frac{10+a_5}{2}\cdot 5=200$, отсюда $a_5=70$.

11.14 15.

■ **Решение**

Путь муравья составляет арифметическую прогрессию, где $a_1=3$, $n=4$, $S_4=48$.

$S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}n$; $48=\frac{2\cdot 3+d(4-1)}{2}4$, отсюда $d=6$. Следовательно, в третий день муравей прополз $a_3=3+2\cdot 6=15$ (м).

11.15 52.

■ **Решение**

Способ 1

Обозначим через x, y, z доход мужа, жены и бабушки (в %) соответственно. Сумма всех доходов составляет 100 %. Из условия «если бы зарплата жены увеличилась втрое, общий доход семьи вырос бы на 80 %» получим систему уравнений: $\begin{cases} x+y+z=100, \\ x+3y+z=180. \end{cases}$

Вычтем из второго уравнения первое: $2y=80 \Rightarrow y=40$.

Из условия «если бы пенсия бабушки уменьшилась вдвое, общий доход семьи сократился бы на 4 %» получим систему уравнений:
$\begin{cases} x+y+z=100, \\ x+y+0{,}5z=96. \end{cases}$

Вычтем из первого уравнения второе: $0{,}5z=4 \Rightarrow z=8$. Тогда доход мужа в процентах равен $100-(40+8)=52$.

Способ 2

Условие «если бы зарплата жены увеличилась втрое, общий доход семьи вырос бы на 80 %» означает, что две зарплаты жены составляют 80 % дохода семьи, то есть одна зарплата составляет 40 % дохода семьи. Условие «если бы пенсия бабушки уменьшилась вдвое, общий доход семьи сократился бы на 4 %» означает, что половина пенсии бабушки составляет 4 % дохода семьи, то есть вся пенсия бабушки составляет 8 % дохода семьи. Таким образом, зарплата мужа составляет $100-(40+8)=52\,\%$ дохода семьи.

11.16 30.

■ Решение

Семь одинаковых ручек дешевле пенала на 9 %, поэтому стоимость семи ручек составляет 91 % от стоимости пенала. Тогда стоимость одной ручки составляет $91:7=13\,\%$. А стоимость десяти ручек составляет $13\cdot 10=130\,\%$ стоимости пенала, то есть десять ручек на 30 % дороже пенала.

11.17 40.

■ Решение

Пусть цена юбки — u, цена блузки — b, цена кардигана — k.

Юбка дороже блузки на 30 %, поэтому её цена составляет 130 % от цены блузки, то есть $u=1{,}3b$.

Юбка дешевле кардигана на 22 %, поэтому её цена составляет 78 % от цены кардигана, то есть $u=0{,}78k$.

Отсюда получаем: $1{,}3b = 0{,}78k \Rightarrow b = \dfrac{0{,}78k}{1{,}3} \Rightarrow b = 0{,}6k$. Это значит, что цена блузки составляет 60 % от цены кардигана, то есть блузка дешевле кардигана на $100\,\% - 60\,\% = 40\,\%$.

11.18 21.

■ Решение

Пусть m — масса первого и второго растворов (по условию массы одинаковые), x — концентрация второго раствора (в процентах). Первый раствор содержит $0{,}15m$ уксусной кислоты, второй — $0{,}01x \cdot m$ уксусной кислоты. Масса раствора после смешивания равна $2m$, уксусной кислоты в полученном растворе — $0{,}18 \cdot 2m = 0{,}36m$.

Составим уравнение: $0{,}15m + 0{,}01x \cdot m = 0{,}36m \Rightarrow 0{,}01x \cdot m = 0{,}21m$. Так как $m > 0$, можно разделить обе части уравнения на m: $0{,}01x = 0{,}21 \Rightarrow x = 21$.

11.19 18.

■ Решение

Обозначим выполняемую трубами работу по заполнению резервуара за 1. Пусть x, y, z — производительность первой, второй и третьей труб соответственно. Тогда $\begin{cases} x + y = \dfrac{1}{21}, \\ y + z = \dfrac{1}{28}, \\ x + z = \dfrac{1}{36}. \end{cases}$

Сложим все три уравнения системы:

$x + y + y + z + x + z = \dfrac{1}{21} + \dfrac{1}{28} + \dfrac{1}{36} \Leftrightarrow 2(x + y + z) = \dfrac{4+3}{3 \cdot 7 \cdot 4} + \dfrac{1}{36}$, откуда получим: $2(x + y + z) = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{36} \Leftrightarrow 2(x + y + z) = \dfrac{4}{36} \Leftrightarrow x + y + z = \dfrac{1}{18}$, то есть три трубы наполняют $\dfrac{1}{18}$ часть резервуара в час, значит, весь резервуар будет заполнен за 18 часов.

11.20 6.

■ **Решение**

Обозначим 1 выполняемый заказ. Пусть x, y — производительность мастера и подмастерья соответственно. Тогда $\begin{cases} 3x+2y=\dfrac{1}{2}, \\ 3x+4y=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$

Вычтем из второго уравнения первое: $2y=\dfrac{1}{6} \Rightarrow y=\dfrac{1}{12}$.

Подставим найденное значение y в первое уравнение: $3x+2\cdot\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow 3x=\dfrac{1}{3} \Rightarrow x=\dfrac{1}{9}$.

Пусть для выполнения заказа за 1 час нужно добавить n подмастерьев. Получим уравнение:

$$3\cdot\frac{1}{9}+(2+n)\cdot\frac{1}{12}=1 \Rightarrow \frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}n=1 \Rightarrow \frac{1}{12}n=\frac{1}{2} \Rightarrow n=6.$$

17

17.1 **Решение:**

Пусть p_i млн руб. — ежегодные платежи.

В январе 2002 года: $1{,}3S-p_1=0{,}6S \Rightarrow p_1=0{,}7S$.

В январе 2003 года: $1{,}3\cdot(0{,}6S)-p_2=0{,}25S \Rightarrow p_2=0{,}53S$.

В январе 2004 года: $1{,}3\cdot(0{,}25S)-p_3=0 \Rightarrow p_3=0{,}325S$.

По условию каждый платёж должен быть меньше 4 млн руб. Составим систему: $\begin{cases} 0{,}7S<5, \\ 0{,}53S<5, \\ 0{,}325S<5 \end{cases} \Leftrightarrow S<\dfrac{5}{0{,}7} \Leftrightarrow S<\dfrac{50}{7} \Leftrightarrow S<7\dfrac{1}{7}$.

Наибольшее целое решение системы: $S=7$ млн руб.

Ответ: 7 млн рублей.

17.2 **Решение:**

Введём обозначения: $S=331\ 000$ руб. — размер кредита, $r=10\ \%$ — процентная ставка.

Рассмотрим схему с аннуитетными платежами. Пусть p руб. — равные ежемесячные платежи.

Через 1 месяц остаток на счёте равен $1,1S-p$.

Через 2 месяца остаток на счёте равен $(1,1S-p)\cdot 1,1-p=1,21S-1,1p-p$.

Через 3 месяца долг будет погашен:

$(1,21S-1,1p-p)\cdot 1,1-p=0 \Leftrightarrow 1,331S-1,21p-1,1p-p=0 \Leftrightarrow 1,331S-3,31p=0.$

Откуда получаем: $p=\dfrac{1,331S}{3,31}=\dfrac{1,331\cdot 331\ 000}{3,31}=133\ 100$ (руб.).

Значит, за 3 месяца при первой (аннуитетной) схеме Елена Владимировна выплатит в банк сумму, равную $S_1=3p=399\ 300$ (руб.).

Рассмотрим схему с дифференцированными платежами. Пусть p_i руб. — платёж в i-м месяце.

Через 1 месяц остаток на счёте равен $1,1S-p_1=\dfrac{2}{3}S \Rightarrow p_1=1,1S-\dfrac{2}{3}S=$

$=\dfrac{1,3}{3}S=143\ 433\dfrac{1}{3}.$

Через 2 месяца остаток на счёте равен $\dfrac{2}{3}\cdot 1,1S-p_2=\dfrac{1}{3}S \Rightarrow p_3=$

$=\dfrac{2,2}{3}S-\dfrac{1}{3}S=0,4S=132\ 400.$

Через 3 месяца долг будет погашен: $\dfrac{1}{3}\cdot 1,1S-p_3=0 \Rightarrow p_3=\dfrac{1,1}{3}S=$

$=121\ 336\dfrac{2}{3}.$

Значит, за 3 месяца при второй (дифференцированной) схеме Елена Владимировна выплатит в банк сумму, равную $S_2=p_1+p_2+p_3=397\,200$ (руб.).

Так как $S_1>S_2$, то выгоднее вторая схема (дифференцированные платежи). Вычислим размер выгоды:

$S_1-S_2=399\,300-397\,200=2100$ (руб.).

Ответ: вторая схема выгоднее на 2100 рублей.

17.3 **Решение:**

Акцию выгодно продать и положить деньги в банк, когда 8 % от её цены будут превышать 1000 рублей.

Если продать акцию сразу после покупки: $8000 \cdot 0{,}08 = 640 < 1000$.

В конце 1-го года: $9000 \cdot 0{,}08 = 720 < 1000$.

В конце 2-го года: $10\,000 \cdot 0{,}08 = 800 < 1000$.

В конце 3-го года: $11\,000 \cdot 0{,}08 = 880 < 1000$.

В конце 4-го года: $12\,000 \cdot 0{,}08 = 960 < 1000$.

В конце 5-го года: $13\,000 \cdot 0{,}08 = 1040 > 1000$.

Значит, акцию выгодно продать в течение 6-го года.

Ответ: 6.

17.4 **Решение:**

Рассмотрим вклад в банке «Мечта».

Через 1 год: $1000 \cdot 1{,}2 + 1000$.

Через 2 года: $1000 \cdot 1{,}2^2 + 1000 \cdot 1{,}2 + 1000$.

Через 3 года: $1000 \cdot 1{,}2^3 + 1000 \cdot 1{,}2^2 + 1000 \cdot 1{,}2 + 1000$.

...

Через n лет: $1000 \cdot 1{,}2^n + 1000 \cdot 1{,}2^{n-1} + \ldots + 1000 \cdot 1{,}2^2 + 1000 \cdot 1{,}2 + 1000 =$

$= 1000(1{,}2^n + 1{,}2^{n-1} + \ldots + 1{,}2^2 + 1{,}2 + 1)$.

Для выражения в скобках применим формулу суммы членов геометрической прогрессии (в данном случае $n+1$ слагаемых, $q = 1{,}2$, $b_1 = 1$).

Получим: $1000 \cdot \dfrac{1{,}2^{n+1} - 1}{1{,}2 - 1} = 5000(1{,}2^{n+1} - 1)$.

Рассмотрим вклад в банке «Эксперт» (срок меньше на 6 лет).

Через 1 год: $2200 \cdot 1{,}44 + 2200$.

Через 2 года: $2200 \cdot 1{,}44^2 + 2200 \cdot 1{,}44 + 2200$.

Через 3 года: $2200 \cdot 1{,}44^3 + 2200 \cdot 1{,}44^2 + 2200 \cdot 1{,}44 + 2200$.

...

Через $n-6$ лет: $2200 \cdot 1{,}44^{n-6} + 2200 \cdot 1{,}44^{n-7} + \ldots + 2200 \cdot 1{,}44^2 + 2200 \cdot 1{,}44 + 2200 = 2200(1{,}44^{n-6} + 1{,}44^{n-7} + \ldots + 1{,}44^2 + 1{,}44 + 1)$. Для выражения в скобках применим формулу суммы членов геометрической прогрессии (в данном случае $n-5$ слагаемых, $q = 1{,}44$, $b_1 = 1$).

Получим: $2200\cdot\dfrac{1{,}44^{n-5}-1}{1{,}44-1}=5000(1{,}44^{n-5}-1)$.

Так как суммы на каждом из двух вкладов должны сравняться, составим уравнение: $5000(1{,}2^{n+1}-1)=5000(1{,}44^{n-5}-1)\Leftrightarrow 1{,}2^{n+1}-1=$ $=1{,}44^{n-5}-1\Leftrightarrow 1{,}2^{n+1}=1{,}44^{n-5}\Leftrightarrow 1{,}2^{n+1}=\left(1{,}2^{n-5}\right)^2$.

Отсюда получим: $n+1=2n-10\Leftrightarrow n=11$ (лет).

Ответ: через 11 лет.

17.5 **Решение:**

Введём обозначения: $S=6$ млн руб. — размер кредита, p_i руб. — платёж в i-м месяце. Пусть $\alpha=1+\dfrac{r}{100}$.

15 февраля: $\alpha S-p_1=\dfrac{7}{9}S\Rightarrow p_1=\alpha S-\dfrac{7}{9}S$.

15 марта: $\dfrac{7}{9}\alpha S-p_2=\dfrac{6}{9}S\Rightarrow p_2=\dfrac{7}{9}\alpha S-\dfrac{6}{9}S$.

15 апреля: $\dfrac{6}{9}\alpha S-p_3=\dfrac{4}{9}S\Rightarrow p_3=\dfrac{6}{9}\alpha S-\dfrac{4}{9}S$.

15 мая: $\dfrac{4}{9}\alpha S-p_4=\dfrac{3}{9}S\Rightarrow p_4=\dfrac{4}{9}\alpha S-\dfrac{3}{9}S$.

15 июня: $\dfrac{3}{9}\alpha S-p_5=\dfrac{1}{9}S\Rightarrow p_5=\dfrac{3}{9}\alpha S-\dfrac{1}{9}S$.

15 июля: $\dfrac{1}{9}\alpha S-p_6=0\Rightarrow p_6=\dfrac{1}{9}\alpha S$.

Найдём сумму платежей: $p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=$

$$=\frac{\alpha S}{9}(9+7+6+4+3+1)-\frac{S}{9}(7+6+4+3+1)=\frac{30\alpha S}{9}-\frac{21S}{9}=\frac{10\alpha S}{3}-\frac{7S}{3}.$$

По условию задачи сумма выплат (то есть сумма платежей p_i) на 600 000 руб. больше суммы кредита, то есть равна $S+0{,}6$.

Получим уравнение:

$$\frac{10\alpha S}{3}-\frac{7S}{3}=S+0{,}6\Leftrightarrow\frac{10\alpha S}{3}-\frac{7S}{3}-S=0{,}6\Leftrightarrow\frac{10\alpha S}{3}-\frac{10S}{3}=0{,}6.$$

Подставим в уравнение $S=6$:

$20\alpha-20=0{,}6 \Leftrightarrow \alpha=1{,}03 \Rightarrow r=3\,\%$.

Ответ: 3 %.

17.6 **Решение:**

Введём обозначения: $S=7\,320\,000$ руб. — размер кредита, $r=20\,\%$ — процентная ставка, p руб. — равные платежи в конце второго и четвёртого годов. Пусть $\alpha=1+\dfrac{r}{100}=1{,}2$.

Через 1 год: αS.

Через 2 года: $\alpha^2 S-p$.

Через 3 года: $(\alpha^2 S-p)\alpha=\alpha^3 S-\alpha p$.

Через 4 года кредит будет погашен:

$(\alpha^3 S-\alpha p)\alpha-p=0 \Leftrightarrow \alpha^4 S-\alpha^2 p-p=0$.

Подставим известные значения: $1{,}2^4\cdot 7\,320\,000-1{,}2^2 p-p=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2{,}44p=7\,320\,000\cdot 1{,}2^4 \Rightarrow p=6\,220\,800$ (руб.).

Ответ: 6 220 800 рублей.

17.7 **Решение:**

Пусть на объект A бригадир Семёнов направит x рабочих, тогда их зарплата составит $4x^2$ тыс. руб.

Пусть на объект B Семёнов направит y рабочих, тогда их зарплата составит y^2 тыс. руб.

Из условия задачи $x+y=24 \Rightarrow y=24-x$.

Рассмотрим функцию «зарплата рабочих на двух объектах»:

$f(x)=4x^2+(24-x)^2$, где x — натуральное число, $x\in(0;\ 24)$.

После преобразований получим: $f(x)=5x^2-48x+576$.

Исследуем функцию на наименьшее значение с помощью производной: $f'(x)=10x-48$.

$f'(x)=0$, следовательно, $x=4{,}8$ не является натуральным числом, значит, наименьшее значение достигается при $x=4$ или при $x=5$.

Найдём эти значения: $f(4)=4\cdot 4^2+(24-4)^2=464$;

$f(5)=4\cdot 5^2+(24-5)^2=461$.

Таким образом, $f_{\text{наим}}(x)=f(5)=461$ (тыс. руб.).

Поэтому нужно направить 5 рабочих на объект A, 19 рабочих — на объект B. Зарплата рабочих составит 461 тыс. руб.

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

Исследовать функцию $f(x)=5x^2-48x+576$ можно без производной, так как наименьшее значение данной квадратичной функции достигается в вершине параболы: $x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-48}{2\cdot 5}=4{,}8$.

Ответ: 5 рабочих — на объект A, 19 рабочих — на объект B; 461 тыс. рублей.

17.8 **Решение:**

Прибыль от тушёнки в стеклянной таре: $2100-1500=600$ (руб.).

Прибыль от тушёнки в жестяной таре: $1750-1100=650$ (руб.).

Пусть x центнеров тушёнки было произведено в стеклянной таре, y центнеров — в жестяной. Общая прибыль равна $600x+650y$ рублей. В день может быть произведено 90 центнеров тушёнки в стеклянной таре, значит, за $\frac{1}{90}$ дня выпускается одна стеклянная банка. С другой стороны, в день может быть произведено 80 центнеров в жестяной таре, значит, за $\frac{1}{80}$ дня выпускается одна жестяная банка.

Так как наибольшая прибыль достигается, если использовать всё рабочее время (1 день), получаем: $\frac{x}{90}+\frac{y}{80}=1\Rightarrow y=80-\frac{8}{9}x$.

По условию задачи нужно выпустить не менее 20 центнеров. Получим неравенство: $80-\frac{8}{9}x\ge 20\Leftrightarrow x\le 67{,}5$.

Рассмотрим функцию прибыли: $p(x)=600x+650\left(80-\dfrac{8}{9}x\right)$.

Выполним преобразования: $p(x)=\dfrac{200}{9}x+52\,000$ — возрастающая линейная функция, значит, наибольшее значение будет достигаться на конце промежутка, то есть при $x=67{,}5$.

Вычислим это значение: $p_{\text{наиб}}(x)=p(67{,}5)=\dfrac{200}{9}\cdot 67{,}5+52\,000=$ $=53\,500$ (руб.).

Ответ: 53 500 рублей.

17.9 Решение:

Пусть в отеле x номеров площадью 15 м^2 и y номеров площадью 75 м^2. Тогда $15x+75y\le 750$, или $x+5y\le 50$.

Прибыль, которую приносят эти номера, равна $1000x+4000y=1000(x+4y)$.

Прибыль будет наибольшей при наибольшем значении суммы $x+4y$. Пусть $s=x+4y$, откуда $x=s-4y$, тогда $(s-4y)+5y\le 50$; $s\le 50-y$. В случае $s=50-y$ наибольшему значению s соответствует наименьшее значение величины y. Наименьшее возможное значение $y=0$.

Тогда $x\le 50$. Поскольку $750=15\cdot 50$, для получения наибольшей прибыли в гостинице необходимо открыть 50 стандартных номеров, которые принесут доход $1000\cdot 50=50\,000$ (руб.) в сутки.

Ответ: 50 000 рублей.

17.10 Решение:

На первом предприятии: руды чёрных и цветных металлов взаимозаменяемы, а рабочие их одинаково эффективно добывают, поэтому им можно добывать руду любых металлов. За сутки рабочие добудут $160\cdot 5\cdot 0{,}1=80$ (кг).

На втором предприятии: пусть руду чёрных металлов добывают t рабочих, тогда руду цветных металлов — $(160-t)$ рабочих. В таком случае за сутки они добудут $\sqrt{5t}$ кг руды чёрных металлов и $\sqrt{5(160-t)}$ кг руды цветных металлов. Рассмотрим функцию «масса добываемой руды»: $m(t)=\sqrt{5t}+\sqrt{5(160-t)}$, или $m(t)=\sqrt{5t}+\sqrt{800-5t}$. Исследуем эту функцию на наибольшее значение с помощью производной, учитывая, что t — натуральное число, $t\in(0;\,160)$: $m'(t)=\dfrac{5}{2\sqrt{5t}}-\dfrac{5}{2\sqrt{800-5t}}=\dfrac{5\sqrt{800-5t}-5\sqrt{5t}}{2\sqrt{5t}\cdot\sqrt{800-5t}}$.

Приравняем производную к нулю, учитывая ограничения на t: $m'(t)=$

$=0\Rightarrow 5\sqrt{800-5t}-5\sqrt{5t}=0\Leftrightarrow 5\sqrt{800-5t}=5\sqrt{5t}\Rightarrow 800-5t=5t\Leftrightarrow t=80.$

При значениях t, меньших 80, производная положительна, а при t, бóльших 80, производная отрицательна, поэтому в точке 80 функция достигает максимума, равного наибольшему значению функции на исследуемом промежутке: $m_{\text{наиб}}(t)=m(80)=\sqrt{5\cdot 80}+$

$+\sqrt{800-5\cdot 80}=40$ (кг).

Значит, на двух предприятиях будет добыто $80+40=120$ (кг).

Ответ: 120 кг руды.

17.11 **Решение:**

Введём обозначения: $S=6\,600\,000$ руб. $=6{,}6$ млн руб. — размер кредита, p_i млн руб. — ежегодные платежи. Пусть $\alpha=1+\dfrac{r}{100}$.

Январь 2020 года: αS.

Февраль — июль 2020 года: $\alpha S-p_1=S\Rightarrow p_1=\alpha S-S$.

Январь 2021 года: αS.

Февраль — июль 2021 года: $\alpha S-p_2=S\Rightarrow p_2=\alpha S-S$.

Январь 2022 года: αS.

Февраль — июль 2022 года: $\alpha S-p_3=S\Rightarrow p_3=\alpha S-S$.

Январь 2023 года: αS.

Февраль — июль 2023 года: $\alpha S-p_4$.

Январь 2024 года: $(\alpha S-p_4)\alpha$.

Февраль — июль 2024 года: $(\alpha S-p_4)\alpha-p_4=0\Rightarrow\alpha^2S-\alpha p_4-p_4=$ $=0$ (1).

Из условия «общие выплаты составят 12 600 000 рублей» получим уравнение: $p_1+p_2+p_3+2p_4=12{,}6$.

Поскольку $p_1=p_2=p_3=\alpha S-S$, то $3(\alpha S-S)+2p_4=12{,}6\Rightarrow 3\alpha S-$ $-3S+2p_4=12{,}6\Rightarrow 19{,}8\alpha+2p_4=32{,}4(2)$.

Из уравнений (1) и (2) составим систему:

$$\begin{cases}6{,}6\alpha^2-\alpha p_4-p_4=0,\\ 19{,}8\alpha+2p_4=32{,}4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6{,}6\alpha^2-\alpha p_4-p_4=0,\\ 9{,}9\alpha+p_4=16{,}2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6{,}6\alpha^2-\alpha p_4-p_4=0,\\ p_4=16{,}2-9{,}9\alpha.\end{cases}$$

Подставим значение p_4 в первое уравнение системы: $6{,}6\alpha^2-$ $-\alpha(16{,}2-9{,}9\alpha)-(16{,}2-9{,}9\alpha)=0\Leftrightarrow 16{,}5\alpha^2-6{,}3\alpha-16{,}2=0\Leftrightarrow 55\alpha^2-$ $-21\alpha-54=0$.

Вычислим дискриминант: $D=(-21)^2-4\cdot 55\cdot(-54)=12\ 321=111^2$,

откуда находим корни: $\left[\begin{array}{l}\alpha=\dfrac{21+111}{110}=1{,}2,\\ \alpha=\dfrac{21-111}{110}<0.\end{array}\right.$

Следовательно, $r=20\,\%$.

Ответ: 20 %.

17.12 **Решение:**

Пусть x кг — масса унесённых изумрудов, y кг — масса унесённых рубинов. Так как капитан Джек не может унести больше 100 кг, то $x+y\le 100$.

Примем объём мешка за 1, тогда килограмм изумрудов занимает $\dfrac{1}{200}$ часть мешка, килограмм рубинов занимает $\dfrac{1}{40}$ часть мешка.

Получим, что $\dfrac{1}{200}x+\dfrac{1}{40}y\le 1$.

Рассмотрим функцию $S(x,\,y)=20x+60y$ — сумма выручки. Таким образом, мы ищем наибольшее значение функции $S(x,\,y)=20x+60y$

при следующих ограничениях: $\begin{cases}x+y\le 100,\\ \dfrac{1}{200}x+\dfrac{1}{40}y\le 1.\end{cases}$

Преобразуем второе неравенство в системе: $\begin{cases} x+y\le 100, \\ x+5y\le 200. \end{cases}$

Сложим неравенства: $2x+6y\le 300 \Rightarrow 20x+60y\le 3000$, то есть $S(x,\ y)\le 3000$. Значит, наибольшее значение функции равно 3000. Убедимся, что существуют такие x и y, при которых $S(x,\ y)=3000$. Подбором находим $x=75,\ y=25$.

Ответ: 3000.

19.1 **Решение:**

а) При любой расстановке разность числа 11 и любого соседнего с ним числа меньше 11. Значит, всегда найдутся хотя бы две разности меньше 11.

б) Например, для расстановки 1, 12, 2, 13, 3, 14, 4, 15, 5, 16, 6, 17, 7, 18, 8, 19, 9, 20, 10, 21, 11 все разности не меньше 10.

в) Оценим значение k. Рассмотрим числа от 1 до 7. Если какие-то два из них стоят рядом или через одно, то найдётся разность меньше 7. Иначе они стоят через два, поскольку всего чисел 21. В этом случае число 8 стоит рядом или через одно с каким-то числом от 2 до 7 и найдётся разность меньше 7.

Таким образом, всегда найдётся разность меньше 7. Все разности могут быть не меньше 6. Например, для расстановки 1, 8, 15, 2, 9, 16, 3, 10, 17, 4, 11, 18, 5, 12, 19, 6, 13, 20, 7, 14, 21 все разности не меньше 6.

Ответ: а) нет; б) да; в) 6.

19.2 **Решение:**

а) $71+61=4(16+17)$, поэтому если взять по 11 раз числа 16 и 17, то получится подходящий пример.

б) Обозначим сумму всех цифр десятков за a, а всех цифр единиц примем за b. Тогда $10a+b=363$, $10b+a=2\cdot 363$, откуда $9(b-a)=363$, что невозможно: 363 не кратно 9.

в) Нужно максимизировать выражение $10a+b=10(363-10a)+a=$ $=3630-99a$, поэтому a следует сделать как можно меньше. С другой стороны, $9a\ge b$ (поскольку первая цифра числа меньше его последней цифры не более чем в 9 раз), поэтому $363 = 10a + b \le 19a$, откуда $a \ge 20$.

Пусть $a = 20$, $b = 163$, что возможно, например, для трёх чисел 19 и семнадцати чисел 18. Новая сумма тогда будет равна $17 \cdot 81 + 3 \cdot 91 = 1650$.

Ответ: а) 17 и 16; б) нет; в) 1650.

19.3 **Решение:**

а) Среди восьми данных чисел нет противоположных. Значит, сумма чисел на каждой карточке не равна 0. Поэтому всё произведение не может равняться нулю.

б) Среди восьми данных чисел пять нечётных. Значит, на какой-то карточке попадётся два нечётных числа, и их сумма чётная. Поэтому всё произведение чётно и не может равняться 1.

в) Среди восьми данных чисел пять нечётных. Значит, хотя бы на двух карточках с обеих сторон написаны нечётные числа, и сумма чисел на каждой из этих карточек чётная. Поэтому всё произведение делится на 4.

Наименьшее целое положительное число, делящееся на 4, — это 4. Оно получается при следующем наборе пар чисел на карточках: (1; –2); (–2; 1); (–3; 4); (4; –3); (–5; 7); (7; –5); (–8; 9); (9; –8).

Ответ: а) нет; б) нет; в) 4.

19.4 **Решение:**

Пусть среди написанных чисел k положительных, l отрицательных и m нулей. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому $4k - 8l + 0 \cdot m = -3(k + l + m)$.

а) Заметим, что в левой части приведённого выше равенства каждое слагаемое делится на 4, поэтому $k + l + m$ делится на 4. По условию $40 < k + l + m < 48$, поэтому $k + l + m = 44$. Таким образом, написано 44 числа.

б) Приведём неравенство $4k - 8l + 0 \cdot m = -3(k + l + m)$ к виду $5l = 7k + 3m$. Так как $m \ge 0$, получаем, что $5l \ge 7k$, откуда $l > k$. Следовательно, отрицательных чисел больше, чем положительных.

Подставим $k+l+m=44$ в правую часть равенства $4k-8l+0\cdot m=-3(k+l+m)$: $4k-8l=-132$, откуда $k=2l-33$. Так как $k+l\le 44$, получаем: $3l-33\le 44$; $l\le 25$; $k\le 17$. То есть положительных чисел не более 17.

Ответ: а) 44; б) отрицательных; в) 17.

19.5 **Решение:**

а) Да, может. Числа 2, 3, 4, 5 составляют арифметическую прогрессию, их сумма равна 14.

б) Пусть a — первый член, d — разность, n — число членов прогрессии, тогда их сумма равна $\frac{2a+d(n-1)}{2}n$. Чтобы количество членов было наибольшим, первый член и разность должны быть наименьшими. Пусть они равны 1, тогда по условию $\frac{n(n+1)}{2}<900$. Наибольшее натуральное решение этого неравенства: $n=41$. Такой результат получается при прогрессии $1+2+\ldots+41=861$.

в) Для суммы членов арифметической прогрессии имеем: $\frac{2a+d(n-1)}{2}n=123$; $(2a+d(n-1))n=2\cdot 3\cdot 41$.

Таким образом, число членов прогрессии n является делителем числа 246. Если $n\ge 41$, то левая часть больше 246: $(2a+d(n-1))n\ge 42\cdot 41>246$, следовательно, $n<41$. Поскольку $n\ge 3$, получаем, что $n=3$ или $n=6$. Прогрессии из трёх и шести членов с суммой 123 существуют: 40, 41, 42 и 3, 10, 17, 24, 31, 38.

Ответ: а) да; б) 41; в) 3 и 6.

19.6 **Решение:**

а) Число 8 является суммой четырёх последовательных членов арифметической прогрессии. Например, $8=-1+1+3+5$.

б) Пусть число 1 является суммой первых k членов арифметической прогрессии с первым членом a и разностью d.

Тогда $1=\frac{k(2a+d(k-1))}{2}$; $2=k(2a+d(k-1))$. Значит, число k — делитель 2, что противоречит условию $k\ge 3$.

в) Любое натуральное число $n \geq 2$ является суммой арифметической прогрессии $1-n$; $2-n\ldots$ $n-1$; n, состоящей из $2n \geq 4$ членов. Если заменить все члены этой прогрессии на противоположные, то получится арифметическая прогрессия, состоящая из $2n$ членов, сумма которой равна $-n$.

В предыдущем пункте мы показали, что S не может равняться 1. Аналогично можно показать, что S не может равняться −1. Число S может равняться 0, например для прогрессии −1; 0; 1. Таким образом, S может принимать любые целые значения, кроме −1 и 1.

Ответ: а) да; б) нет; в) любые целые значения, кроме −1 и 1.

19.7 **Решение:**

а) Проверим, что пример прогрессий 1, 3, 5... и 1, 4, 7... удовлетворяет условию: $a_1b_1 + a_3b_3 = 1\cdot 1 + 5\cdot 7 = 36 = 3a_2b_2$.

б) Введём следующие обозначения:

c — разность прогрессии a_1, $a_2\ldots$;

d — разность прогрессии b_1, $b_2\ldots$

Тогда получим: $a_1b_1 + 2a_4b_4 = a_1b_1 + 2(a_1+3c)(b_1+3d) = 3a_1b_1 +$

$+6a_1d + 6b_1c + 18cd$; $3a_3b_3 = 3(a_1+2c)(b_1+2d) = 3a_1b_1 + 6a_1d + 6b_1c + 12cd$;

$a_1b_1 + 2a_4b_4 - 3a_3b_3 = 6cd$.

Если $a_1b_1 + 2a_4b_4 = 3a_3b_3$, то $cd = 0$ — противоречие, так как по условию прогрессии возрастающие, то есть $c \geq 1$, $d \geq 1$. Значит, таких прогрессий не существует.

в) По условию $c \geq 1$, $d \geq 1$. В пункте *б* доказано, что $a_1b_1 + 2a_4b_4 - 3a_3b_3 = 6cd$.

Отсюда следует, что $a_3b_3 = \dfrac{a_1b_1 + 2a_4b_4 - 6cd}{3} \leq \dfrac{300-6}{3} = 98$.

Равенство выполняется, например, для прогрессий 5, 6, 7... и 12, 13, 14...

$a_1b_1 + 2a_4b_4 = 300$, $a_3b_3 = 7\cdot 14 = 98$.

Ответ: а) 1, 3, 5... и 1, 4, 7...; б) нет; в) 98.

19.8 Решение:

а) Пусть 14 юношей отправили по 4 письма и трое юношей отправили по 21 письму. Тогда суммарно они отправили 119 писем. Эти 119 писем можно распределить между 17 девушками так, чтобы каждая получила ровно 7 писем.

б) Пусть a юношей отправили по 4 письма и b юношей отправили по 21 письму. Эти письма можно поровну распределить между $a+b$ девушками, если суммарное количество писем $4a+21b$ делится на количество девушек. В этом случае число $17b=(4a+21b)-4(a+b)$ также делится на $a+b$.

Если $a+b$ не делится на 17, то b делится на $a+b$, что противоречит условиям $a>1$, $b>1$. Значит, $a+b$ делится на 17. Наименьшее натуральное число, делящееся на 17, — это 17.

в) Пусть a юношей отправили по 4 письма и $n-a$ юношей отправили по 21 письму. Тогда суммарно они отправили $4a+21(n-a)$ писем, а число полученных девушками писем не меньше $0+1+\ldots+(n-2)+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$. Получаем: $4a+21(n-a)\geq\dfrac{n(n-1)}{2}$, откуда $21n-17a\geq\dfrac{n(n-1)}{2}$; $n<43$. При $n=42$ имеем: $882-17a\geq861$; $17a\leq21$, что противоречит условию $a\geq2$.

Если $n=41$, $a=2$, то суммарное количество отправленных писем равно $2\cdot4+39\cdot21=827$. Эти письма можно распределить между девушками следующим образом: 40 девушек получили от 0 до 39 писем и ещё одна — 47. Таким образом, наибольшее возможное количество девушек — 41.

Ответ: а) да; б) 17; в) 41.

19.9 Решение:

а) Например, если 20 студентов писали обе контрольные работы и получили по 18 баллов за каждую, 4 студента писали только первую контрольную работу и получили по 0 баллов, 4 студента писали только вторую контрольную работу и получили по 0 баллов, то средний балл по каждой из контрольных работ в отдельности составил 15, а $S=\dfrac{20\cdot18+0}{28}=\dfrac{90}{7}<15$.

б) Пусть a — сумма баллов тех студентов, которые писали только одну контрольную работу, b — сумма наибольших баллов тех студентов, которые писали обе контрольные работы, c — сумма наименьших баллов тех студентов, которые писали обе контрольные работы.

Средние баллы по каждой контрольной в отдельности равны 15, поэтому средний балл по обеим контрольным также равен 15.

Всего было написано $28+k$ контрольных работ. Значит, общее количество набранных студентами баллов равно $15(28+k)=420+15k$.

Тогда получаем: $a+b=5\cdot 28=140$, $a+b+c=420+15k$, откуда $c=280+15k$. С другой стороны, $c\le 20k$, откуда получаем: $k\ge 56$. Значит, такая ситуация невозможна.

в) Аналогично получаем: $a+b=S\cdot 28=28S$, $a+b+c=15(28+10)=570$, откуда $S=\frac{a+b}{28}=\frac{570-c}{28}\ge\frac{570-200}{28}=\frac{185}{14}$.

Ответ: а) например, если 20 студентов писали обе контрольные работы и получили по 18 баллов, а 4 студента писали только одну из двух контрольных работ и получили по 0 баллов; б) нет; в) $\frac{185}{14}$.

19.10 **Решение:**

а) Пусть было 3 участника, которые набрали 90, 72 и 2 балла. Средний балл участников, не сдавших тест, составил $\frac{72+2}{2}=$ $=37$ баллов. После добавления баллов у участников оказалось 95, 77 и 7 баллов. Средний балл участников, не сдавших тест, составил 7 баллов.

б) В примере предыдущего пункта средний балл участников, сдавших тест, первоначально составлял 90 баллов, а после добавления баллов составил $\frac{95+77}{2}=86$ баллов.

в) Пусть всего было N участников теста, сдали тест a участников, после добавления баллов сдали тест b участников. Заметим, что средний балл после добавления составил 85. Имеем два уравнения: $80N=65(N-a)+90a$ и $85N=69(N-b)+93b$, откуда $3N=5a$ и $2N=3b$. Поэтому целое число N делится на 5 и на 3, то есть делится на 15.

Ответ: а) да; б) да; в) 15.

Что нужно знать

В этой главе представлен основной теоретический материал, который необходим для решения геометрических задач из курса планиметрии и стереометрии.

Квадратная решётка, координатная плоскость

3

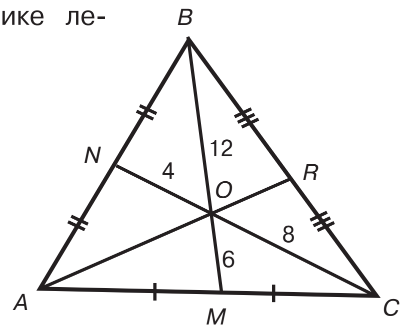
Треугольник

Против большей стороны в треугольнике лежит больший угол.

Медиана треугольника — отрезок, соединяющий любую вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

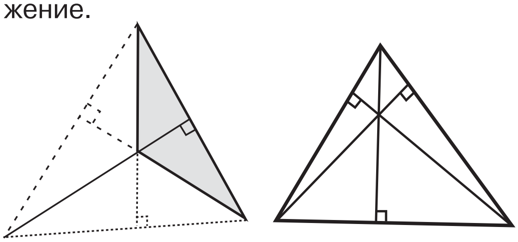
Медианы в треугольнике пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении $2:1$, считая от вершины.

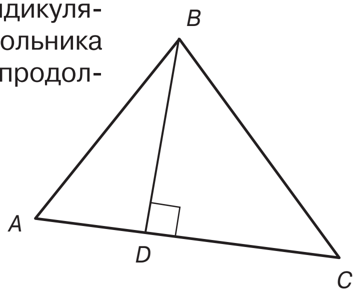
Медиана делит треугольник на два равновеликих (имеющих равные площади) треугольника.



AR, BM, CN — медианы;
$AN = NB$, $BR = RC$, $CM = MA$

Высота треугольника — отрезок перпендикуляра, опущенного из любой вершины треугольника на противоположную сторону или на её продолжение.





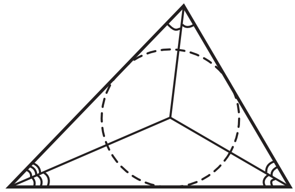
BD — высота, угол D — прямой

Высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке.

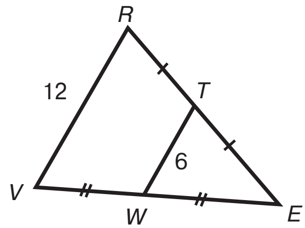
Биссектриса угла — луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла.

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой на противолежащей стороне.

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, точка их пересечения является центром вписанной в треугольник окружности.

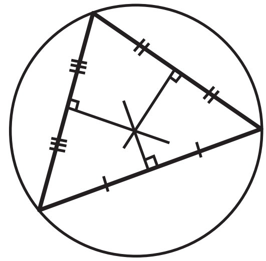


Средняя линия треугольника — отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника. Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.



TW — средняя линия; $TW \,||\, VR$, $TW = \frac{1}{2}RV$

Серединные перпендикуляры в треугольнике пересекаются в одной точке, данная точка является **центром окружности**, описанной около треугольника.



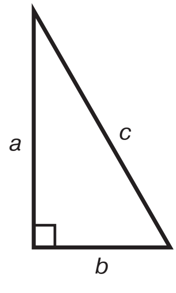
Расположение центра описанной окружности зависит от вида треугольника: у остроугольного — центр внутри, у прямоугольного — является серединой гипотенузы, у тупоугольного — вне треугольника.

Прямоугольный треугольник

Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов его катетов:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

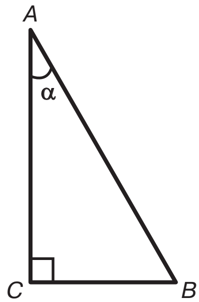


Обратное утверждение: если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник является прямоугольным.

ПОМНИТЕ!

В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая из вершины прямого угла к гипотенузе, равна половине гипотенузы и является радиусом описанной окружности.

Синус, косинус, тангенс острого угла прямоугольного треугольника



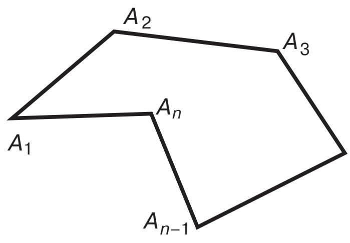
Косинусом угла α ($\cos\alpha$) в прямоугольном треугольнике ABC называется отношение прилежащего катета AC к гипотенузе AB: $\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB}$.

Синусом угла α ($\sin\alpha$) в прямоугольном треугольнике ABC называется отношение противолежащего катета CB к гипотенузе AB: $\sin\alpha = \dfrac{CB}{AB}$.

Тангенсом угла α ($\mathrm{tg}\,\alpha$) в прямоугольном треугольнике ABC называется отношение противолежащего катета CB к прилежащему катету CA: $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{CB}{CA}$.

Многоугольник

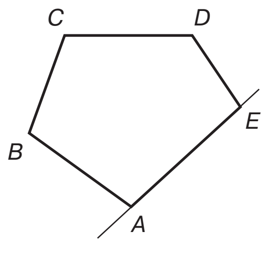
Многоугольник с n вершинами и n сторонами называется n-угольником.



$P = A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n$ — **периметр многоугольника**.

Плоским многоугольником называется конечная часть плоскости, ограниченная многоугольником.

Многоугольник является **выпуклым**, если он лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону. При этом сама прямая считается принадлежащей полуплоскости.



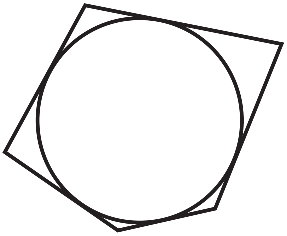
Углом выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол, образованный его сторонами, сходящимися в этой вершине.

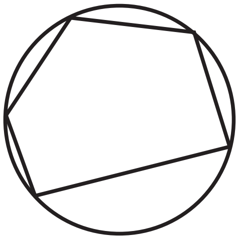
Отрезки, соединяющие не соседние вершины многоугольника, называются **диагоналями**.

Периметр многоугольника равен сумме длин всех его сторон.

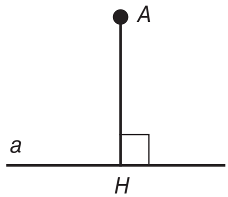
Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется **вписанной в многоугольник**, а многоугольник — описанным около окружности (рис. *а*).

Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется **описанной около многоугольника**, а многоугольник — вписанным в эту окружность (рис. *б*).

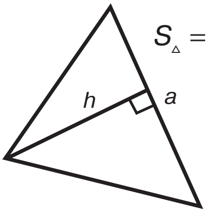
а) 

б) 

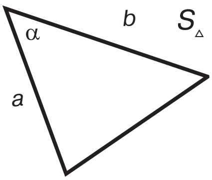
Расстояние от точки до прямой равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на данную прямую.



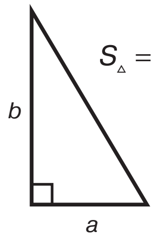
Площади



$S_{\triangle} = \frac{1}{2}ah$



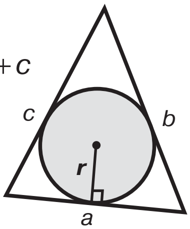
$S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$

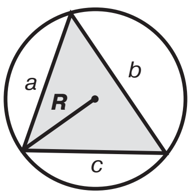


$S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab$

$P = a + b + c$

$S_{\triangle} = \frac{1}{2}Pr$

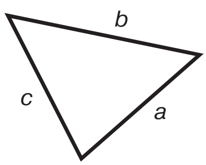




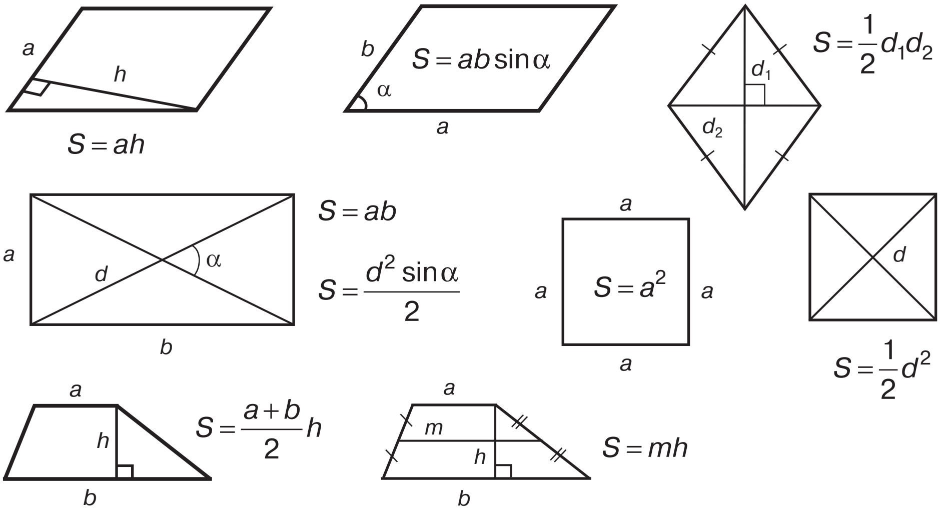
$S_{\triangle} = \frac{abc}{4R}$

Формула Герона

$S_{\triangle} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$



$p = \frac{a+b+c}{2}$



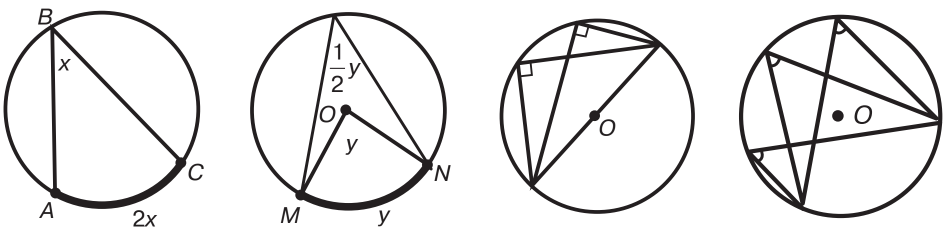
Круг

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется **вписанным**. Он равен половине дуги, на которую опирается (рис. *а*).

Угол с вершиной в центре окружности называется **центральным**. Он равен дуге, на которую опирается (рис. *б*). Часть окружности, расположенная внутри центрального угла, называется дугой окружности, соответствующей данному центральному углу. Угол, вписанный в окружность, равен половине соответствующего центрального угла.

Вписанный угол, опирающийся на диаметр, является **прямым** (равен 90°) (рис. *в*).

Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, **равны** (рис. *г*).

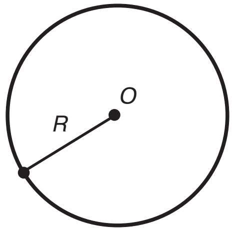


а) б) в) г)

Круговым сектором называется часть круга, лежащая внутри соответствующего центрального угла.

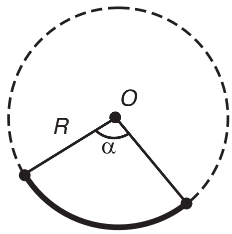
$l = 2\pi R$ — длина окружности

$l = \dfrac{\pi R}{180} \cdot \alpha$ — длина дуги окружности в альфа градусов



$S_{\text{круга}} = \pi R^2$

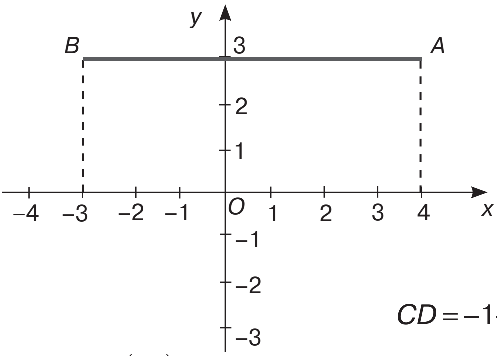
$S_{\text{сектора}} = \dfrac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha$



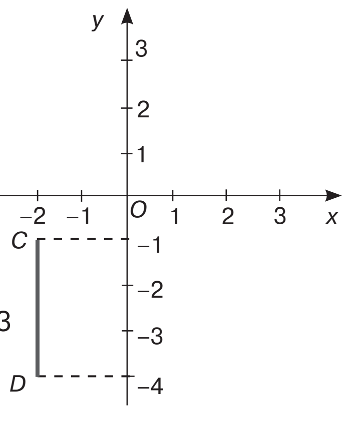
Отрезок на координатной плоскости

Длина отрезка, заданного координатами $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$, параллельного оси Ox, равна модулю разности координат $|x_2 - x_1|$. Как правило, от большего значения отнимают меньшее.

Длина отрезка, заданного координатами $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$, параллельного оси Oy, равна $|y_2 - y_1|$.



$AB = 4 - (-3) = 7$



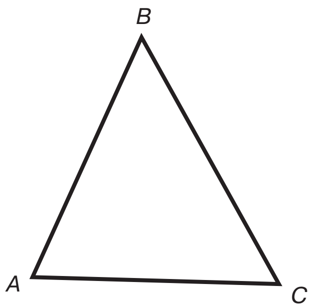
$CD = -1 - (-4) = 3$

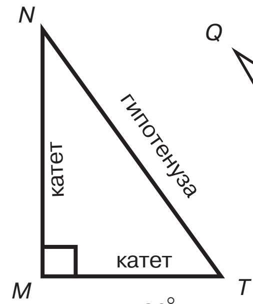
Планиметрия

6, 16

Треугольник

Остроугольный треугольник

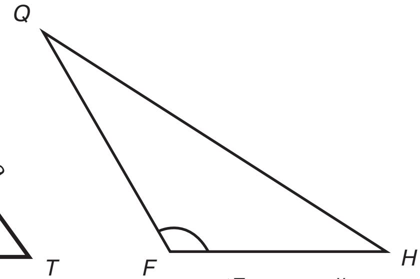




$\angle M = 90^\circ$

Прямоугольный треугольник

Тупоугольный треугольник



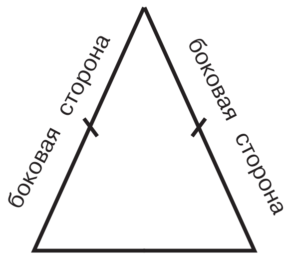
$\angle F$ — тупой

Свойства равнобедренного треугольника

Треугольник называется **равнобедренным**, если две его стороны равны.

1^0. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

2^0. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к основанию, является медианой и высотой.

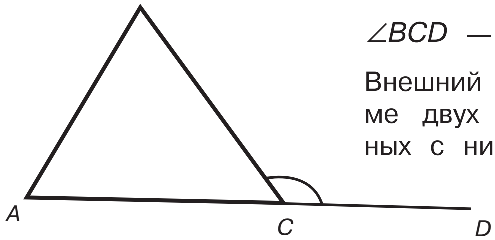


основание

Равнобедренный треугольник

Треугольник называется **равносторонним**, если у него все стороны равны. В равностороннем треугольнике каждый угол равен 60°.

Сумма углов в треугольнике равна 180°.



$\angle BCD$ — **внешний угол** треугольника.

Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним, то есть $\angle BCD = \angle A + \angle B$.

Прямоугольные треугольники

1^0. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

2^0. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла величиной 30°, равен половине гипотенузы.

3^0. Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то он лежит против угла 30°.

Окружностью, **вписанной** в треугольник, называется окружность, которая касается всех его сторон.

Во всякий треугольник можно вписать единственную окружность. Центром вписанной окружности является точка пересечения биссектрис углов треугольника (рис. *а*).

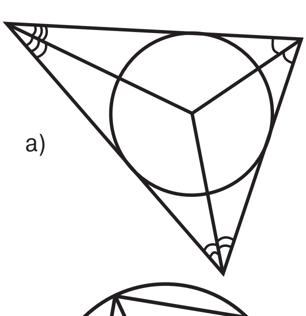
Окружностью, **описанной** около треугольника, называется окружность, которая проходит через все его вершины.

Около всякого треугольника можно описать единственную окружность. Центром описанной окружности является точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника (рис. *б*).

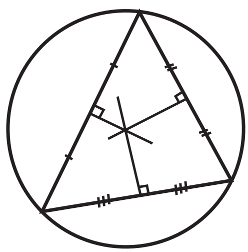
Если прямоугольный треугольник вписан в окружность, то его гипотенуза является диаметром окружности (рис. *в*), а медиана, проведённая из вершины прямого угла, является радиусом (рис. *г*).

Радиус описанной около прямоугольного треугольника окружности равен половине его гипотенузы.

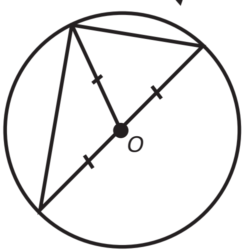
а)



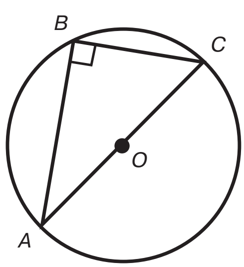
б)



в)



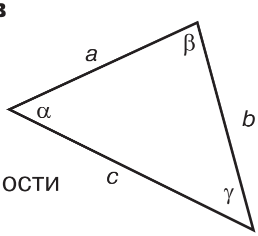
г)



Теорема синусов

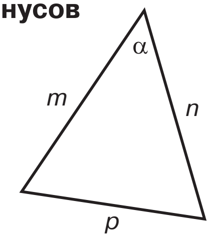
$$\frac{a}{\sin\gamma}=\frac{b}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\beta}=2R,$$

где R — радиус описанной окружности



Теорема косинусов

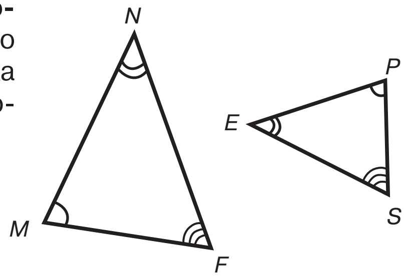
$$p^2=m^2+n^2-2mn\cos\alpha$$



Подобные треугольники

Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.

Обозначение подобия:
$\triangle MNF \sim \triangle PES$.



Сходственными называются стороны, лежащие напротив равных углов.

По определению: $\angle M=\angle P$, $\angle N=\angle E$, $\angle F=\angle S$, $\dfrac{NF}{ES}=\dfrac{MF}{PS}=\dfrac{MN}{EP}=k$,

где k — коэффициент подобия.

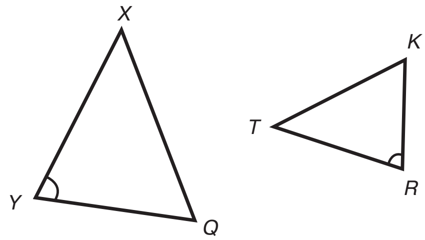
Признаки подобия треугольников

По двум углам. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

$\angle M=\angle P,\ \angle N=\angle E \Rightarrow \triangle MNF \sim \triangle PES$

По двум сторонам и углу между ними. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключённые между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

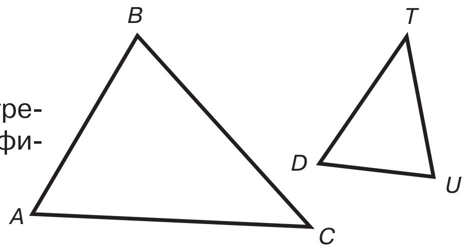
$$\frac{YQ}{KR}=\frac{YX}{TR},\ \angle Y=\angle R\ \Rightarrow \triangle YXQ\sim\triangle RTK$$



По трём сторонам. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого, то такие треугольники подобны.

$$\frac{AB}{DU}=\frac{BC}{TU}=\frac{AC}{DT}\ \Rightarrow\ \triangle ABC\sim\triangle DUT$$

Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.



Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат

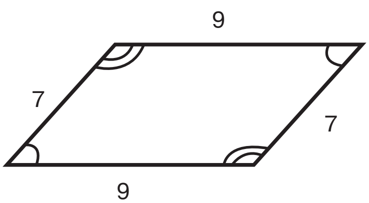
В выпуклом четырёхугольнике сумма углов равна 360°.

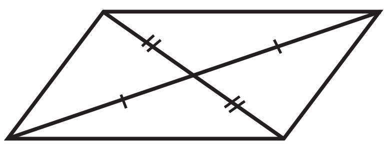
Параллелограммом называется четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Свойства параллелограмма

1^0. В параллелограмме противоположные стороны и углы равны.

2^0. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.





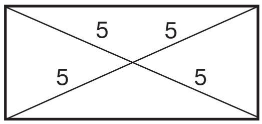
Признаки параллелограмма

1. Если в четырёхугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.
2. Если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.
3. Если в четырёхугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Прямоугольник

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

Свойство прямоугольника: диагонали прямоугольника равны.

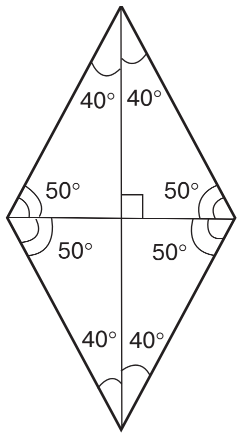


Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма.

Признак прямоугольника: если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Ромб

Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.



Свойство ромба: диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.

Ромб обладает всеми свойствами параллелограмма.

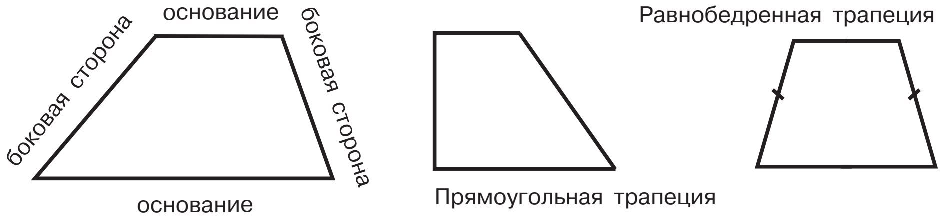
Квадрат

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

Квадрат обладает свойствами прямоугольника и ромба.

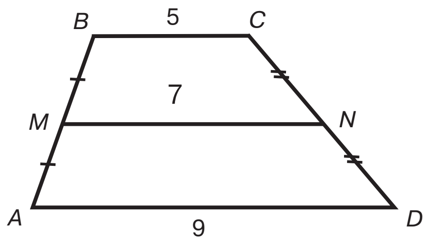
Трапеция

Трапецией называется четырёхугольник, у которого две стороны параллельны (основания), а две другие стороны не параллельны (боковые стороны).



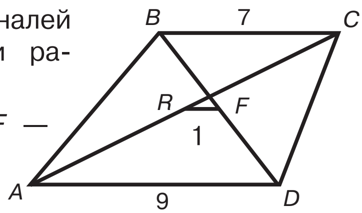
В равнобедренной трапеции углы при основании равны, диагонали равны.

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины боковых сторон. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.



Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен её основаниям и равен полуразности оснований.

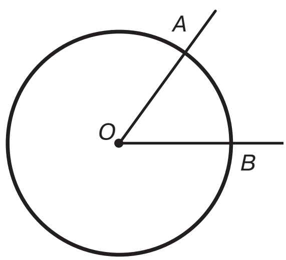
На рисунке справа *R* — середина *AC*, *F* — середина *BD*.



Окружность

Градусная мера дуги *AB* равна градусной мере центрального угла *AOB*. Градусная мера дуги *AB* обозначается $\cup AB$.

Окружностью называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, находящихся на данном расстоянии от данной точки. Эта точка называется **центром окружности**.

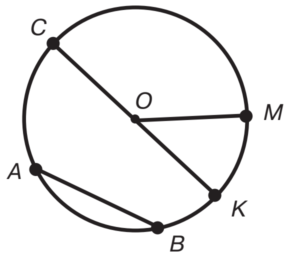


Отрезок, соединяющий точку окружности с её центром, называется **радиусом окружности**.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой**.

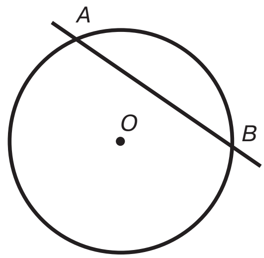
Хорда, проходящая через центр, называется **диаметром**.

Прямая, проходящая через две точки окружности, называется **секущей**.



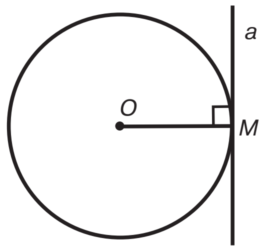
OM — радиус, CK — диаметр,

AB — хорда



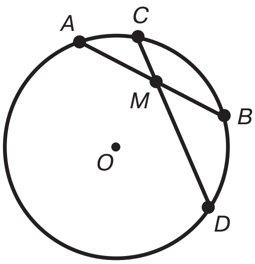
AB — секущая

Прямая, имеющая одну общую точку с окружностью, называется **касательной**.



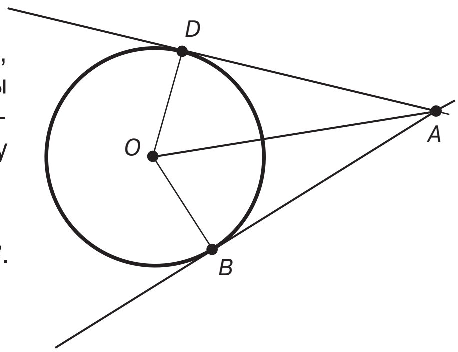
Радиус окружности, проведённый в точку касания, **перпендикулярен** касательной.

Верно и обратное утверждение: если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна этому радиусу, то она является касательной.



Если через точку M, лежащую внутри окружности, проведены две хорды AB и CD, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды: $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.

Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

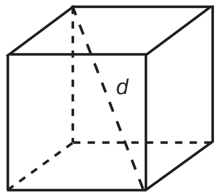
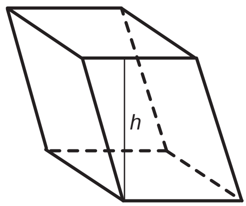
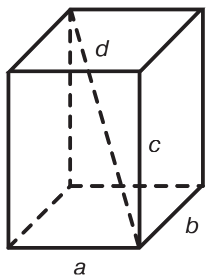
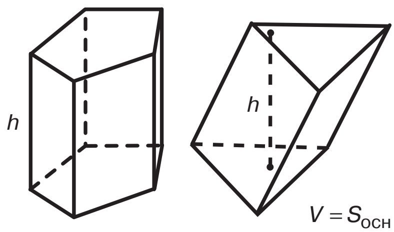


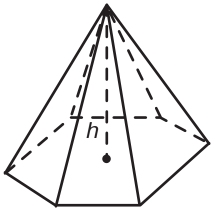
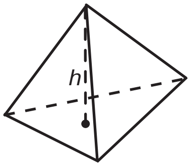
На рисунке $AD = AB$, $\angle DAO = \angle OAB$.

Стереометрия

8, 14

Многогранники

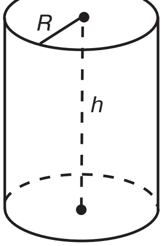
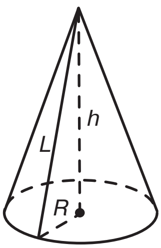
Объём	Площадь поверхности
 $V = a^3$ a — ребро куба Куб	$S = 6a^2$ $d = a\sqrt{3}$ — длина диагонали
 $V = S_{осн} \cdot h$ Параллелепипед	$S = 2S_{осн} + S_{бок}$ $S_{осн}$ — площадь основания $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности h — высота
 $V = a \cdot b \cdot c$ Прямоугольный параллелепипед	$S = 2ab + 2ac + 2bc$ $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
 $V = S_{осн} \cdot h$ Призма	$S = 2S_{осн} + S_{бок}$ $S_{осн}$ — площадь основания h — высота $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности

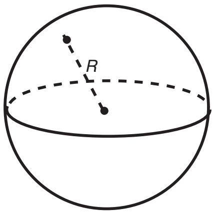
Объём	Площадь поверхности
  $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$ Пирамида	$S = S_{осн} + S_{бок}$

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту.

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему (высоту боковой грани).

Тела вращения

Объём	Площадь поверхности
 Цилиндр $V = \pi R^2 h$ R — радиус основания h — высота	$S = 2S_{осн} + S_{бок} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$
 Конус $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$	$S = S_{осн} + S_{бок} = \pi R^2 + \pi RL$ L — образующая $L = \sqrt{R^2 + h^2}$

Объём	Площадь поверхности
 Шар $V=\frac{4}{3}\pi R^3$	$S=4\pi R^2$

Отношение площадей двух подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия:

$$\frac{S_2}{S_1}=k^2 \Leftrightarrow S_2=k^2\cdot S_1.$$

То есть при изменении (увеличении или уменьшении) всех линейных размеров фигуры в k раз отношение площади полученной фигуры к площади исходной фигуры будет равно k^2.

Отношение объёмов двух подобных тел равно кубу коэффициента подобия:

$$\frac{V_2}{V_1}=k^3 \Leftrightarrow V_2=k^3\cdot V_1.$$

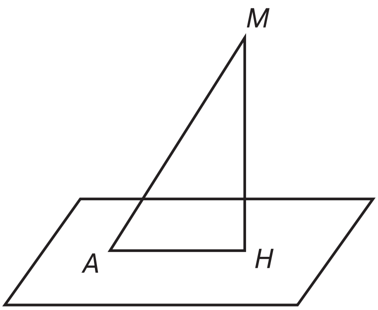
То есть при изменении (увеличении или уменьшении) всех линейных размеров тела в k раз отношение объёма полученного тела к объёму исходного тела будет равно k^3.

Расстояния в пространстве

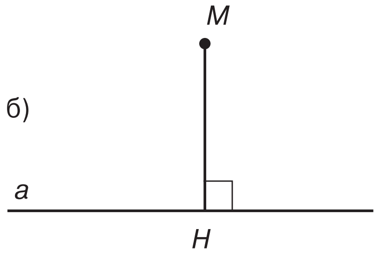
Перпендикуляром, проведённым из данной точки к данной плоскости, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости.

На рисунке *а* (см. с. 125) MH — перпендикуляр, H — основание перпендикуляра, MA — наклонная, A — основание наклонной, AH — проекция наклонной.

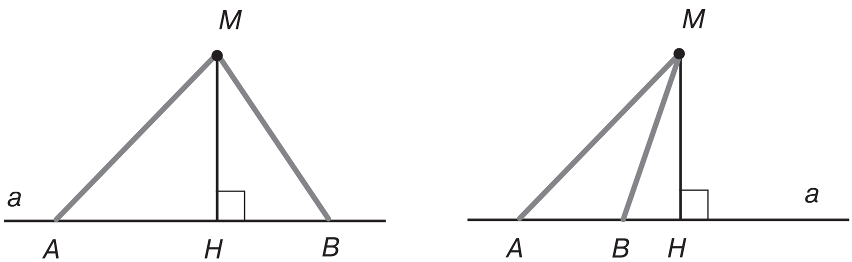
а)



б)



в)



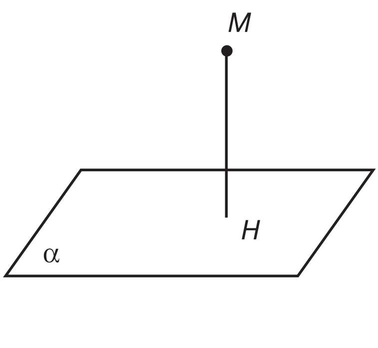
Расстояние от точки до прямой — это длина перпендикуляра, проведённого из данной точки к данной прямой (на рисунке *б* — *MH*).

При решении некоторых задач длину перпендикуляра удобнее находить через площадь, считая его высотой треугольника (причём как остроугольного, так и тупоугольного). На рисунке *в* *MH* — высота треугольника *ABM*.

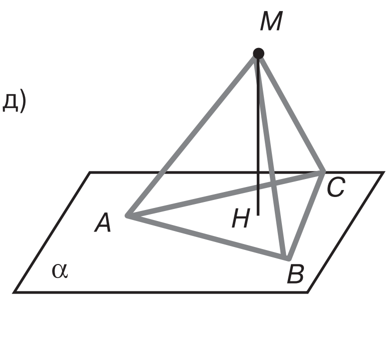
Расстояние от точки до плоскости равно длине перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость (на рисунке *г* — MH).

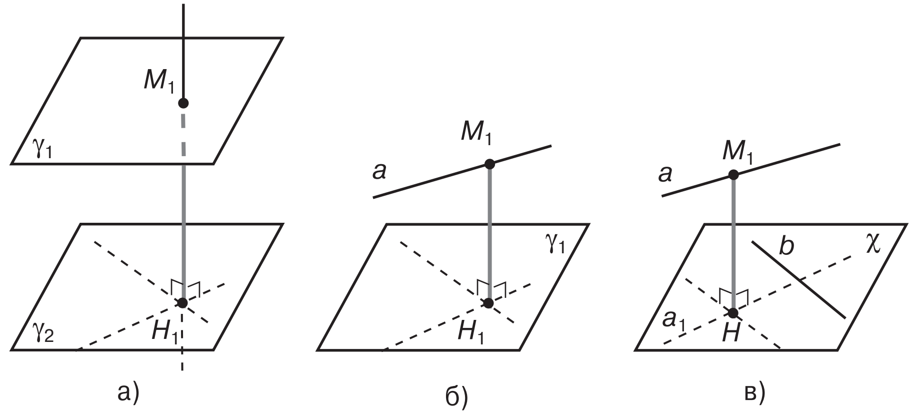
При решении некоторых задач длину перпендикуляра удобнее находить через объём, считая его высотой треугольной пирамиды. На рисунке *д* *MH* — высота пирамиды *MABC*.

г)



д)





Расстояние между параллельными плоскостями — это расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости (рис. *а*).

Расстояние между параллельными прямой и плоскостью — это расстояние от любой точки заданной прямой до заданной плоскости (рис. *б*).

Расстояние между скрещивающимися прямыми — это расстояние между одной из скрещивающихся прямых и параллельной ей плоскостью, проходящей через другую прямую. Справедлива и другая формулировка, согласно которой расстояние между скрещивающимися прямыми — это расстояние от некоторой точки одной из скрещивающихся прямых до плоскости, проходящей через другую прямую параллельно первой прямой (рис. *в*).

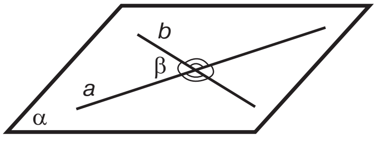
Углы в пространстве

Угол между прямыми. Две пересекающиеся прямые лежат в одной плоскости и при пересечении образуют четыре угла.

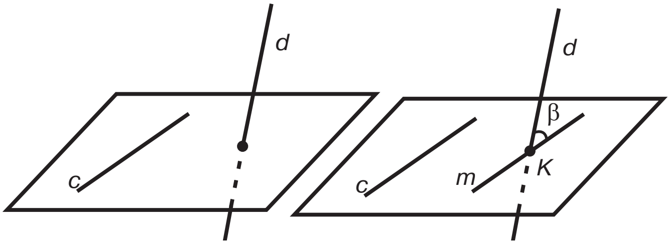
Углом между двумя пересекающимися прямыми считается угол, величина которого не превышает 90° (на чертеже — угол β).

Угол между двумя параллельными прямыми считается равным 0°.

Чтобы найти угол между двумя скрещивающимися прямыми *c* и *d*, необходимо взять произвольно точку *K* на прямой *d* и через неё провести прямую *m*, параллельную прямой *c*. β — это искомый угол между прямыми *c* и *d*.



$0^\circ < \beta \leq 90^\circ$



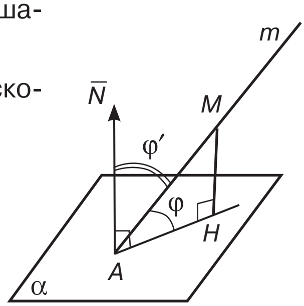
Угол между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, — это угол между прямой и её проекцией на эту плоскость.

Угол между перпендикулярными прямой и плоскостью считают равным 90°, а угол между параллельными прямой и плоскостью либо не определяют вовсе, либо считают равным 0°.

Угол между прямой и плоскостью не превышает 90°.

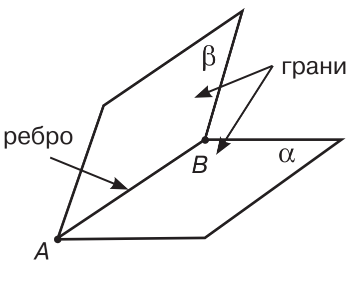
На рисунке угол между прямой *m* и плоскостью α равен $\angle MAH = \varphi$.

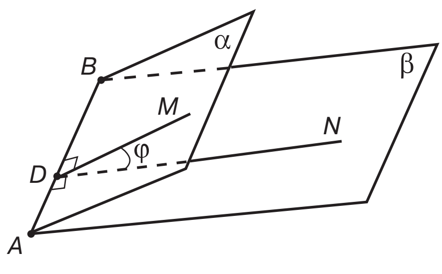
В некоторых задачах проще найти угол между прямой и нормалью к плоскости (нормаль — направленный перпендикуляр к плоскости). Тогда искомый угол равен $\varphi = 90^\circ - \varphi'$.



Двугранный угол — это фигура, образованная двумя полуплоскостями, имеющими общую прямую.

Чтобы измерить двугранный угол, нужно из произвольной точки на ребре провести в каждой плоскости по перпендикуляру к этому ребру. В плоскости α провели перпендикуляр *MD* к ребру *AB*, в плоскости β провели перпендикуляр *ND* к ребру *AB*. Получили плоский угол φ — линейный угол двугранного угла.



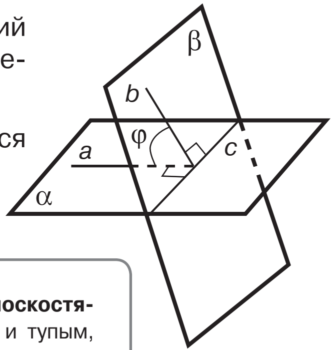


Двугранный угол измеряется величиной своего линейного угла.

Величина двугранного угла находится в диапазоне от 0° до 180° включительно.

Угол между плоскостями — наименьший из двугранных углов, образованных при пересечении плоскостей.

Величина угла между плоскостями находится в диапазоне от 0° до 90° включительно.

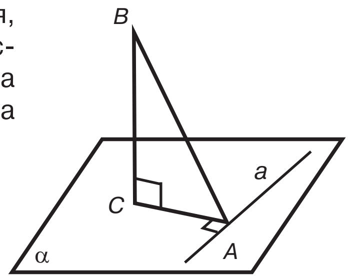


ПОМНИТЕ!

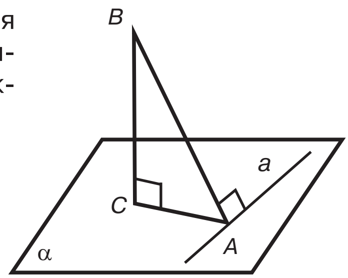
Различие между двугранным углом и углом между плоскостями: двугранный угол может быть и острым, и прямым, и тупым, а угол между плоскостями — только острым или прямым.

Теорема о трёх перпендикулярах

Прямое утверждение. Если прямая, проведённая на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна её проекции, то она перпендикулярна и самой наклонной.



Обратное утверждение. Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.



Как решать задачи

В данной главе рассмотрены примеры заданий 3, 6, 8 (с кратким вариантом ответа) и 14, 16 (с развёрнутым вариантом ответа) различного уровня сложности, подробно разобраны основные типы задач в пределах каждого задания.

Задание 3

Описание: в задании представлена какая-либо фигура (круг, четырёхугольник, треугольник или угол) на клетчатой бумаге или в прямоугольной системе координат. Проверяется знание основ планиметрии: определений, наиболее известных теорем и формул.

В задачах встречаются следующие фигуры: угол, все виды треугольников, произвольный выпуклый четырёхугольник, трапеция, параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, круг.

Оценивание: максимально 1 балл.

Оформление ответа: в экзаменационный бланк № 1 следует записать целое число или конечную десятичную дробь в указанных единицах измерения. При этом единицы измерения записывать в бланк не нужно.

План выполнения

1. Внимательно прочитайте условие задачи.
2. Выясните, что нужно найти в задаче и что для этого требуется сделать.
3. Определите по чертежу необходимые данные.
4. Выполните на черновике нужные вычисления и при необходимости сделайте дополнительные построения.
5. Запишите полученное число в поле ответа КИМ и бланк ответов № 1.

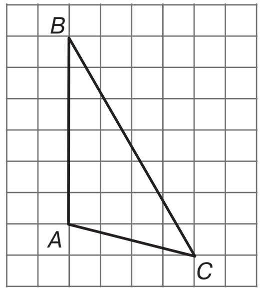
ПРИМЕЧАНИЕ

При решении надо учитывать указанный размер клетки. Как правило, он составляет 1×1 см. Иногда встречаются задачи, где указаны другие размеры клетки, поэтому необходимо внимательно читать задание.

Квадратная решётка

Пример 1

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AB.



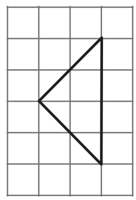
■ **Решение**

По свойству средняя линия треугольника равна половине стороны AB, то есть $\frac{1}{2}\cdot6=3$.

Ответ: 3.

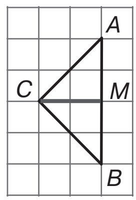
Пример 2

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён равнобедренный прямоугольный треугольник. Найдите длину его биссектрисы, проведённой к гипотенузе.



■ **Решение**

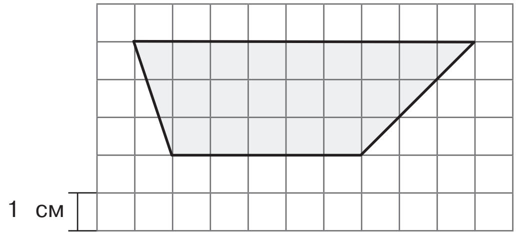
Воспользуемся свойством равнобедренного треугольника: биссектриса, проведённая к основанию, является медианой. Основанием в данном случае является гипотенуза AB, медианой и биссектрисой — отрезок CM. Его длина равна 2.



Ответ: 2.

Пример 3

Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



■ **Решение**

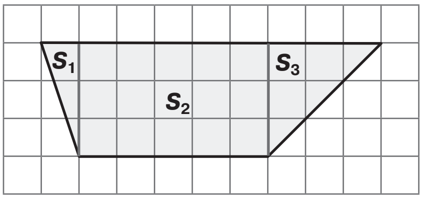
Способ 1

Применим формулу площади трапеции: $S=\frac{a+b}{2}\cdot h=\frac{5+9}{2}\cdot 3=21.$

Способ 2

Разобьём трапецию на прямоугольник и два прямоугольных треугольника:

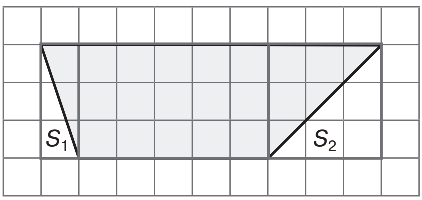
$$S=S_1+S_2+S_3=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3+3\cdot 5+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3=1{,}5+15+4{,}5=21.$$



Способ 3

Достроим трапецию до прямоугольника и вычтем площади двух прямоугольных треугольников:

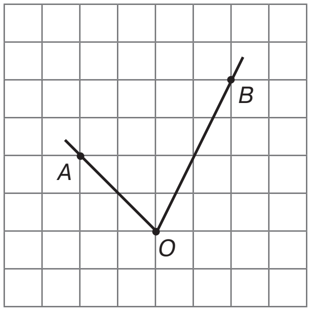
$$S=S_{\text{пр}}-(S_1+S_2)=3\cdot 9-\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\right)=27-(1{,}5+4{,}5)=21.$$

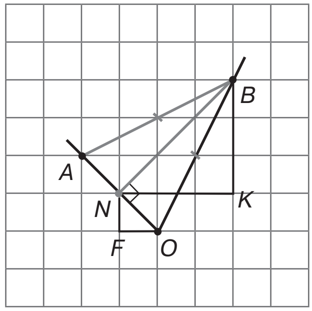


Ответ: 21.

Пример 4

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите тангенс $\angle AOB$.





■ Решение

Дополнительное построение: проведём отрезки AB и BN, где N — середина отрезка AO.

Можно заметить, что $BO = AB$, то есть $\triangle ABO$ — равнобедренный и BN — медиана, следовательно, BN — высота.

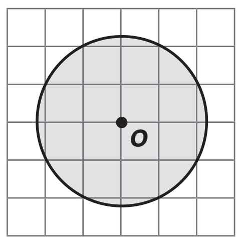
Из прямоугольного треугольника $\triangle BKN$: $BN = \sqrt{NK^2 + KB^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$.

Из прямоугольного треугольника $\triangle FNO$: $NO = \sqrt{OF^2 + FN^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Рассмотрим прямоугольный треугольник $\triangle BNO$: $\operatorname{tg}\angle AOB = \dfrac{BN}{NO} = \dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = 3$.

Ответ: 3.

Пример 5

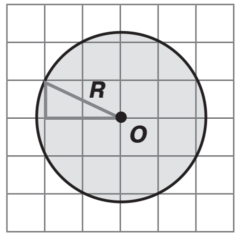
Найдите S — площадь круга, считая стороны квадратных клеток равными 1. В ответе укажите $\dfrac{S}{\pi}$.



■ Решение

Найдём радиус круга из прямоугольного треугольника: $R = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

Тогда площадь равна $S = \pi R^2 = \pi\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5\pi.$



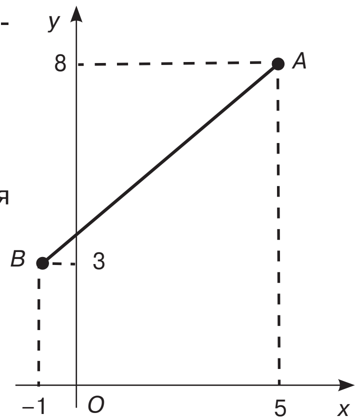
Следовательно, $\dfrac{S}{\pi} = 5.$

Ответ: 5.

Координатная плоскость

Пример 6

Найдите ординату середины отрезка, соединяющего точки A и B.



■ **Решение**

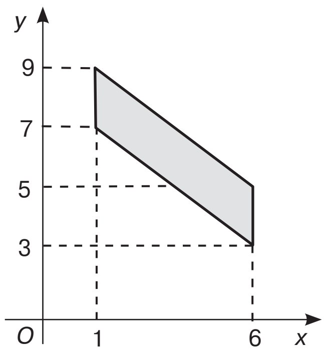
Координаты точек: $A(5;\ 8)$, $B(-1;\ 3)$.

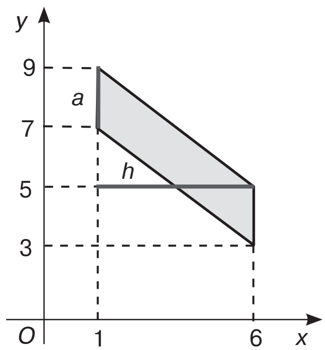
Ордината середины отрезка вычисляется по формуле $y = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{8+3}{2} = 5{,}5.$

Ответ: 5,5.

Пример 7

Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты (1; 7), (6; 3), (6; 5), (1; 9).





■ **Решение**

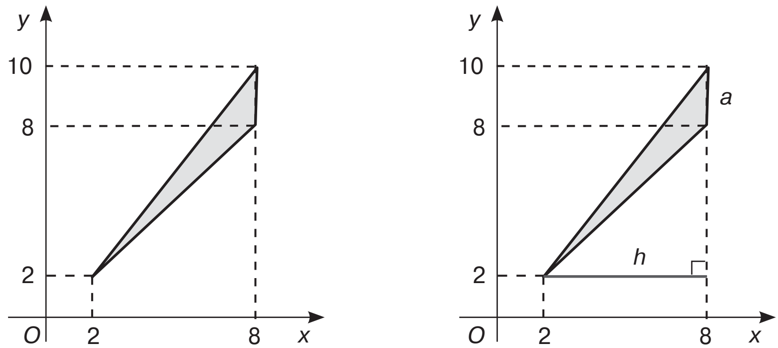
Данный четырёхугольник является параллелограммом, так как две противоположные (вертикальные) стороны равны и параллельны.

Воспользуемся формулой площади параллелограмма: $S = ah = (9-7)\cdot(6-1) = 2\cdot 5 = 10$.

Ответ: 10.

Пример 8

Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (2; 2), (8; 10), (8; 8).



■ **Решение**

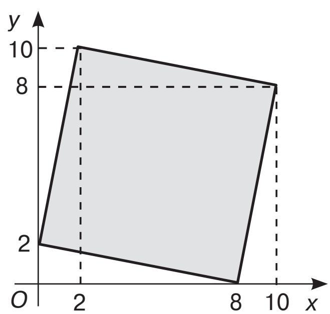
Построенный по данным координатам треугольник — тупоугольный. Воспользуемся формулой площади треугольника:

$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}(10-8)(8-2) = 6.$$

Ответ: 6.

Пример 9

Найдите площадь квадрата, вершины которого имеют координаты (8; 0), (10; 8), (2; 10), (0; 2).



■ **Решение**

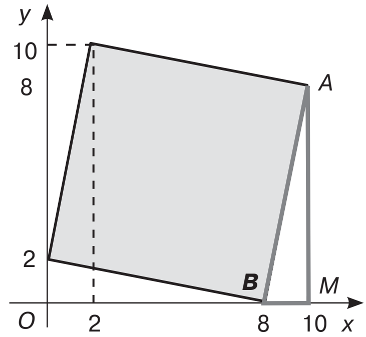
Построим квадрат с данными вершинами, сделаем дополнительные построения.

Длину стороны AB вычислим, используя теорему Пифагора в прямоугольном треугольнике $\triangle ABM$:

$$AB = \sqrt{AM^2 + BM^2} = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68}.$$

Тогда площадь квадрата равна $S = AB^2 = \left(\sqrt{68}\right)^2 = 68.$

Ответ: 68.



Пример 10

Найдите $|\vec{c}|$, если известно, что $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

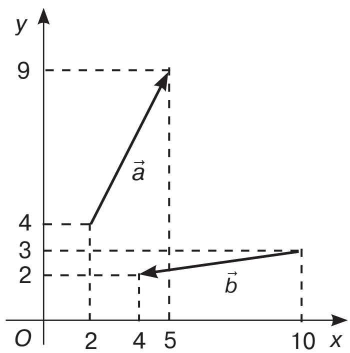
■ Решение

Определим координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, зная координаты начала и конца вектора: $\vec{a}\{5-2;\ 9-4\}$, $\vec{a}\{3;\ 5\}$;

$\vec{b}\{4-10;\ 2-3\}$, $\vec{b}\{-6;\ -1\}$.

Так как $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, то $\vec{c}\{3+(-6);\ 5+(-1)\}$, $\vec{c}\{-3;\ 4\}$. Тогда $|\vec{c}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$.

Ответ: 5.



Задание 6

Описание: в задании проверяется знание основных определений и теорем курса планиметрии. В задачах встречаются следующие фигуры: все виды треугольников, произвольный выпуклый четырёхугольник, трапеция, параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, круг, вписанные и описанные окружности, центральные и вписанные углы.

Оценивание: максимально 1 балл.

Оформление ответа: в экзаменационный бланк № 1 следует записать целое число или конечную десятичную дробь в указанных единицах измерения. При этом единицы измерения записывать в бланк не нужно.

План выполнения

1. Внимательно прочитайте задачу.

2. При необходимости выполните на чертеже дополнительные построения.

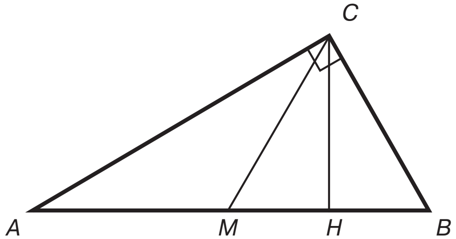
3. Произведите арифметические вычисления.

4. Запишите полученное число в поле ответа КИМ и бланк ответов № 1.

Треугольники

Пример 1

Острый угол B прямоугольного треугольника ABC равен $52°$. Найдите угол между высотой CH и медианой CM, проведёнными из вершины прямого угла C. Ответ дайте в градусах.



■ **Решение**

По теореме медиана CM, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, то есть $CM = AM = MB$. Тогда треугольник CBM — равнобедренный, следовательно, $\angle MCB = \angle B = 52°$.

Из теоремы о сумме углов треугольника получим: $\angle CMB = 180° - 2 \cdot 52° = 76°$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник MCH: $\angle H = 90°$, $\angle M = 76°$, значит, $\angle MCH = 14°$ — искомый угол между медианой и высотой.

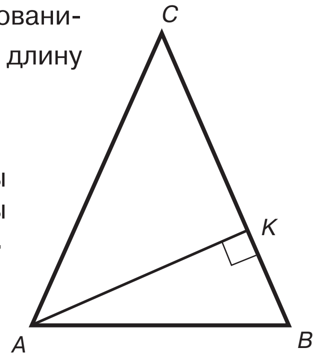
Ответ: 14.

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

При решении задачи можно воспользоваться теоремой: угол между медианой и высотой, проведёнными к гипотенузе, равен разности острых углов прямоугольного треугольника.

Пример 2

В равнобедренном треугольнике ABC с основанием $AB = 4\sqrt{15}$ $\cos BAC = 0{,}25$. Вычислите длину высоты AK.



■ Решение

В равнобедренном треугольнике ABC углы при основании равны, следовательно, равны и их косинусы, то есть $\cos BAC = \cos B = 0{,}25$.

Из основного тригонометрического тождества с учётом того, что угол B — острый, получим:

$$\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - (0{,}25)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

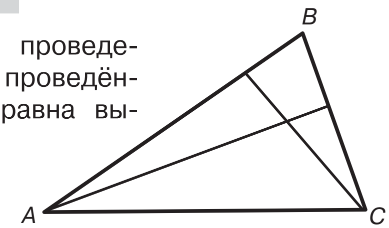
Рассмотрим прямоугольный треугольник $\triangle ABK$: $\sin B = \dfrac{AK}{AB}$.

Откуда получим: $AK = AB \sin B = 4\sqrt{15} \cdot \dfrac{\sqrt{15}}{4} = 15.$

Ответ: 15.

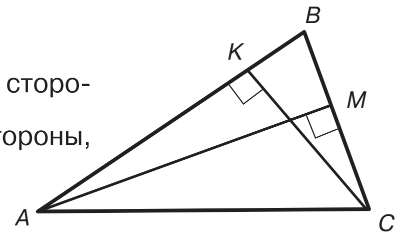
Пример 3

У треугольника со сторонами 18 и 12 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой стороне, равна 8. Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?



■ Решение

Пусть в треугольнике ABC AM и CK — высоты, $CK = 8$, $AB = 18$, $BC = 12$.



Примерим метод площадей. С одной стороны, $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot CK$. С другой стороны, $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} BC \cdot AM$.

Откуда получим: $AB \cdot CK = BC \cdot AM$.

Тогда искомая высота равна $AM = \dfrac{AB \cdot CK}{BC} = \dfrac{18 \cdot 8}{12} = 12.$

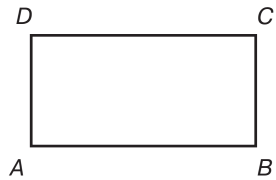
Ответ: 12.

Четырёхугольники

Пример 4

Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 72, а отношение соседних сторон равно 1:2.

■ **Решение**



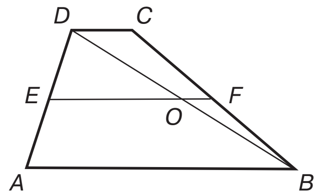
Рассмотрим прямоугольник $ABCD$. Пусть $AD=x$, тогда $AB=2x$.

По условию площадь равна 72, составим уравнение: $x\cdot 2x=72 \Leftrightarrow 2x^2=72 \Leftrightarrow x^2=36 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=6$.

Значит, $AD=6$, $AB=2\cdot 6=12$. Получим периметр: $P=2(AD+AB)=$ $=2(6+12)=36$.

Ответ: 36.

Пример 5



Основания трапеции равны 10 и 14. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из её диагоналей.

■ **Решение**

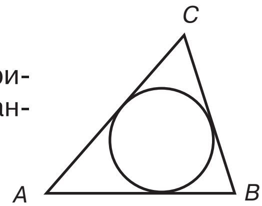
$\triangle DEO$ подобен $\triangle DAB$ по двум углам, коэффициент подобия $k=\dfrac{1}{2}$, следовательно, $EO=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}\cdot 14=7$.

Ответ: 7.

Вписанные и описанные окружности

Пример 6

Площадь треугольника равна 65, а его периметр — 52. Найдите радиус окружности, вписанной в данный треугольник.

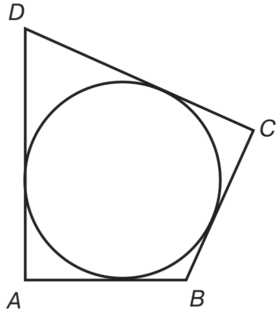


■ **Решение**

Воспользуемся формулой $S=\frac{1}{2}P\cdot r$. Выразим радиус вписанной окружности: $r=\frac{2S}{P}=\frac{2\cdot 65}{52}=2{,}5.$

Ответ: 2,5.

Пример 7



В четырёхугольник $ABCD$, периметр которого равен 183, вписана окружность, $AB=24$. Найдите CD.

■ **Решение**

В четырёхугольник вписана окружность, следовательно, $AB+CD=AD+BC$.

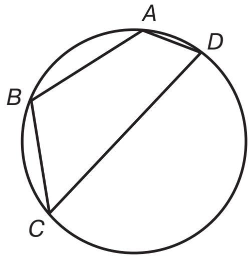
$P_{ABCD}=AB+CD+AD+BC=2(AB+CD)$. По условию $P_{ABCD}=183$, значит, $AB+CD=$ $=\frac{1}{2}P_{ABCD}=183:2=91{,}5$. Так как $AB=24$, то $CD=91{,}5-24=67{,}5$.

Ответ: 67,5.

Пример 8

Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 62° и 37°. Найдите больший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.

■ **Решение**



Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$, вписанный в окружность. Углы в 62° и 37° не могут быть противоположными, так как согласно теореме о вписанном в окружность четырёхугольнике сумма его противоположных углов равна 180°, в то время как $62^\circ+37^\circ\neq 180^\circ$. Значит, это смежные углы. Пусть $\angle D=62^\circ$, $\angle C=37^\circ$, тогда бóльшим из оставшихся является $\angle A$.

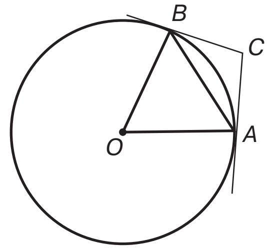
Так как $\angle A+\angle C=180^\circ$, то $\angle A=180^\circ-37^\circ=143^\circ$.

Ответ: 143.

Касательные, секущие, центральные и вписанные углы

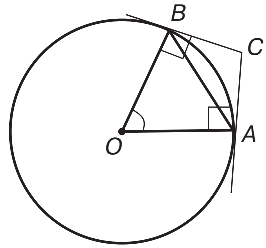
Пример 9

Через концы A и B дуги окружности с центром O проведены касательные AC и BC. Меньшая дуга AB равна 71°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.



■ **Решение**

CB и CA — касательные к окружности, значит, по свойству касательной $OB \perp CB$, $OA \perp CA$, где OB и OA — радиусы, проведённые в точки касания.



Угол BOA — центральный, следовательно, $\angle BOA = \cup AB = 71°$.

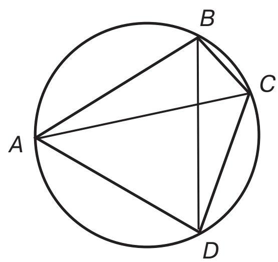
Рассмотрим выпуклый четырёхугольник $OBCA$. Сумма его углов равна 360°, при этом $\angle OBC = \angle OAC = 90°$.

Получим: $\angle ACB = 360° - (90° + 90° + 71°) = 109°$.

Ответ: 109.

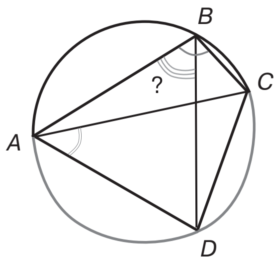
Пример 10

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 96°, угол CAD равен 54°. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.



■ **Решение**

$\angle ABC$ — вписанный угол, который опирается на дугу $\cup ADC$, следовательно, $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup ADC = 96°$, откуда получим величину дуги $\cup ADC$: $\cup ADC = 2\angle ABC = 2 \cdot 96° = 192°$.



$\angle CAD$ — вписанный угол, который опирается на дугу $\cup DC$, следовательно, $\angle CAD = \frac{1}{2} \cup DC = 54°$, откуда получим, что $\cup DC = 2\angle CAD = 2 \cdot 54° = 108°$.

Искомый $\angle ABD$ также является вписанным, он опирается на дугу $\cup AD$, величина которой составляет $\cup AD = \cup ADC - \cup DC = 192^\circ - 108^\circ = 84^\circ$. Отсюда приходим к выводу, что $\angle ABD = \frac{1}{2} \cup AD = \frac{1}{2} \cdot 84^\circ = 42^\circ$.

Ответ: 42.

Задание 8

Описание: для решения задач по стереометрии необходимо знать формулы для вычисления площадей фигур и объёмов тел. Задачи не относятся к числу сложных, как правило, решаются в одно или два действия, значительно реже — в три действия. Важно определить путь решения и правильно применить нужную формулу.

Оценивание: максимально 1 балл.

Оформление ответа: в экзаменационный бланк № 1 следует записать целое число или конечную десятичную дробь в указанных единицах измерения. При этом единицы измерения записывать в бланк не нужно.

План выполнения

1. Внимательно прочитайте задачу.
2. При необходимости выполните на черновике чертёж и дополнительные построения.
3. Сделайте на черновике необходимые вычисления.
4. Запишите полученное число в поле ответа КИМ и бланк ответов № 1.

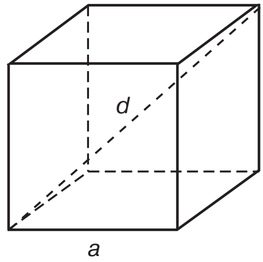
ПРИМЕЧАНИЕ

При подготовке необходимо повторить из курса планиметрии теорему Пифагора, теорему косинусов, определение синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника, формулы площадей.

Многогранники

Пример 1

Площадь поверхности куба равна 72. Найдите его диагональ.



■ Решение

Введём обозначения: a — ребро куба, d — диагональ куба.

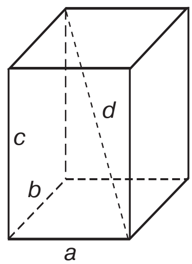
Площадь поверхности куба равна сумме площадей шести равных квадратов, поэтому $S=6a^2$. Получим: $72=6a^2 \Rightarrow a^2=12$.

По свойству диагоналей: $d^2=3a^2=3\cdot 12=36$, откуда $d=6$.

Ответ: 6.

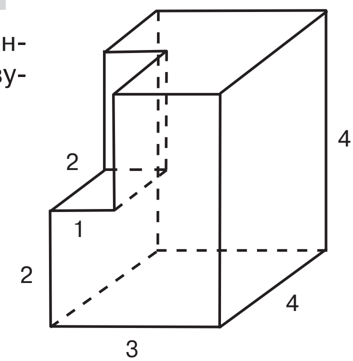
■ ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ! ■

В решении задачи использовано свойство диагоналей параллелепипеда. В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трёх его измерений: $d^2=a^2+b^2+c^2$.



Пример 2

Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



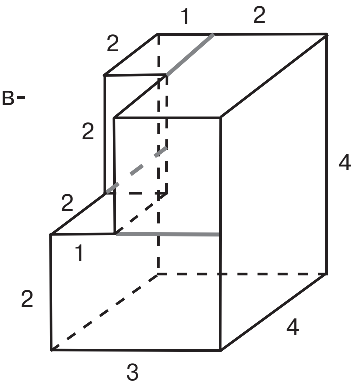
■ **Решение**

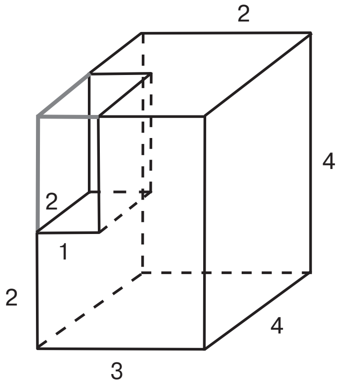
<u>Способ 1</u>

Площадь поверхности многогранника равна сумме площадей многоугольников:

$S = (2\cdot1+2\cdot4)+3\cdot4+4\cdot4+(2\cdot2+2\cdot4)+1\cdot2+$

$+2\cdot2+1\cdot2+(2\cdot3+2\cdot2)+3\cdot4=80.$





<u>Способ 2</u>

Заметим, что если многогранник достроить до параллелепипеда, то площадь поверхности не изменится.

$S = 2\cdot(3\cdot4+4\cdot4+3\cdot4)=80.$

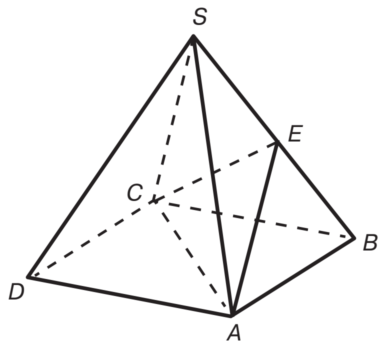
Ответ: 80.

Пример 3

Объём правильной четырёхугольной пирамиды *SABCD* равен 20,6. Точка *E* — середина ребра *SB*. Найдите объём треугольной пирамиды *EABC*.

■ **Решение**

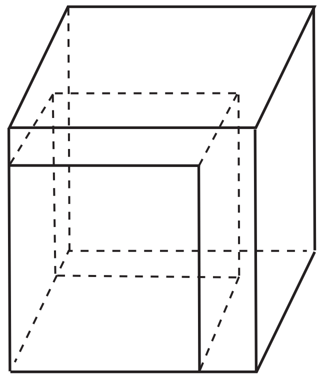
По сравнению с исходной четырёхугольной пирамидой, в треугольной пирамиде площадь основания в 2 раза меньше (*AC* — диагональ квадрата *ABCD*) и высота в 2 раза меньше (*E* — середина ребра *SB*), следовательно, объём треугольной пирамиды в 4 раза меньше, то есть $V_{EABC}=\frac{1}{4}V_{SABCD}=\frac{1}{4}\cdot20{,}6=5{,}15.$



Ответ: 5,15.

Пример 4

Если каждое ребро куба увеличить на 5, то его площадь поверхности увеличится на 270. Найдите ребро куба.



■ Решение

Пусть ребро куба равно a, тогда площадь поверхности равна $S = 6a^2$.

Если ребро куба увеличить на 5, оно будет равно $a + 5$, а площадь поверхности, с одной стороны, $6(a+5)^2$, с другой стороны, на 270 больше площади поверхности исходного куба, то есть равна $6a^2 + 270$.

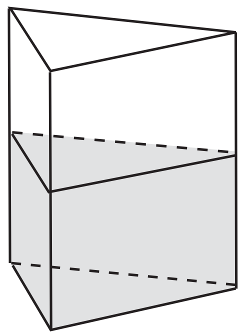
Составим и решим уравнение: $6(a+5)^2 = 6a^2 + 270 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a+5)^2 = a^2 + 45 \Leftrightarrow a^2 + 10a + 25 = a^2 + 45 \Leftrightarrow 10a = 20 \Leftrightarrow a = 2.$

Ответ: 2.

Пример 5

В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 650 см^3 воды и погрузили в воду деталь. При этом уровень воды поднялся с отметки 13 см до отметки 17 см. Найдите объём детали. Ответ выразите в см^3.



■ Решение

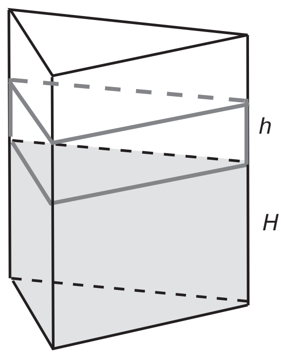
Объём погружённой детали равен объёму вытесненной жидкости, то есть $V_{\text{дет}} = S_{\text{осн}} \cdot h$, где $h = 17 - 13 = 4$.

Площадь основания вычислим, зная объём налитой воды:

$$V_{\text{воды}} = S_{\text{осн}} \cdot H \Rightarrow S_{\text{осн}} = \frac{V_{\text{воды}}}{H} = \frac{650}{13} = 50.$$

Значит, $V_{\text{дет}} = 50 \cdot 4 = 200.$

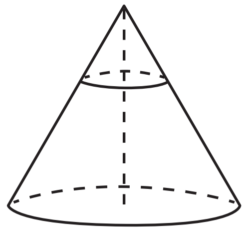
Ответ: 200.



Тела вращения

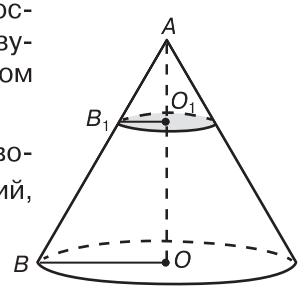
Пример 6

Площадь основания конуса равна 50. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки длиной 2 и 3, считая от вершины. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью.



■ **Решение**

Пусть A — вершина конуса, O — центр основания, O_1 — центр сечения, AB — образующая, тогда отрезок OB является радиусом основания, OB_1 — радиусом сечения.



Треугольники AB_1O_1 и ABO подобны по первому признаку подобия ($\angle A$ — общий, $\angle O_1 = \angle O = 90°$).

Определим коэффициент подобия:

$$k = \frac{AO_1}{AO} = \frac{AO_1}{AO_1 + O_1O} = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}.$$

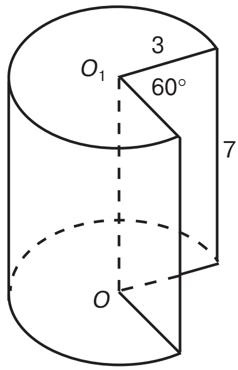
Основание и сечение являются подобными кругами с тем же коэффициентом подобия, поэтому $\frac{S_{сеч}}{S_{осн}} = k^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2$. Откуда получим:

$$\frac{S_{сеч}}{50} = \frac{4}{25} \Rightarrow S_{сеч} = 8.$$

Ответ: 8.

Пример 7

Найдите объём V части цилиндра, изображённой на рисунке. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

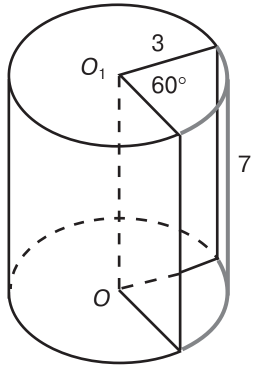


■ **Решение**

Достроим тело до цилиндра.

$$V_{цил} = S_{осн} \cdot h = \pi R^2 \cdot h = \pi \cdot 3^2 \cdot 7 = 63\pi.$$

Тогда объём данного тела равен $V = \dfrac{360^\circ - 60^\circ}{360^\circ} V_{цил} = \dfrac{300^\circ}{360^\circ} 63\pi = \dfrac{5 \cdot 63\pi}{6} = 52{,}5\pi.$

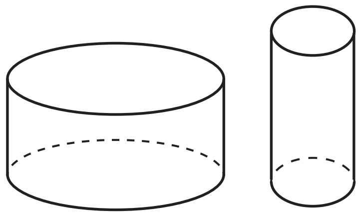


Значит, $\dfrac{V}{\pi} = 52{,}5.$

Ответ: 52,5.

Пример 8

В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 7 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй сосуд, диаметр которого в 3 раза меньше первого? Ответ выразите в см.



■ **Решение**

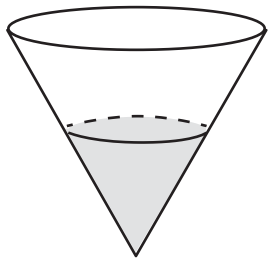
Объём цилиндра: $V_{цил} = S_{осн} \cdot h = \pi r^2 h.$

Если диаметр второго цилиндра в 3 раза меньше первого, значит, и радиус меньше в 3 раза, следовательно, площадь основания уменьшится в 9 раз. Так как при переливании объём жидкости не изменяется, то высота (уровень жидкости) должна увеличиться в 9 раз, то есть она будет равна $7 \cdot 9 = 63$ (см).

Ответ: 63.

Пример 9

В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\dfrac{2}{3}$ высоты. Объём жидкости равен 72 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



■ **Решение**

Меньший конус подобен большему с коэффициентом подобия $k = \dfrac{2}{3}.$

Следовательно, $\frac{V_{\text{мал}}}{V_{\text{бол}}}=k^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3$, то есть $\frac{V_{\text{мал}}}{V_{\text{бол}}}=\frac{8}{27}\Rightarrow V_{\text{бол}}=\frac{27V_{\text{мал}}}{8}=$

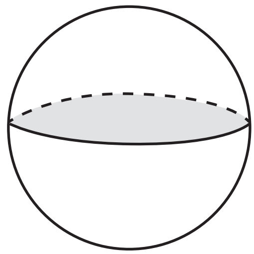
$=\frac{27\cdot 72}{8}=243.$

Значит, нужно долить $V=V_{\text{бол}}-V_{\text{мал}}=243-72=171$(мл).

Ответ: 171.

Пример 10

Площадь большого круга шара равна 3,2. Найдите площадь поверхности шара.



■ **Решение**

Большой круг шара — это круг, получаемый при сечении шара плоскостью, проходящей через его центр. Радиус большого круга равен радиусу шара, поэтому $S_{\text{кр}}=\pi R^2$.

Площадь поверхности шара вычисляется по формуле $S_{\text{пов}}=4\pi R^2$, то есть $S_{\text{пов}}=4S_{\text{кр}}=4\cdot 3{,}2=12{,}8$.

Ответ: 12,8.

Задание 14

Описание: задание проверяет умение учащихся анализировать условие задачи, делать выводы, находить взаимосвязь между элементами многогранников и доказывать утверждения на основании свойств. Задание состоит из условия и двух вопросов: а) доказательство утверждения; б) вычисление. В бланке ответов № 2 записывается решение задачи и для пункта *а*, и для пункта *б*. В ответ вносится только значение для части *б*. Поскольку решение задачи прописывается полностью, в ответе могут быть различные числа (дробные, иррациональные и т. п.).

Оценивание: максимально 2 балла.

Оформление ответа: в экзаменационный бланк № 2 следует записать обоснованное решение, перенести чертёж и ответ.

План выполнения

1. Внимательно прочитайте условие. Запишите номер задания в бланк ответов № 2.
2. Выполните чертёж и дополнительные построения на черновике.
3. Сделайте необходимые вычисления.
4. Перенесите ход решения и ответ в бланк ответов № 2.

ПРИМЕЧАНИЕ

Задание может быть оценено в 1 балл, если выполнен только один из пунктов.

Расстояния между прямыми и плоскостями, от точки до прямой и до плоскости

Пример 1

В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB=5$ и диагональю $BD=9$. Все боковые рёбра пирамиды равны 5. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E, на ребре AS — точка F так, что $SF=BE=4$.

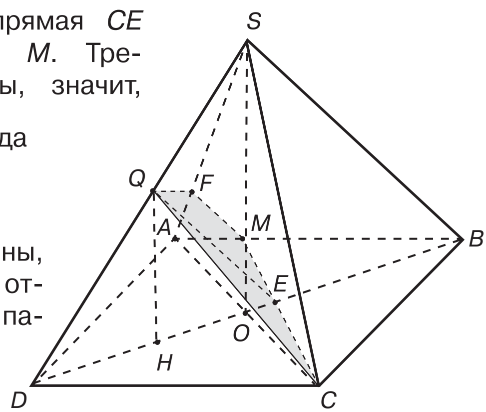
а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB.

б) Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q. Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC.

Решение:

а) $DE=9-BE=9-4=5$. Пусть прямая CE пересекает ребро AB в точке M. Треугольники BME и DCE подобны, значит, $\frac{BM}{DC}=\frac{BE}{DE}=\frac{4}{5}$, откуда $BM=4$, тогда

$AM=1$.



Треугольники ABS и AMF подобны, значит, отрезок FM параллелен отрезку SB. Поэтому прямая SB параллельна плоскости CEF.

б) Из доказанного в предыдущем пункте следует, что отрезок QE параллелен отрезку SB.

Тогда $\frac{DQ}{QS}=\frac{DE}{EB}=\frac{5}{4}$. Пусть O — центр основания $ABCD$. Так как все боковые рёбра пирамиды равны, SO — высота пирамиды.

Получим: $SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{25-\left(\frac{9}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{19}}{2}$.

Плоскость SDB перпендикулярна плоскости основания, и проекция H точки Q на плоскость основания лежит на отрезке DO.

Из подобия треугольников DQH и DSO получим: $QH=\frac{5}{9}SO=\frac{5\sqrt{19}}{18}$.

Ответ: б) $\frac{5\sqrt{19}}{18}$.

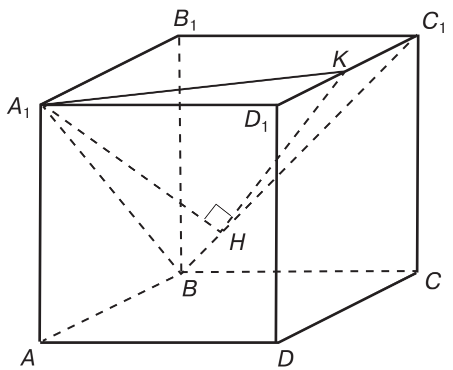
Пример 2

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка K — середина ребра C_1D_1.

а) Докажите, что расстояние от вершины A_1 до прямой BK равно ребру куба.

б) Найдите угол между плоскостями KBA_1 и BCC_1.

Решение:



а) Обозначим ребро куба через a, тогда $AB=a$, $A_1B=a\sqrt{2}$ (в прямоугольном треугольнике ABA_1), $A_1K=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{5a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$

(в прямоугольном треугольнике A_1D_1K), $BK=\sqrt{a^2+\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{9a^2}{4}}=\frac{3a}{2}$ (в прямоугольном треугольнике KBB_1, $KB_1=A_1K$).

В треугольнике A_1BK из теоремы косинусов получим:

$$\cos\angle A_1BK=\frac{A_1B^2+BK^2-A_1K^2}{2A_1B\cdot BK}=\frac{2a^2+\frac{9}{4}a^2-\frac{5}{4}a^2}{2\cdot\frac{3}{2}a\cdot a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Проведём перпендикуляр A_1H к прямой KB. A_1H является высотой треугольника A_1KB.

В прямоугольном треугольнике A_1HB имеем: $\sin\angle A_1BH=$ $=\sin\angle A_1BK=\frac{A_1H}{A_1B}$.

Если $\cos\angle A_1BK=\frac{1}{\sqrt{2}}$, то из основного тригонометрического тождества $\sin\angle A_1BK=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Значит, $A_1H=A_1B\cdot\sin\angle A_1BK=a\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=a$.

Таким образом, доказано, что расстояние от вершины A_1 до прямой BK равно ребру куба.

б) Вычислим площадь треугольника A_1BK: $S_{\triangle A_1BK}=\frac{1}{2}A_1H\cdot BK=$ $=\frac{1}{2}a\cdot\frac{3}{2}a=\frac{3}{4}a^2$. Треугольник BB_1C_1 является проекцией треугольника A_1BK на плоскость BCC_1.

$$S_{\triangle BB_1C_1}=\frac{1}{2}BB_1\cdot B_1C_1=\frac{1}{2}a\cdot a=\frac{1}{2}a^2.$$

Отношение площадей этих треугольников равно косинусу угла α между плоскостями KBA_1 и BCC_1, то есть $\cos\alpha=\frac{S_{\triangle BB_1C_1}}{S_{\triangle A_1BK}}=\frac{\frac{1}{2}a^2}{\frac{3}{4}a^2}=\frac{2}{3}$, значит, $\alpha=\arccos\frac{2}{3}$.

Ответ: б) $\arccos\frac{2}{3}$.

Угол между прямой и плоскостью, между плоскостями, между скрещивающимися прямыми

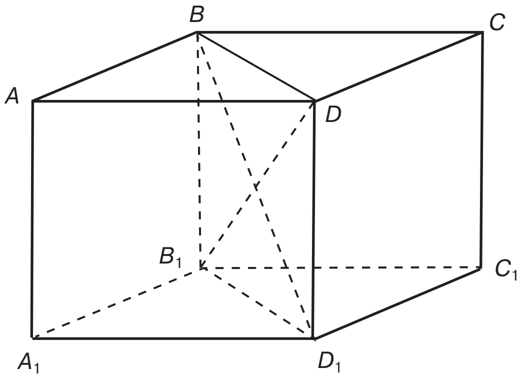
Пример 3

Плоскость α проходит через середину ребра AD прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярно прямой BD_1.

а) Докажите, что угол между плоскостью α и плоскостью ABC равен углу между прямыми BB_1 и B_1D.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью ABC, если объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен $48\sqrt{3}$, $AB = 2\sqrt{3}$ и $AD = 6$.

Решение:



а) В прямоугольнике BB_1D_1D $\angle BB_1D = \angle BD_1D$.

$DD_1 \perp ABC$, $BD_1 \perp \alpha$. Угол между плоскостями равен углу между прямыми, перпендикулярными этим плоскостям, поэтому искомый угол равен углу между прямыми BB_1 и B_1D.

б) Объём параллелепипеда вычислим по формуле: $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} =$

$= AB \cdot AD \cdot AA_1 = 48\sqrt{3}$.

Отсюда получим: $DD_1 = AA_1 = \dfrac{48\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot 6} = 4$. Рассмотрим прямоугольный треугольник BD_1D: $DD_1 = 4$, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 6^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

Тогда $\operatorname{tg}\angle BD_1D = \dfrac{BD}{DD_1} = \dfrac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$, откуда получим:

$\angle BD_1D = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = 60^\circ$.

Ответ: б) 60°.

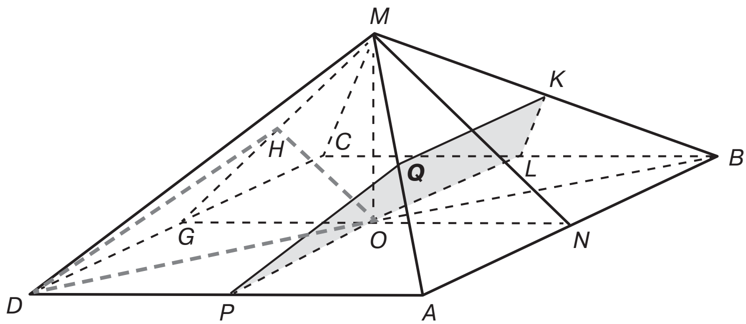
Пример 4

В основании правильной четырёхугольной пирамиды *MABCD* лежит квадрат *ABCD*. Противоположные боковые грани пирамиды попарно перпендикулярны. Через середины рёбер *MA* и *MB* проведена плоскость α, параллельная ребру *MD*.

а) Докажите, что плоскость α параллельна ребру *MC*.

б) Найдите угол между плоскостью α и прямой *BD*.

Решение:



а) Пусть точка *Q* — середина ребра *MA*, а точка *K* — середина ребра *MB*. Плоскость α пересекает грань *MAD* по отрезку *QP* (точка *P* лежит на ребре *AD*), параллельному ребру *MD*. Ребро *CD* параллельно ребру *AB*, а ребро *AB* параллельно отрезку *QK*. Следовательно, плоскость α параллельна плоскости грани *CMD*, поэтому прямая *MC* параллельна плоскости α.

б) Пусть длина стороны основания равна *a*. Вместо плоскости α рассмотрим параллельную ей плоскость *CMD*. Проведём к ней перпендикуляр *OH* из центра основания — точки *O*. Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью *MOH*. Это сечение — прямоугольный равнобедренный треугольник *NMG*, поскольку по условию грани *CMD* и *AMB* перпендикулярны. Отрезок *OH* параллелен катету MN этого треугольника и равен его половине: $OH=\frac{1}{2}MN=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Искомый угол равен углу $\angle HOD$.

В прямоугольном треугольнике OHD $\sin\angle HOD=\frac{OH}{OD}=\frac{a\sqrt{2}\cdot 2}{4\cdot a\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$.

Следовательно, $\angle HOD=30^\circ$.

Ответ: б) 30°.

Сечения

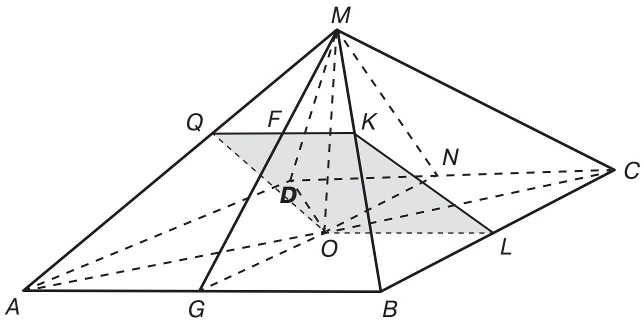
Пример 5

В основании правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 6. Противоположные боковые рёбра пирамиды попарно перпендикулярны. Через середины рёбер MA и MB проведена плоскость α, параллельная ребру MC.

а) Докажите, что сечение плоскостью α пирамиды $MABC$ является параллелограммом.

б) Найдите площадь сечения пирамиды $MABC$ плоскостью α.

Решение:



а) Пусть точка Q — середина ребра MA, а точка K — середина ребра MB.

Плоскость α пересекает плоскость BMC по отрезку KL, $KL\parallel MC$. Следовательно, α пересекает плоскость AMC по прямой, параллельной ребру MC. Эта прямая содержит среднюю линию треугольника AMC, значит, плоскость α проходит через точку O — середину отрезка AC.

Получим в сечении четырёхугольник $QKLO$, в котором $KL \parallel MC$, $QO \parallel MC$ и $KL = \frac{1}{2}MC$, $QO = \frac{1}{2}MC$. Значит, $QKLO$ — параллелограмм по признаку (две противоположные стороны равны и параллельны).

б) Пусть F — середина отрезка QK.

Рассмотрим плоскость MOF. $QK \perp FM$, $QK \perp MO$, следовательно, $QK \perp MOF$, значит, $QK \perp OF$ $(OF \subset MOF)$. Отсюда следует, что OF — высота параллелограмма $QKLO$.

Сечением пирамиды $MABCD$ плоскостью MOF является равнобедренный треугольник NMG.

OF — медиана прямоугольного треугольника MOG, проведённая к гипотенузе, значит, $OF = \frac{1}{2}MG$.

Треугольник AMC равнобедренный и прямоугольный по условию, поэтому $AM = \frac{1}{\sqrt{2}}AC = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot 6 = 6 = BM = CM = DM$.

Тогда все боковые грани являются равносторонними треугольниками. Отсюда $MG = 3\sqrt{3}$, $OF = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

$S_{QKLO} = OL \cdot OF = 3 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: б) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Пример 6

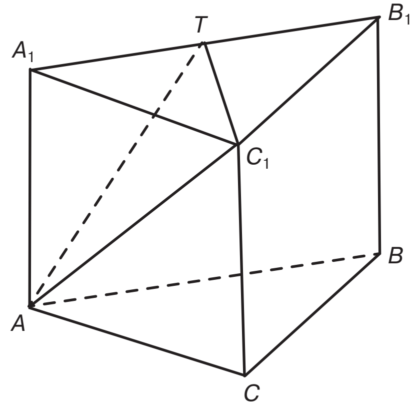
Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой сторона основания равна 2, боковое ребро равно 3. Через точки A, C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC.

Решение:

а) Прямая C_1T перпендикулярна A_1B_1, так как C_1T — медиана равностороннего треугольника $A_1B_1C_1$.



С другой стороны, прямая C_1T перпендикулярна AA_1, так как AA_1 перпендикулярна плоскости основания $A_1B_1C_1$. Значит, прямая C_1T перпендикулярна плоскости AA_1B_1, и потому C_1T перпендикулярна AT.

Таким образом, треугольник AC_1T прямоугольный.

б) $C_1T \perp A_1T$, $C_1T \perp AT$, поэтому $\angle A_1TA$ — искомый.

$\operatorname{tg}\angle A_1TA = \dfrac{AA_1}{A_1T} = \dfrac{3}{1} = 3$, следовательно, $\angle A_1TA = \operatorname{arctg} 3$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg} 3$.

Тела вращения (цилиндр, конус, шар)

Пример 7

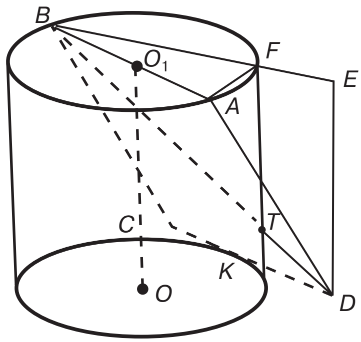
Квадрат $ABCD$ и цилиндр расположены таким образом, что AB — диаметр верхнего основания цилиндра, а CD лежит в плоскости нижнего основания и касается его окружности.

а) Докажите, что плоскость квадрата наклонена к плоскости основания цилиндра под углом $60°$.

б) Найдите длину той части отрезка BD, которая находится внутри цилиндра, если образующая цилиндра равна $\sqrt{6}$.

Решение:

а) Пусть сторона CD квадрата касается окружности нижнего основания в точке K, O_1 — центр верхнего основания, а O — центр нижнего. Тогда O_1O — перпендикуляр к плоскости основания, отрезок OK перпендикулярен отрезку CD и по теореме о трёх перпендикулярах отрезок O_1K перпендикулярен CD. Поэтому K — се-



редина CD. Тогда угол наклона — $\angle O_1KO$ и $\cos\angle O_1KO = \dfrac{OK}{O_1K} = \dfrac{r}{O_1K}$, где r — радиус цилиндра. При этом $O_1K = AD = AB = 2r$, значит, $\cos\angle O_1KO = \dfrac{r}{2r} = \dfrac{1}{2}$, следовательно, $\angle O_1KO = 60^\circ$.

б) Пусть отрезок BD пересекает поверхность цилиндра в точке T; E и F — проекции точек D и T соответственно на плоскость верхнего основания. Тогда FT лежит на образующей, и поэтому отрезок FT параллелен отрезку DE.

Значит, $\dfrac{DT}{TB} = \dfrac{EF}{FB}$. $\angle AFB = 90^\circ$ как угол, опирающийся на диаметр,

$$\frac{EF}{FB} = \frac{EF}{FA}\cdot\frac{FA}{FB} = \operatorname{tg}\angle EAF \cdot \operatorname{tg}\angle ABF = \operatorname{tg}^2\angle ABF = \left(\frac{EA}{AB}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Поэтому и $\dfrac{DT}{TB} = \dfrac{1}{4}$, то есть $BT = \dfrac{4}{5}BD = \dfrac{4}{5}AD\sqrt{2} = \dfrac{4}{5}DE\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2} =$

$$= \frac{16}{5} = 3{,}2.$$

Ответ: 3,2.

Пример 8

На окружности основания конуса с вершиной S отмечены точки A, B и C так, что $AB = BC$. Медиана AM треугольника ACS пересекает высоту конуса.

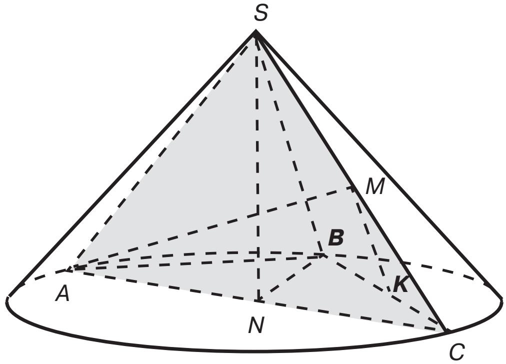
а) Точка N — середина отрезка AC. Докажите, что угол MNB прямой.

б) Найдите угол между прямыми AM и SB, если $AS = 2$, $AC = \sqrt{6}$.

Решение:

а) Так как медиана AM треугольника ACS пересекает высоту конуса, плоскость ACS содержит высоту конуса. Значит, AC — диаметр основания конуса и SN — его высота.

Медиана BN треугольника ABC перпендикулярна прямой AC. Также отрезок BN перпендикулярен высоте конуса SN как радиус



основания. Следовательно, прямая BN перпендикулярна плоскости ACS, а значит, угол MNB прямой.

б) Пусть K — середина отрезка BC, $AS=2$, $AC=\sqrt{6}$. Тогда искомый угол будет равен углу AMK, поскольку средняя линия MK треугольника BCS параллельна прямой SB; $MK=\frac{SB}{2}=1$.

В треугольнике ACS найдём медиану AM: $AM=\frac{\sqrt{2AS^2+2AC^2-SC^2}}{2}=$

$=\frac{\sqrt{AS^2+2AC^2}}{2}=2.$

В прямоугольном треугольнике ABC $AB=\sqrt{3}$, $BK=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $AK=\sqrt{AB^2+BK^2}=\frac{\sqrt{15}}{2}$. В треугольнике AMK по теореме косинусов

$\cos\angle AMK=\frac{AM^2+MK^2-AK^2}{2AM\cdot MK}=\frac{5}{16}$, откуда $\angle AMK=\arccos\frac{5}{16}$.

Ответ: б) $\arccos\frac{5}{16}$.

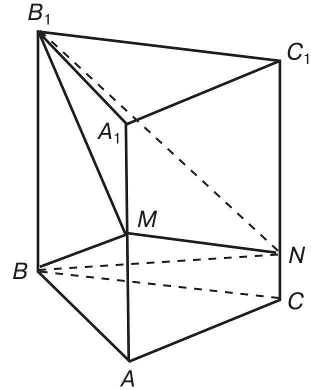
Объёмы тел

Пример 9

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 6. На рёбрах AA_1 и CC_1 отмечены точки M и N соответственно, причём $AM=2$, $CN=1$.

а) Докажите, что плоскость MNB_1 разбивает призму на два многогранника, объёмы которых равны.

б) Найдите объём тетраэдра $MNBB_1$.



Решение:

а) Площадь основания призмы равна $S_{\triangle ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$, объём равен $V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{\triangle ABC} \cdot AA_1 = 9\sqrt{3} \cdot 6 = 54\sqrt{3}$.

Плоскость MNB_1 разбивает призму на два многогранника: $B_1A_1C_1NM$ и $ABCMB_1N$.

В четырёхугольной пирамиде $B_1A_1C_1NM$ высота совпадает с высотой основания призмы $A_1B_1C_1$, опущенной на сторону A_1C_1, и равна $3\sqrt{3}$. A_1C_1NM — трапеция, $S_{A_1C_1NM} = \frac{A_1M + NC_1}{2} \cdot AC = \frac{4+5}{2} \cdot 6 = 27$.

Тогда $V_{B_1A_1C_1NM} = \frac{1}{3} S_{A_1C_1NM} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 27 \cdot 3\sqrt{3} = 27\sqrt{3}$, то есть $V_{B_1A_1C_1NM} = \frac{1}{2} V_{ABCA_1B_1C_1}$, поэтому объёмы многогранников $B_1A_1C_1NM$ и $ABCMB_1N$ равны.

б) В четырёхугольной пирамиде $BACNM$ высота совпадает с высотой основания призмы ABC, опущенной на сторону AC, и равна $3\sqrt{3}$. $ACNM$ — трапеция, $S_{ACNM} = \frac{AM + NC}{2} \cdot AC = \frac{2+1}{2} \cdot 6 = 9$.

Тогда $V_{BACNM} = \frac{1}{3} S_{ACNM} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$.

Многогранник $ABCMB_1N$ состоит из двух многогранников: $BACNM$ и $MNBB_1$.

Значит, $V_{MNBB_1} = 27\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$.

Ответ: б) $18\sqrt{3}$.

Пример 10

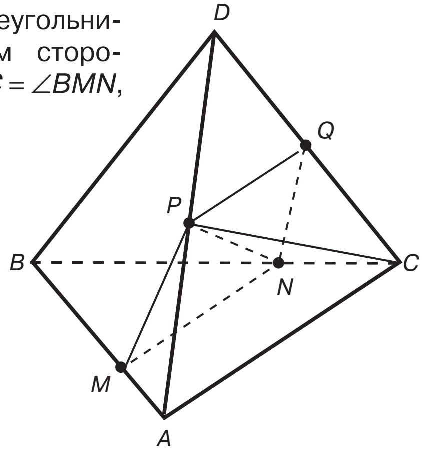
На рёбрах AB и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причём $AM:BM=CN:NB=1:2$.

Точки P и Q — середины сторон DA и DC соответственно.

а) Докажите, что P, Q, M и N лежат в одной плоскости.

б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость PQM разбивает пирамиду.

Решение:



а) Треугольник ABC подобен треугольнику MBN по двум пропорциональным сторонам и углу между ними. Тогда $\angle BAC=\angle BMN$,

$AC \parallel MN$.

$AC \parallel PQ$, так как PQ — средняя линия треугольника ADC. Значит, $PQ \parallel MN$, и поэтому P, Q, M и N лежат в одной плоскости.

б) Пусть объём $ABCD$ равен V. Пятигранник $APMCQN$ состоит из четырёхугольной пирамиды $PACNM$ с основанием $ACNM$ и треугольной пирамиды $PQCN$ с основанием QCN. Выразим их объёмы через V.

Расстояние от P до плоскости BCD в 2 раза меньше расстояния от A до плоскости BCD, а площади треугольников QCN и BCD относятся как $1:6$. Значит, $V_{PQCN}=\dfrac{V}{12}$.

Площадь треугольника MBN составляет $\dfrac{4}{9}$ площади ABC. Значит, $\dfrac{S_{ACNM}}{S_{ABC}}=\dfrac{5}{9}$. Расстояние от точки P до плоскости ABC в 2 раза меньше расстояния от D до плоскости ABC, поэтому $V_{PACNM}=\dfrac{5V}{18}$.

Тогда получим: $V_{APMQCN}=\dfrac{13V}{36}$, то есть $\dfrac{V_{APMQCN}}{V_{BMNDPQ}}=\dfrac{13}{23}$.

Ответ: б) $13:23$.

Задание 16

Описание: задание проверяет умение решать задачи повышенного уровня сложности из курса планиметрии. Задание состоит из двух частей: а) доказательство утверждения; б) вычисление.

Оценивание: максимально 3 балла.

Оформление ответа: в бланке ответов № 2 записывается решение задачи и для пункта *а*, и для пункта *б*. В ответ вносится только значение для части *б*.

План выполнения

1. Внимательно прочитайте условие. Запишите номер задания в бланк ответов № 2.
2. Выполните чертёж и дополнительные построения на черновике.
3. Сделайте необходимые вычисления.
4. Перенесите ход решения и ответ в бланк ответов № 2.

ПРИМЕЧАНИЕ

Задание 16 является наиболее сложным среди геометрических задач из-за отсутствия алгоритмических решений. Трудности могут возникнуть уже при выполнении чертежа. Все утверждения, использованные при решении, непременно должны быть обоснованы. При этом можно ссылаться на теоремы из школьного курса. Если при решении задачи используются факты, не входящие в школьный учебник, то их необходимо доказать.

Многоугольники и их свойства

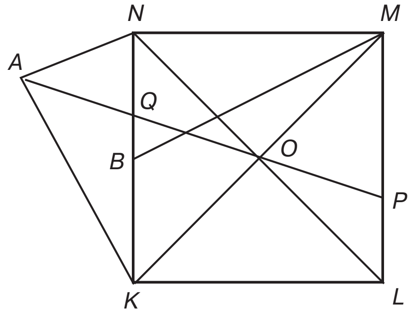
Пример 1

Точка A расположена вне квадрата $KLMN$ с центром O, причём треугольник KAN прямоугольный, $\angle A = 90^\circ$ и $AK = 2AN$. Точка B — середина стороны KN.

а) Докажите, что прямая BM параллельна прямой AN.

б) Прямая AO пересекает сторону ML квадрата в точке P. Найдите отношение $LP : PM$.

Решение:



а) Так как $MN = KN = 2BN$, прямоугольные треугольники BMN и NKA равны по двум катетам. Значит, $\angle MBN = \angle ANK$. Следовательно, прямая BM параллельна прямой AN.

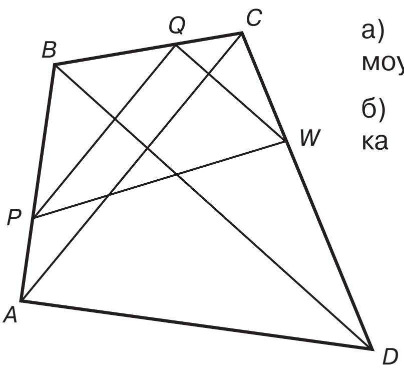
б) Диагонали квадрата перпендикулярны, равны и делятся точкой пересечения пополам, поэтому $\angle KON = 90°$ и $OK = ON$. Из точек A и O отрезок KN виден под прямым углом, значит, эти точки лежат на окружности с диаметром KN. Вписанные в эту окружность углы KAO и NAO опираются на равные хорды, поэтому AO — биссектриса угла KAN.

Пусть отрезок AP пересекает сторону KN в точке Q. Тогда AQ — биссектриса треугольника KAN. По свойству биссектрисы $\frac{NQ}{QK} = \frac{AN}{AK} = \frac{1}{2}$.
Треугольник LOP равен треугольнику NOQ по стороне и двум прилежащим к ней углам, значит, $LP = NQ$. Тогда $MP = KQ$. Следовательно, $\frac{LP}{PM} = \frac{NQ}{QK} = \frac{1}{2}$.

Ответ: б) $1:2$.

Пример 2

Точки P, Q, W делят стороны выпуклого четырёхугольника $ABCD$ в отношении $AP:PB = CQ:QB = CW:WD = 1:4$, радиус окружности, описанной около треугольника PQW, равен 10, $PQ = 16$, $QW = 12$.



а) Докажите, что треугольник PQW прямоугольный.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

Решение:

а) Треугольники ABC и PBQ подобны с коэффициентом подобия $k = AB:PB = CB:QB = 5:4$. Отсюда следует, что $PQ \parallel AC$, при этом

$AC = k \cdot PQ = \frac{5}{4} \cdot 16 = 20$. Аналогично $QW \parallel BD$ и $BD = 60$. Угол между прямыми AC и BD равен углу между прямыми PQ и QW. По теореме синусов в треугольнике PQW имеем:

$$2R = \frac{PQ}{\sin\angle QWP} = \frac{QW}{\sin\angle QPW} \Rightarrow 20 = \frac{16}{\sin\angle QWP} = \frac{12}{\sin\angle QPW}.$$

Следовательно, $\sin^2\angle QWP + \sin^2\angle QPW = \left(\frac{16}{20}\right)^2 + \left(\frac{12}{20}\right)^2 = 1$, откуда получим, что $\sin^2\angle QPW = \cos^2\angle QWP$.

Так как $\angle W$ острый, то $\sin\angle QPW = \cos\angle QWP$. Значит, $\angle QPW + \angle QWP = \frac{\pi}{2}$, то есть $\angle PQW = \frac{\pi}{2}$. Отсюда следует, что треугольник PQW прямоугольный.

б) Угол между диагоналями четырёхугольника $ABCD$ прямой. Поэтому его площадь равна $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 60 = 600$.

Ответ: б) 600.

Пример 3

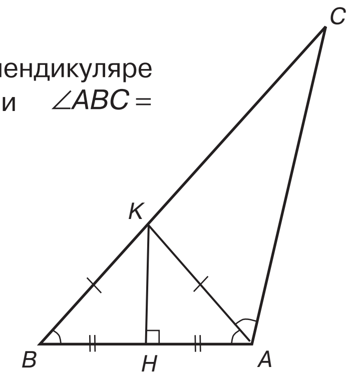
Дан треугольник ABC. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K, лежащей на стороне BC.

а) Докажите, что $AC^2 = BC \cdot CK$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKB, если $\cos B = \frac{2}{3}$, $AC = 36$, а площадь треугольника AKC равна $126\sqrt{5}$.

Решение:

а) Точка K лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB, значит, $\triangle AKH = \triangle BKH$ и $\angle ABC = \angle BAK = \angle CAK$.



Треугольники ABC и KAC подобны по двум углам, значит, $\frac{AC}{BC} = \frac{CK}{AC}$, откуда получим, что $AC^2 = BC \cdot CK$.

б) Пусть $\angle KAB = \angle KBA = \beta$. Тогда $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

$S_{ACK} = \frac{1}{2} AC \cdot AK \cdot \sin\beta \Leftrightarrow 126\sqrt{5} = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot AK \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Отсюда получим: $AK = 21$.

$\cos\beta = \frac{AB}{2AK} \Rightarrow AB = 2AK\cos\beta = 2 \cdot 21 \cdot \frac{2}{3} = 28$.

Тогда $S_{ABK} = \frac{1}{2} AB \cdot AK \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot 28 \cdot 21 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = 98\sqrt{5}$.

Пусть r — радиус окружности, вписанной в треугольник AKB.

Тогда $r = \frac{2S_{AKB}}{AK+KB+AB} = \frac{2 \cdot 98\sqrt{5}}{21+21+28} = \frac{14\sqrt{5}}{5}$.

Ответ: б) $\frac{14\sqrt{5}}{5}$.

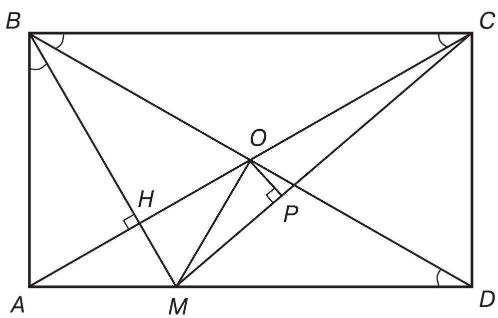
Пример 4

Прямая, проходящая через вершину B прямоугольника $ABCD$ перпендикулярно диагонали AC, пересекает сторону AD в точке M, равноудалённой от вершин B и D.

а) Докажите, что $\angle ABM = \angle DBC = 30^\circ$.

б) Найдите расстояние от центра прямоугольника до прямой CM, если $BC = 9$.

Решение:



а) Пусть $\angle CBD = \alpha$. Треугольник BMD равнобедренный, следовательно, $\angle DBM = \angle BDM = \angle BCD = \alpha$. Прямоугольные треугольники ACB и BDA равны по катету и гипотенузе, поэтому $\angle ACB = \angle ADB = \alpha$.

Пусть H — точка пересечения BM и AC. Тогда BH — высота прямоугольного треугольника ABC, проведённая из вершины прямого угла. Значит, $\angle ABH = \angle DBM = \alpha$. Следовательно, $\angle ABM = \angle DBM = \angle CBD = \frac{1}{3} \cdot 90^\circ = 30^\circ$.

б) Из прямоугольного треугольника ABC получим: $AB = BC\,\mathrm{tg}\,30^\circ = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника ABM получим: $AM = AB\,\mathrm{tg}\,30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3$.

$MD = AD - AM = 9 - 3 = 6$.

Из прямоугольного треугольника CMD получим: $MC = \sqrt{CD^2 + MD^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 6^2} = 3\sqrt{7}$.

Пусть O — точка пересечения диагоналей прямоугольника (центр) $ABCD$. Расстояние от центра O до прямой CM равно высоте OP треугольника CMO.

$$S_{CMO} = \frac{1}{2} S_{ACM} = \frac{1}{4} AM \cdot AB = \frac{1}{2} CM \cdot OP \Rightarrow OP = \frac{AM \cdot AB}{2MC} =$$

$$= \frac{3 \cdot 3\sqrt{3}}{2 \cdot 3\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{21}}{14}.$$

Ответ: б) $\frac{3\sqrt{21}}{14}$.

Пример 5

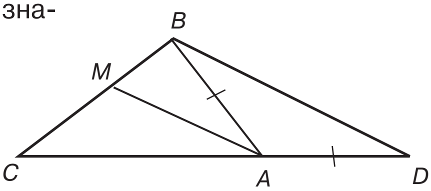
В треугольнике ABC на продолжении стороны AC за вершину A отложен отрезок AD, равный стороне AB. Прямая, проходящая через точку A параллельно BD, пересекает сторону BC в точке M.

а) Докажите, что AM — биссектриса угла BAC.

б) Найдите площадь трапеции $AMBD$, если площадь треугольника ABC равна 216 и известно, что $AC : AB = 5 : 4$.

Решение:

а) Пусть $\angle BAC = \alpha$. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle ABD + \angle ADB = \alpha$.



Треугольник ABD равнобедренный, значит, $\angle ADB = \angle ABD = \frac{\alpha}{2}$.

Так как $AM \parallel BD$, то $\angle MAC = \angle BDC = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\angle BAC$. Таким образом, AM — биссектриса угла BAC.

б) По свойству биссектрисы треугольника $\frac{CM}{MB} = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{4}$, значит,

$$\frac{S_{ACM}}{S_{ABC}} = \frac{CM}{CB} = \frac{5}{9} \Rightarrow S_{ACM} = \frac{5}{9}S_{ABC} = \frac{5}{9}\cdot 216 = 120.$$

Треугольник DBC подобен треугольнику ACM с коэффициентом $\frac{9}{5}$, значит, $\frac{S_{DBC}}{S_{ACM}} = \left(\frac{9}{5}\right)^2 \Rightarrow S_{DCB} = \frac{81}{25}S_{ACM} = \frac{81}{25}\cdot 120 = 388{,}8.$

Отсюда получим: $S_{AMBD} = S_{DCB} - S_{ACM} = 388{,}8 - 120 = 268{,}8.$

Ответ: б) 268,8.

Комбинации окружностей и треугольников, четырёхугольников

Пример 6

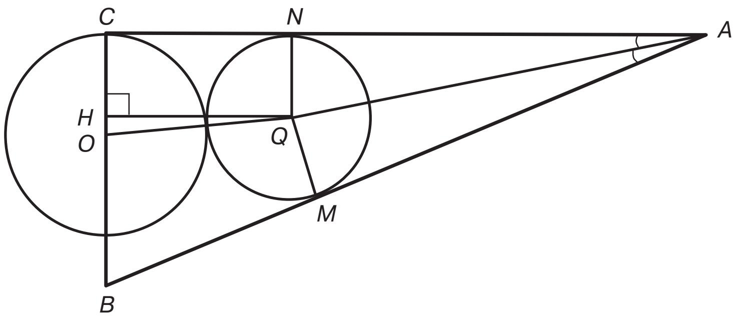
В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны стороны $AC = 15$, $BC = 8$. Окружность радиуса 2,5 с центром O на стороне BC проходит через вершину C. Вторая окружность касается катета AC, гипотенузы треугольника, а также внешним образом касается первой окружности.

а) Докажите, что радиус второй окружности меньше, чем $\frac{1}{4}$ длины катета AC.

б) Найдите радиус второй окружности.

Решение:

а) Пусть Q — центр второй окружности, M и N — точки её касания со сторонами AB и AC соответственно, а точка H — проекция точки Q на BC. Имеем: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17.$



Следовательно, $\cos A = \frac{15}{17}$, $\sin A = \frac{8}{17}$. Тогда $\operatorname{tg}\angle NAQ = \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{1}{4}$, поэтому $AC > AN = 4NQ$, что требовалось доказать.

б) Пусть x — радиус второй окружности. Рассмотрим прямоугольный треугольник OHQ: $QH = CN = 15-4x > 0$, $OQ = x+2{,}5$, $OH = |OC - CH| = |2{,}5 - x|$.

По теореме Пифагора $OH^2 + QH^2 = OQ^2$, откуда получим:

$$(15-4x)^2 + (2{,}5-x)^2 = (2{,}5+x)^2 \Rightarrow 16x^2 - 130x + 225 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2{,}5 \\ x = 5{,}625 \end{array}\right..$$

Но по условию $15 - 4x > 0$, поэтому $x = 2{,}5$.

Ответ: б) 2,5.

Пример 7

Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Диагональ BD разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и CD.

а) Докажите, что луч AC — биссектриса угла BAD.

б) Найдите CD, если известны диагонали трапеции: $AC = 12$ и $BD = 6{,}5$.

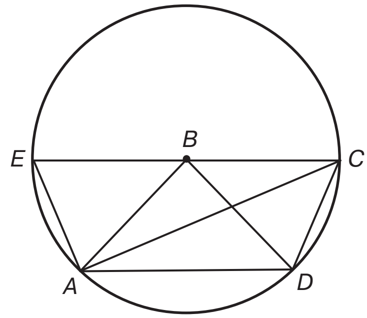
Решение:

а) $\angle BAC = \angle ACB = \angle CAD$, следовательно, AC — биссектриса угла BAD.

б) Так как $BA = BD = BC = 6{,}5$, точки A, D и C лежат на окружности радиуса 6,5 с центром в точке B. Продолжим основание BC за точку B до пересечения с этой окружностью в точке E. Тогда

EC — диаметр окружности, а $ADCE$ — равнобедренная трапеция. Поэтому $AE = CD$, а так как точка A лежит на окружности с диаметром CE, получаем, что $\angle CAE = 90°$. Из прямоугольного треугольника CAE получим:

$AE = \sqrt{CE^2 - AC^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$. Значит, $CD = AE = 5$.



Ответ: б) 5.

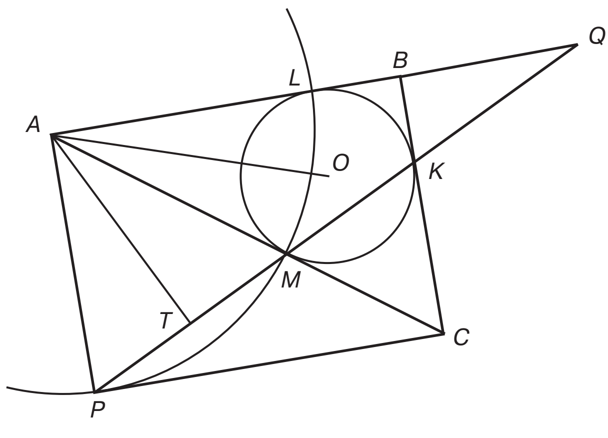
Пример 8

Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон BC, AB и AC в точках K, L и M соответственно. Прямая KM вторично пересекает в точке P окружность радиуса AM с центром A.

а) Докажите, что прямая AP параллельна прямой BC.

б) Пусть $\angle ABC = 90°$, $AM = 3$, $CM = 2$, Q — точка пересечения прямых KM и AB, а T — такая точка на отрезке PQ, что $\angle OAT = 45°$. Найдите QT.

Решение:



а) Так как $CK = CM$ и $AP = AM$, треугольники MCK и PAM равнобедренные, причём $\angle CMK = \angle AMP$ — углы при их основаниях MK и MP. Значит, $\angle MKC = \angle MPA$. Следовательно, прямая AP параллельна прямой BC.

б) Пусть $BK = BL = x$, тогда $CK = CM = 2$, $AL = AM = 3$, $BC = 2 + x$, $AB = 3 + x$.

По теореме Пифагора $AC^2 = BC^2 + AB^2$, откуда получим: $25 = (2+x)^2 + (3+x)^2 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -6 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

По условию задачи $x > 0$, поэтому $x = 1$, значит, $BC = 3$, $AB = 4$.

Так как $BC = AP = 3$ и $BC \parallel AP$, четырёхугольник $ABCP$ — прямоугольник, значит, $CP = AB = 4$.

Треугольники AMQ и CMP подобны с коэффициентом $k = \frac{AM}{CM} = \frac{3}{2}$, поэтому $AQ = \frac{3}{2}CP = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6$.

По теореме Пифагора $PQ = \sqrt{AP^2 + AQ^2} = \sqrt{9 + 36} = 3\sqrt{5}$.

Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle MAO = \frac{\alpha}{2}$, $\angle MAN = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $\angle PAT = $ $= 90^\circ - \angle QAT = 90^\circ - \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$, поэтому AT — биссектриса, следовательно, и высота равнобедренного треугольника MAP.

Таким образом, AT — высота прямоугольного треугольника PAQ, проведённая из вершины прямого угла. Значит, $QT = \frac{AQ^2}{PQ} = \frac{36}{3\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$.

Ответ: б) $\frac{12}{\sqrt{5}}$.

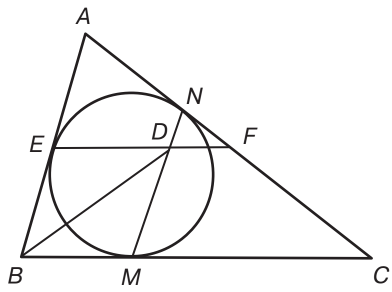
Пример 9

Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC и AC в точках M и N соответственно, E и F — середины сторон AB и AC соответственно. Прямые MN и EF пересекаются в точке D.

а) Докажите, что треугольник DFN равнобедренный.

б) Найдите площадь треугольника BED, если $AB = 20$ и $\angle ABC = 60^\circ$.

Решение:



а) Поскольку $CM = CN$, треугольник MCN равнобедренный. Прямые EF и BC параллельны, поэтому треугольник DFN подобен треугольнику MCN, следовательно, треугольник DFN также равнобедренный: $DF = NF$.

б) Обозначим $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Пусть p — полупериметр треугольника ABC. Предположим, что $a > c$. Тогда $BE = \frac{c}{2}$, $CF = \frac{b}{2}$, $CM = CN = p - c = \frac{a+b-c}{2}$, $FD = FN = CN - CF = \frac{a+b-c}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-c}{2}$. Значит, $ED = EF - FD = \frac{a}{2} - \frac{a-c}{2} = \frac{c}{2} = EB$, то есть треугольник BED — равнобедренный.

Аналогично для $a \le c$.

Так как $ED \parallel BC$, то $\angle BED = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Следовательно, $S_{BED} = \frac{1}{2} BE \cdot ED \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$.

Ответ: б) $25\sqrt{3}$.

Пример 10

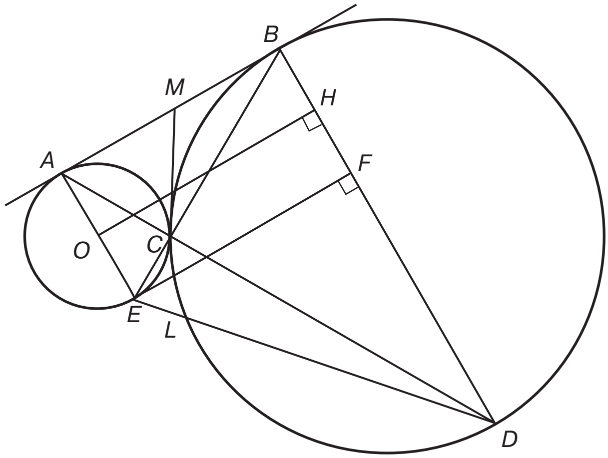
Две окружности касаются внешним образом в точке C. Прямая касается меньшей окружности в точке A, а большей — в точке B, отличной от A. Прямая AC вторично пересекает бо́льшую окружность в точке D, прямая BC вторично пересекает меньшую окружность в точке E.

а) Докажите, что прямая AE параллельна прямой BD.

б) Пусть L — отличная от D точка пересечения отрезка DE с большей окружностью. Найдите EL, если радиусы окружностей равны 2 и 5.

Решение:

а) Пусть общая касательная к данным окружностям, проведённая через точку C, пересекает общую касательную AB в точке M. Тог-



да $MA = MC = MB$, то есть медиана CM треугольника ABC равна половине стороны AB. Значит, $\angle ACB = 90°$. Тогда $\angle ACE = 90°$, поэтому AE — диаметр меньшей окружности. Следовательно, прямая AE перпендикулярна прямой AB. Аналогично докажем, что прямая BD перпендикулярна прямой AB. Прямые AE и BD перпендикулярны одной и той же прямой AB, значит, они параллельны.

б) Пусть радиусы окружностей равны r и R, где $r < R$. Опустим перпендикуляр OH из центра O меньшей окружности на диаметр BD большей. Тогда $OH^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 = 4rR$.

Проведём перпендикуляр EF из точки E на BD. Тогда $DE = \sqrt{EF^2 + DF^2} = \sqrt{OH^2 + (BD - BF)^2} = \sqrt{4rR + (2R - 2r)^2} =$

$= 2\sqrt{R^2 + r^2 - Rr} = 2\sqrt{25 + 4 - 10} = 2\sqrt{19}$.

Отрезок AC — высота прямоугольного треугольника ABE, проведённая из вершины прямого угла, EB и ED — секущие к большей окружности, проведённые из одной точки, поэтому $EL \cdot DE = EC \cdot EB = AE^2$.

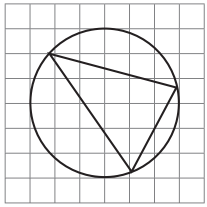
Следовательно, $EL = \dfrac{EC \cdot EB}{ED} = \dfrac{AE^2}{ED} = \dfrac{16}{2\sqrt{19}} = \dfrac{8}{\sqrt{19}}$.

Ответ: б) $\dfrac{8}{\sqrt{19}}$.

Задачи для самостоятельного решения

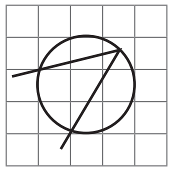
3

3.1 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите радиус описанной около него окружности.



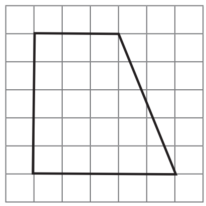
Ответ: ____________.

3.2 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите его величину. Ответ дайте в градусах.



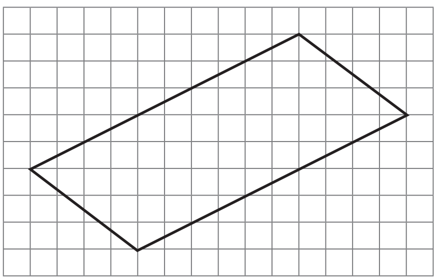
Ответ: ____________.

3.3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите длину средней линии этой трапеции.

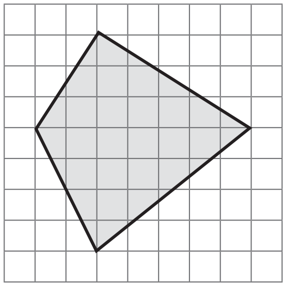


Ответ: ____________.

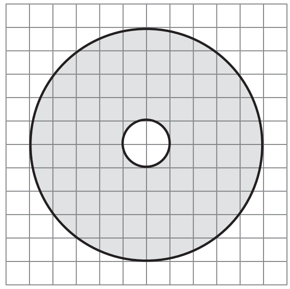
3.4 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён параллелограмм. Найдите длину его меньшей диагонали.



Ответ: ____________.



3.5



3.6

3.5 Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1.

Ответ: ________________.

3.6 На клетчатой бумаге построены два круга. Площадь внутреннего круга равна 12. Найдите площадь закрашенной фигуры.

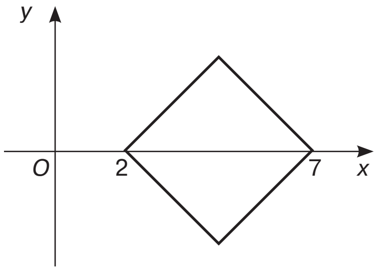
Ответ: ________________.

3.7 Найдите площадь квадрата, изображённого на рисунке.

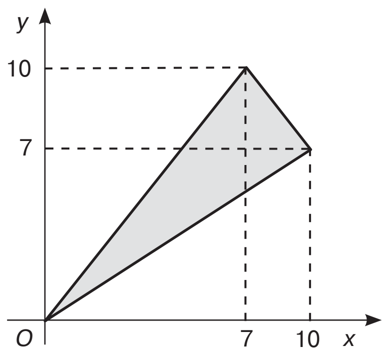
Ответ: ________________.

3.8 Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (0; 0), (10; 7), (7; 10).

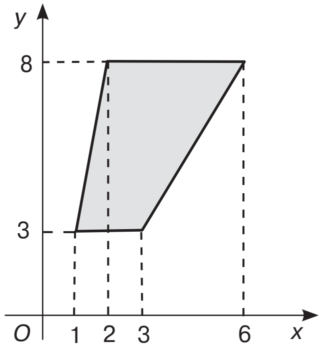
Ответ: ________________.



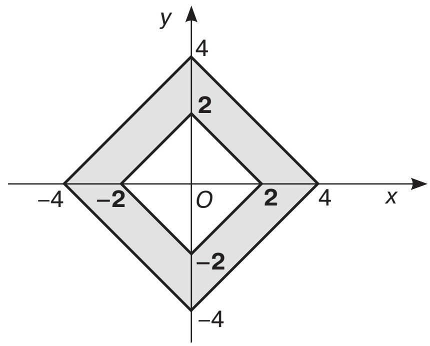
3.7



3.8



3.9



3.10

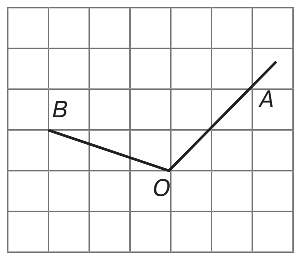
3.9 Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.

Ответ: ________________.

3.10 Найдите площадь закрашенной фигуры на координатной плоскости.

Ответ: ________________.

3.11 Найдите тангенс угла *AOB*, изображённого на рисунке.



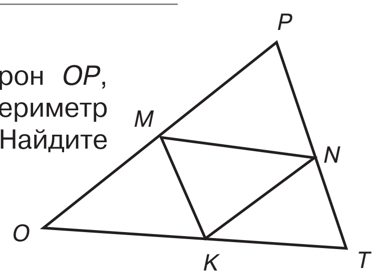
3.11

Ответ: ________________.

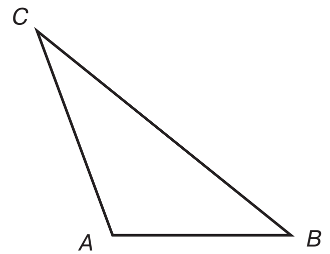
3.12 Точки *O* (0; 0), *A* (10; 8), *B* (8; 2), *C* (2; 6) являются вершинами четырёхугольника. Найдите ординату точки *P* пересечения его диагоналей.

Ответ: ________________.

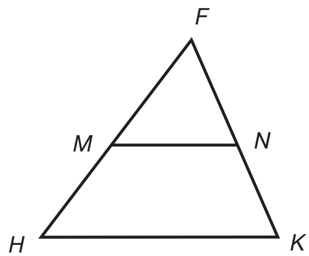
6.1 Точки *M*, *N*, *K* — середины сторон *OP*, *PT*, *TO* треугольника *OPT*. Периметр треугольника *MNK* равен 10. Найдите периметр треугольника *OPT*.



Ответ: ________________.



6.2



6.3

6.2 Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 6 и $4\sqrt{3}$, а угол между ними равен 120°.

Ответ: ____________________.

6.3 В треугольнике *FHK* отрезок *MN* — средняя линия, параллельная стороне *HK*. Площадь треугольника *FHK* равна 1. Найдите площадь трапеции *HMNK*.

Ответ: ____________________.

6.4 Основания равнобедренной трапеции равны 34 и 6. Высота трапеции равна 21. Найдите тангенс острого угла трапеции.

Ответ: ____________________.

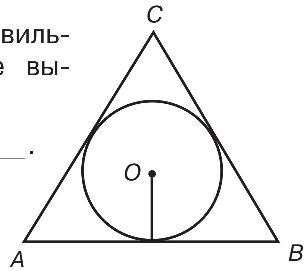
6.5 Периметр прямоугольника равен 34, а его площадь равна 60. Найдите диагональ этого прямоугольника.

Ответ: ____________________.

6.6 Угол между двумя соседними сторонами правильного многоугольника равен 156°. Найдите число вершин этого многоугольника.

Ответ: ____________________.

6.7 Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен 8,3. Найдите высоту этого треугольника.



6.7

Ответ: ________________________.

6.8 Сторона MK треугольника MKP равна 39. Противолежащий ей угол P равен 150°. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

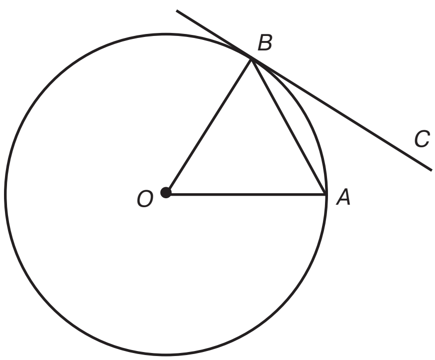
Ответ: ________________________.

6.9 Угол между хордой AB и касательной BC к окружности равен 41°. Найдите величину меньшей дуги, стягиваемой хордой AB. Ответ дайте в градусах.

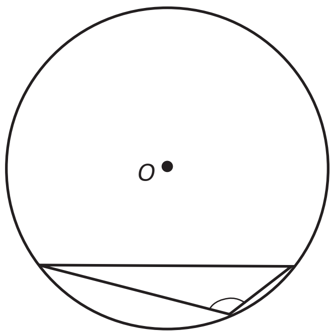
Ответ: ________________________.

6.10 Найдите тупой вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу окружности. Ответ дайте в градусах.

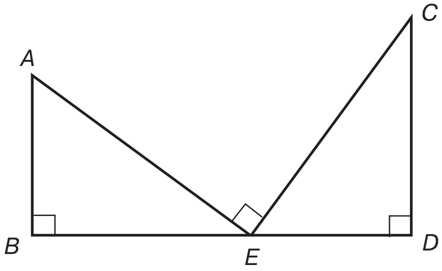
Ответ: ________________________.



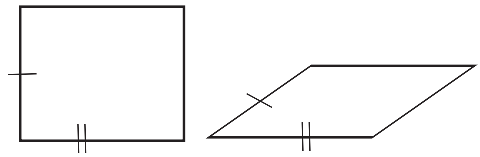
6.9



6.10



6.11



6.12

6.11 На рисунке $AB = 3$, $BE = 12$, $DE = 7$, прямая AB перпендикулярна прямой BD, CD перпендикулярна BD, EA перпендикулярна EC. Найдите CD.

Ответ: ______________________________.

6.12 Параллелограмм и прямоугольник имеют одинаковые стороны. Найдите острый угол параллелограмма, если его площадь равна половине площади прямоугольника. Ответ дайте в градусах.

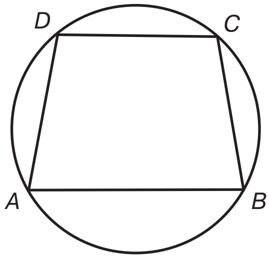
Ответ: ______________________________.

6.13 Около равнобедренной трапеции с основаниями 12 и 16 описана окружность. Найдите высоту трапеции, если радиус описанной окружности равен 10.

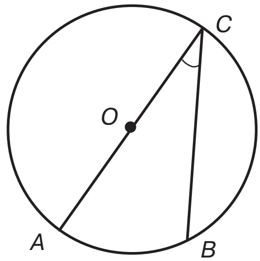
Ответ: ______________________________.

6.14 Вычислите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет 30 % окружности.

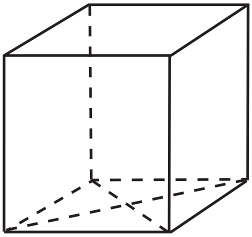
Ответ: ______________________________.



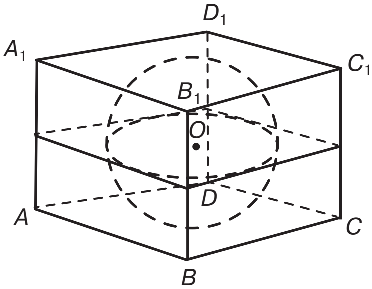
6.13



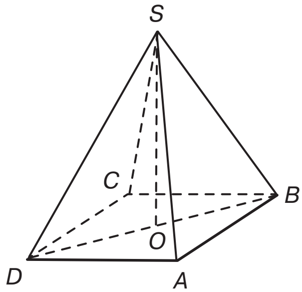
6.14



8.1



8.2



8.3

8.1 Найдите площадь полной поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 18 и 24, и боковым ребром, равным 11.

Ответ: ______________________________.

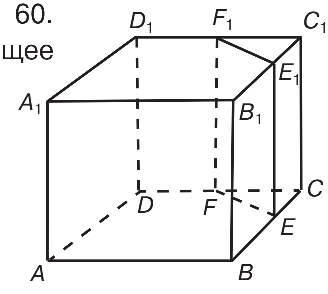
8.2 В прямоугольный параллелепипед вписана сфера с радиусом 1,5. Найдите объём параллелепипеда.

Ответ: ______________________________.

8.3 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO = 24$, $SD = 26$. Найдите длину отрезка AC.

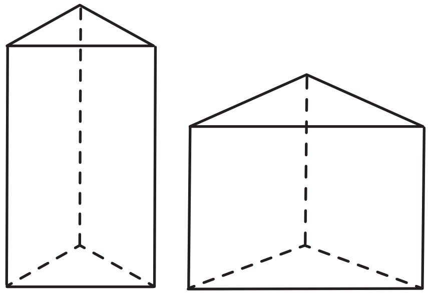
Ответ: ______________________________.

8.4 Объём куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 60. Построено сечение EFF_1E_1, проходящее через середины рёбер BC, CD и C_1D_1 и параллельное ребру CC_1. Найдите объём треугольной призмы $CEFC_1E_1F_1$.

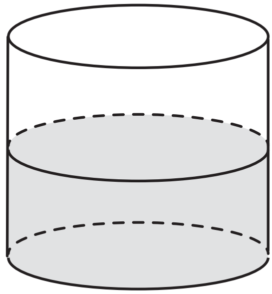


Ответ: ______________________________.

8.5 В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 18 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если её перелить в другой такой же сосуд, у которого сторона основа-



8.5



8.6

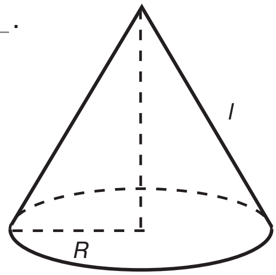
ния в 1,5 раза больше, чем у первого? Ответ выразите в см.

Ответ: ____________________.

8.6 В цилиндрический сосуд налили 3200 см^3 воды. Уровень воды при этом достигает высоты 8 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 3 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см^3.

Ответ: ____________________.

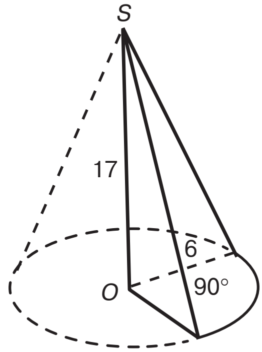
8.7 Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности конуса, если его образующая увеличится в 1,3 раза, а радиус основания останется прежним?



8.7

Ответ: ____________________.

8.8 Найдите объём V части конуса, изображённой на рисунке. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

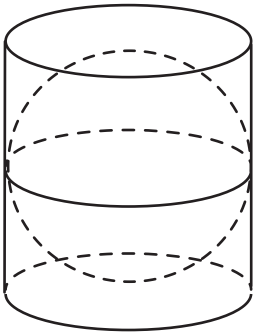


8.8

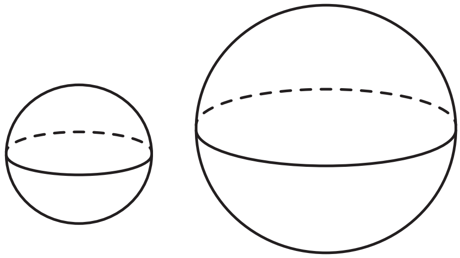
Ответ: ____________________.

8.9 Цилиндр описан около шара. Объём цилиндра равен 102. Найдите объём шара.

Ответ: ____________________.



8.9



8.10

8.10 Радиусы двух шаров равны 3 и 4. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей двух данных шаров.

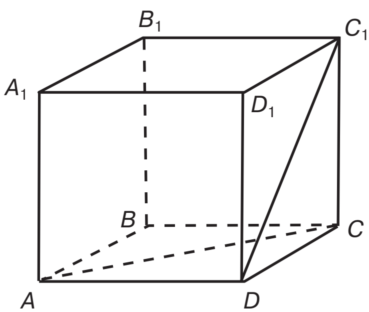
Ответ: ______________________.

8.11 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми DC_1 и AC. Ответ дайте в градусах.

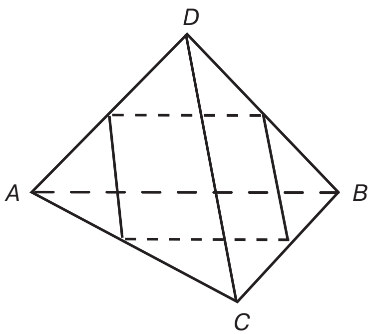
Ответ: ______________________.

8.12 Сечение площадью 2 проходит через середины рёбер правильного тетраэдра. Найдите площадь S полной поверхности тетраэдра. В ответе укажите $\frac{S}{\sqrt{3}}$.

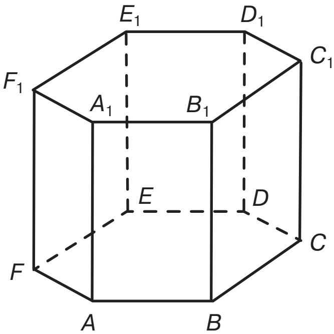
Ответ: ______________________.



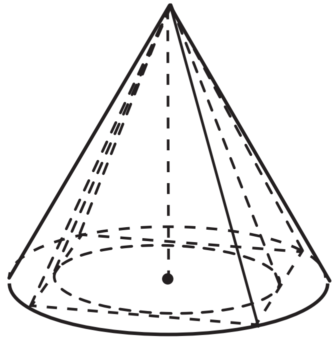
8.11



8.12



8.13



8.14

8.13 Найдите площадь полной поверхности правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны $\sqrt{3}$. В ответе укажите полученное значение, умноженное на $2-\sqrt{3}$.

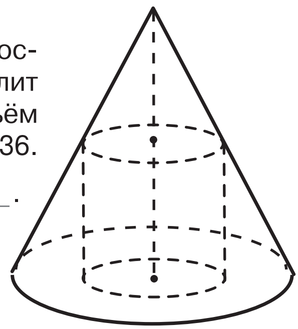
Ответ: ______________________________.

8.14 Во сколько раз объём конуса, описанного около правильной четырёхугольной пирамиды, больше объёма конуса, вписанного в эту пирамиду?

Ответ: ______________________________.

8.15 В конус вписан цилиндр так, что плоскость его верхнего основания делит высоту конуса пополам. Найдите объём цилиндра, если объём конуса равен 36.

Ответ: ______________________.



8.15

14

14.1 В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Точка K — середина ребра A_1B_1, а точка M делит ребро AC в отношении $AM:MC=1:3$.

а) Докажите, что KM перпендикулярно AC.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если $AB=6$, $AC=8$, $AA_1=3$.

14.2 Сфера радиуса $\sqrt{10}$ см касается всех сторон прямоугольного треугольника ABD ($\angle ABD = 90^\circ$), длины сторон которого 3 см, 4 см и 5 см.

а) Докажите, что отрезки CT, CK и CF перпендикулярны сторонам треугольника, где точка C — основание перпендикуляра, проведённого из центра O сферы к плоскости треугольника, T, K и F — точки касания сферы и сторон треугольника.

б) Вычислите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника.

14.3 В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка O — середина диагонали B_1D, точка F — середина ребра AD. $AA_1 = 8$, $AB = 6$, $BC = 15$.

а) Докажите, что прямая OF параллельна плоскости DCC_1.

б) Найдите угол между плоскостью A_1BC и прямой BC_1.

14.4 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC боковое ребро равно 7, а сторона основания равна 6. На продолжении ребра SA за точку A отмечена точка P, а на продолжении ребра SB за точку B — точка Q, причём $AP = BQ = SA$.

а) Докажите, что прямые PQ и SC перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и CPQ.

14.5 Высота правильной треугольной пирамиды равна $2\sqrt{3}$ см, боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 60°. Секущая плоскость параллельна стороне основания и содержит высоту пирамиды.

а) Докажите, что боковое ребро пирамиды скрещивается с противолежащей ему стороной основания.

б) Найдите площадь сечения.

14.6 В правильной треугольной пирамиде $MABC$ боковые рёбра равны 10, а сторона основания равна 12. Точки G и F делят стороны основания AB и AC соответственно так, что $AG : GB = AF : FC = 1 : 5$.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MGF является равнобедренным треугольником.

б) Найдите площадь сечения MGF.

14.7 Дан прямой круговой цилиндр с высотой 9 и радиусом основания 2. В одном из оснований проведена хорда AB, равная радиусу основания, а в другом его основании проведён диаметр CD, перпендикулярный прямой AB. Построено сечение цилиндра плоскостью $ABNM$ перпендикулярно прямой CD, причём точка C и центр основания цилиндра, содержащего отрезок CD, лежат по одну сторону от плоскости сечения.

а) Докажите, что диагонали четырёхугольника $ABNM$ равны.

б) Найдите объём пирамиды $CABNM$.

14.8 В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A, B, C, а на окружности другого основания — точка C_1, причём CC_1 — образующая цилиндра, а AC — диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 45°$, $AB = 2\sqrt{2}$, $CC_1 = 4$.

а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен $60°$.

б) Найдите объём цилиндра.

14.9 В треугольной пирамиде $SABC$ известны боковые рёбра: $SA = SB = 13$, $SC = 3\sqrt{17}$. Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы CM треугольника ABC. Эта высота равна 12.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите объём пирамиды $SABC$.

14.10 $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильная шестиугольная призма. Диагонали B_1F и B_1E равны соответственно $\sqrt{43}$ см и $\sqrt{39}$ см.

а) Докажите, что плоскости AA_1D_1 и DB_1F_1 перпендикулярны.

б) Найдите объём призмы.

14.11 Точки P и Q — середины рёбер AD и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно.

а) Докажите, что прямые B_1P и QB перпендикулярны.

б) Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точку P и перпендикулярной прямой QB, если ребро куба равно 6.

16.1 Прямая, проходящая через середину M гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC, перпендикулярна CM и пересекает катет AC в точке K. При этом $AK:KC=1:2$.

а) Докажите, что $\angle BAC=30^\circ$.

б) Пусть прямые MK и BC пересекаются в точке P, а прямые AP и BK — в точке Q. Найдите KQ, если $BC=\sqrt{21}$.

16.2 Точка A расположена вне квадрата $KLMN$ с центром O, причём треугольник KAN прямоугольный, $\angle A=90^\circ$ и $AK=3AN$. Точка B лежит на стороне KN, $KB:BN=2:1$.

а) Докажите, что прямая BM параллельна прямой AN.

б) Прямая AO пересекает сторону ML квадрата в точке P. Найдите отношение $LP:PM$.

16.3 Дан треугольник ABC. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K, лежащей на стороне BC.

а) Докажите, что $AC^2=BC\cdot CK$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKC, если $\cos B=0{,}6$, $AC=18$, а площадь треугольника AKC равна 108.

16.4 Прямая, проходящая через вершину B прямоугольника $ABCD$ перпендикулярно диагонали AC, пересекает сторону AD в точке M, равноудалённой от вершин B и D.

а) Докажите, что $\angle ABM = 30^\circ$.

б) Найдите расстояние от центра прямоугольника до прямой CM, если $BC = 6\sqrt{21}$.

16.5 В треугольнике ABC на продолжении стороны AC за вершину A отложен отрезок AD, равный стороне AB. Прямая, проходящая через точку A параллельно BD, пересекает сторону BC в точке M.

а) Докажите, что AM — биссектриса угла BAC.

б) Найдите площадь трапеции $AMBD$, если площадь треугольника ABC равна 54 и известно отношение $AC : AB = 5 : 4$.

16.6 В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны стороны: $AC = 12$, $BC = 5$. Окружность радиуса 0,5 с центром O на стороне BC проходит через вершину C. Вторая окружность касается катета AC, гипотенузы треугольника, а также внешним образом касается первой окружности.

а) Докажите, что радиус второй окружности меньше, чем $\frac{1}{5}$ длины катета AC.

б) Найдите радиус второй окружности.

16.7 Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны 6 и 8 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 5, средняя линия трапеции равна 25. Прямые AB и CD пересекаются в точке M.

а) Докажите, что треугольники MBC и MAD подобны.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник BMC.

16.8 Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Диагональ BD разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и CD.

а) Докажите, что луч AC — биссектриса угла BAD.

б) Найдите CD, если известны диагонали трапеции: $AC = 15$ и $BD = 8{,}5$.

16.9 Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон BC, AB и AC в точках K, L и M соответственно. Прямая KM вторично пересекает в точке P окружность радиуса AM с центром A.

а) Докажите, что прямая AP параллельна прямой BC.

б) Пусть $\angle ABC = 90^\circ$, $AM = 6$, $CM = 4$, Q — точка пересечения прямых KM и AB, а T — такая точка на отрезке PQ, что $\angle OAT = 45^\circ$. Найдите QT.

16.10 Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC и AC в точках M и N соответственно, E и F — середины сторон AB и AC соответственно. Прямые MN и EF пересекаются в точке D.

а) Докажите, что треугольник DFN равнобедренный.

б) Найдите площадь треугольника BED, если $AB = 28$ и $\angle ABC = 60^\circ$.

16.11 Окружность с центром O проходит через вершины B и C большей боковой стороны прямоугольной трапеции $ABCD$ и касается боковой стороны AD в точке T.

а) Докажите, что угол BOC вдвое больше угла BTC.

б) Найдите расстояние от точки T до прямой BC, если основания трапеции AB и CD равны 4 и 9 соответственно.

16.12 В треугольнике ABC проведены биссектрисы BM и CN, пересекающиеся в точке P. Точки B, C, M и N лежат на одной окружности.

а) Докажите, что $AB = AC$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $AMPN$, если $MN : BC = 2 : 5$, $BN = 14$.

Ответы

3

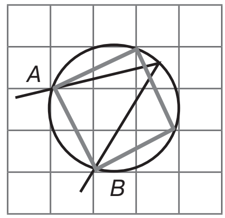
3.1 3.

■ **Решение**

Посчитаем по клеткам диаметр описанной окружности. Он равен 6. Следовательно, радиус равен 3.

3.2 45.

■ **Решение**



Построим хорду AB. Заметим, что можно провести ещё четыре хорды, равные AB. Получим: $\smile AB = 360^\circ : 4 = 90^\circ$.

Искомый угол является вписанным, значит, измеряется половиной дуги, на которую опирается, то есть он равен 45°.

3.3 4.

■ **Решение**

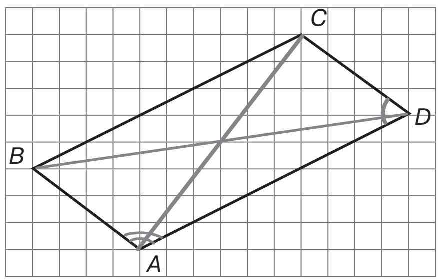
Средняя линия трапеции равна полусумме оснований. Основания трапеции найдём по клеткам: 3 и 5.

Тогда средняя линия равна $\dfrac{3+5}{2} = 4$.

3.4 10.

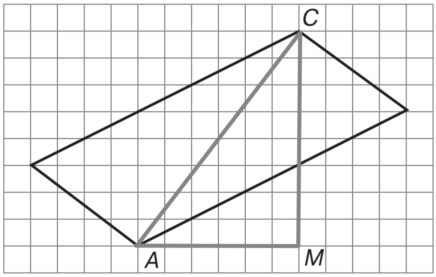
■ **Решение**

Диагональ AC меньше, так как лежит напротив острого угла, в то время как диагональ BD лежит напротив тупого угла параллелограмма.



Построим прямоугольный треугольник ACM. Из теоремы Пифагора получим:

$$AC = \sqrt{AM^2 + CM^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$



ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

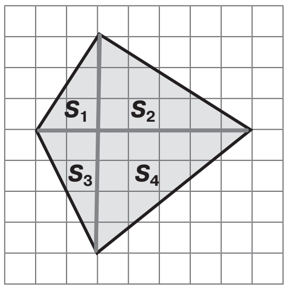
Египетский треугольник — это прямоугольный треугольник с соотношением сторон 3 : 4 : 5, откуда получаем прямоугольные треугольники со сторонами: 3, 4 и 5; 6, 8 и 10; 9, 12 и 15 и так далее.

Чаще других при решении задач встречаются прямоугольные треугольники со сторонами 3, 4 и 5; 6, 8 и 10. Зная каждую тройку, можно без вычислений определить длину третьей стороны по двум известным. Например, если гипотенуза равна 10, а катет равен 8, то другой катет равен 6. Или если катеты равны 3 и 4, значит, гипотенуза равна 5.

3.5 24,5.

■ Решение

Способ 1



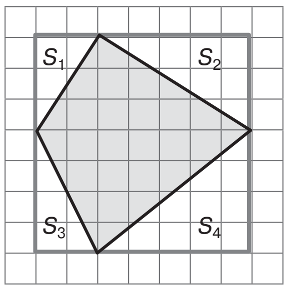
Разобьём данную фигуру на части, площади которых можно вычислить (см. рисунок).

Получим четыре прямоугольных треугольника.

$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3$; $S_2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 = 7{,}5$; $S_3 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$;

$S_4 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10$. Тогда площадь искомой фигуры равна $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 3 + 7{,}5 + 4 + 10 = 24{,}5$.

Способ 2



Дополним фигуру до квадрата и вычтем площади «лишних» прямоугольных треугольников (см. рисунок).

$$S = S_{кв} - (S_1 + S_2 + S_3 + S_4) = 7 \cdot 7 - (3 + 7{,}5 + 4 + 10) =$$
$$= 49 - 24{,}5 = 24{,}5.$$

3.6 288.

■ **Решение**

На чертеже изображено кольцо, площадь которого равна разности площадей внешнего и внутреннего кругов. Для того чтобы вычислить площадь внешнего круга, сравним радиусы кругов. По клеткам: радиус внутреннего круга равен 1 клетке, а радиус внешнего — 5 клеткам. Следовательно, радиус внешнего круга в 5 раз больше. Отсюда получим, что площадь внешнего круга больше в 25 раз, то есть составляет $12 \cdot 25 = 300$.

Площадь кольца равна $300 - 12 = 288$.

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

Длина клетки не равна 1 единице.

3.7 12,5.

■ **Решение**

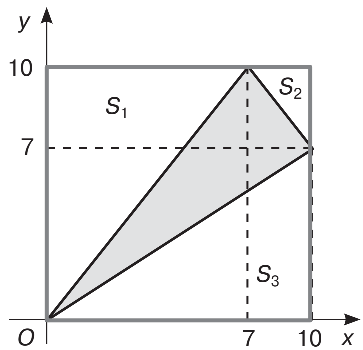
Квадрат является частным случаем ромба. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей, поэтому

$S_{кв} = \frac{1}{2} \cdot d^2 = \frac{1}{2}(7-2)^2 = 12{,}5.$

3.8 25,5.

■ **Решение**

Площадь треугольника равна разности площади квадрата со стороной 10 и трёх прямоугольных треугольников, гипотенузы которых являются сторонами заданного треугольника.



Поэтому получим: $S = S_{кв} - (S_1 + S_2 + S_3) =$

$= 10 \cdot 10 - \left(\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 10\right) = 100 -$

$-(35 + 4{,}5 + 35) = 25{,}5.$

3.9 15.

■ **Решение**

Применим формулу площади трапеции: $S=\frac{a+b}{2}\cdot h=\frac{(3-1)+(6-2)}{2}\times$ $\times(8-3)=\frac{2+4}{2}\cdot 5=15.$

3.10 24.

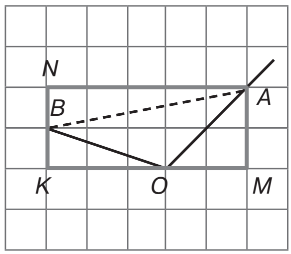
■ **Решение**

Площадь закрашенной фигуры равна разности площадей внешнего и внутреннего ромбов. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

Поэтому $S=\frac{1}{2}\cdot(4-(-4))\cdot(4-(-4))-\frac{1}{2}\cdot(2-(-2))\cdot(2-(-2))=32-8=24.$

3.11 –2.

■ **Решение**



Способ 1

Проведём AB. Из прямоугольного треугольника ABN по теореме Пифагора: $AB=\sqrt{BN^2+NA^2}=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}.$

Из прямоугольного треугольника AMO по теореме Пифагора: $AO=\sqrt{AM^2+MO^2}=$ $=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}.$

Из прямоугольного треугольника BKO по теореме Пифагора: $BO=\sqrt{BK^2+KO^2}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}.$

Рассмотрим треугольник ABO, по теореме косинусов получим:

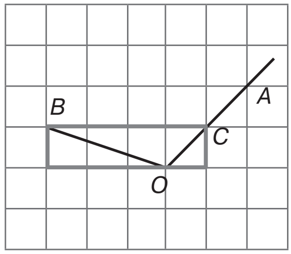
$$AB^2=AO^2+BO^2-2AO\cdot BO\cdot\cos AOB \Leftrightarrow 26=8+10-2\cdot\sqrt{80}\cdot\cos AOB \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos AOB=-\frac{8}{2\cdot 4\sqrt{5}} \Leftrightarrow \cos AOB=-\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Используем соотношение между тангенсом и косинусом одного и того же угла: $\operatorname{tg}^2 AOB+1=\frac{1}{\cos^2 AOB} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 AOB=4.$

Так как угол AOB тупой, то его тангенс отрицателен, значит, $\operatorname{tg} AOB = -2$.

Способ 2 (аналогично способу 1)



Проведём BC. Заметим, что угол COB равен углу AOB.

С помощью теоремы Пифагора находим: $CO = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $BO = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$.

Рассмотрим треугольник COB, по теореме косинусов получим: $BC^2 = CO^2 + BO^2 -$

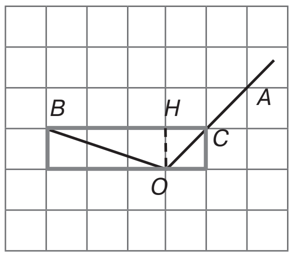
$$-2CO \cdot BO \cdot \cos COB \Leftrightarrow 16 = 2 + 10 - 2 \cdot \sqrt{20} \cdot \cos COB \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos COB = -\frac{4}{2 \cdot 2\sqrt{5}} \Leftrightarrow \cos COB = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Используем соотношение между тангенсом и косинусом одного и того же угла: $\operatorname{tg}^2 COB + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 COB} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 COB = 4$.

Так как угол COB тупой, то его тангенс отрицателен, значит, $\operatorname{tg} COB = -2 = \operatorname{tg} AOB$.

Способ 3



Построим BC и $OH \perp BC$.

Из прямоугольного треугольника COH:
$\operatorname{tg} COH = \dfrac{HC}{OH} = \dfrac{1}{1} = 1$.

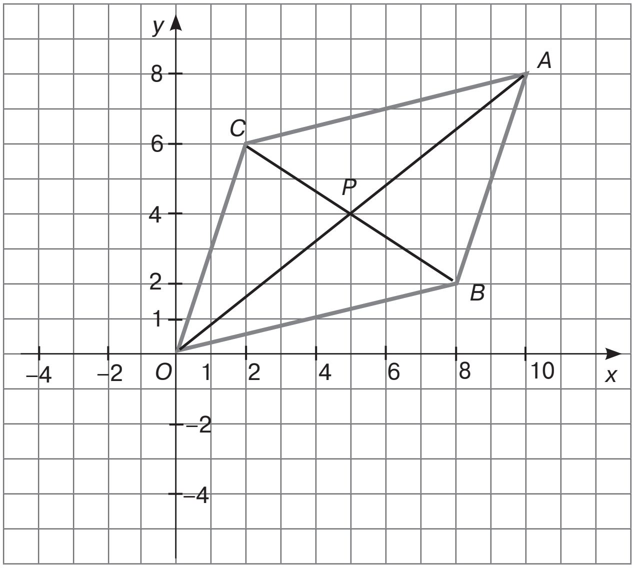
Из прямоугольного треугольника BOH:
$\operatorname{tg} BOH = \dfrac{BH}{OH} = \dfrac{3}{1} = 3$.

Так как $\angle AOB = \angle COB = \angle COH + \angle BOH$, то $\operatorname{tg} AOB =$

$$= \operatorname{tg}(\angle COH + \angle BOH) = \frac{\operatorname{tg} COH + \operatorname{tg} BOH}{1 - \operatorname{tg} COH \cdot \operatorname{tg} BOH} = \frac{1+3}{1-1 \cdot 3} = \frac{4}{-2} = -2.$$

3.12 4.

■ **Решение**



Отметим заданные точки в координатной плоскости. Будем искать ординату точки пересечения диагоналей *BC* и *OA* четырёхугольника *OCAB*.

Определим вид четырёхугольника *OCAB*. Для этого вычислим длины его сторон: $CO=\sqrt{(2-0)^2+(6-0)^2}=\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{40}$;

$AC=\sqrt{(10-2)^2+(8-6)^2}=\sqrt{8^2+2^2}=\sqrt{68}$;

$AB=\sqrt{(10-8)^2+(8-2)^2}=\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{40}$;

$OB=\sqrt{(8-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{8^2+2^2}=\sqrt{68}$.

Получили, что противоположные стороны попарно равны, следовательно, *OCAB* — параллелограмм по признаку. Отсюда по свойству параллелограмма получим, что *P* — середина *OA*, значит, $Y_P=\dfrac{Y_A+Y_O}{2}=\dfrac{8+0}{2}=4$.

6.1 20.

■ **Решение**

$\triangle MNK$ подобен $\triangle OPT$ по трём пропорциональным сторонам, коэффициент подобия $k=\frac{1}{2}$, следовательно, $\frac{P_{MNK}}{P_{OPT}}=k=\frac{1}{2}$. Откуда найдём $P_{OPT}=2P_{MNK}=2\cdot 10=20$.

6.2 18.

■ **Решение**

Воспользуемся формулой для вычисления площади треугольника:
$S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot AB\cdot\sin A=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\sqrt{3}\cdot\sin 120^\circ=12\sqrt{3}\cdot\sin(180^\circ-60^\circ)=$
$=12\sqrt{3}\cdot\sin 60^\circ=12\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=18.$

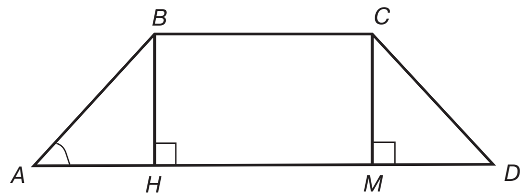
6.3 0,75.

■ **Решение**

$\triangle FMN$ подобен $\triangle FHK$ по двум углам, коэффициент подобия $k=\frac{1}{2}$, следовательно, $\frac{S_{FMN}}{S_{FHK}}=k^2=\frac{1}{4}$. Откуда найдём $S_{FMN}=\frac{1}{4}S_{FHK}=0{,}25$.
$S_{HMNK}=S_{FHK}-S_{FMN}=1-0{,}25=0{,}75.$

6.4 1,5.

■ **Решение**



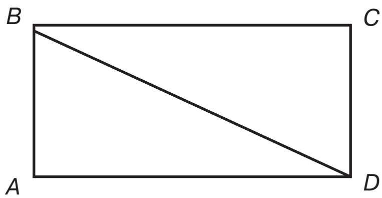
Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC. Будем искать тангенс угла A. Для этого проведём высоты BH и CM, получим прямоугольник $BCMH$. Значит, $HM = BC = 6$.

$\triangle ABH = \triangle CMD$ (прямоугольные треугольники равны по гипотенузе и катету), следовательно, $AH = MD = \frac{1}{2}(AD - HM) = \frac{1}{2}(34-6) = 14$.

В прямоугольном треугольнике ABH: $\operatorname{tg} A = \frac{BH}{AH} = \frac{21}{14} = 1{,}5$.

6.5 13.

■ **Решение**



Пусть $AB = a$, $AD = b$. Зная периметр и площадь, составим систему:

$$\begin{cases} 2(a+b) = 34, \\ ab = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 17, \\ ab = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 12, \\ b = 5; \end{cases} \\ \begin{cases} a = 5, \\ b = 12. \end{cases} \end{array}\right.$$

Вычислим длину диагонали: $BD = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.

6.6 15.

■ **Решение**

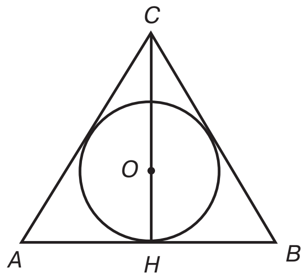
Пусть n — число вершин, сторон и углов правильного многоугольника. Воспользуемся формулой для нахождения внутреннего угла правильного n-угольника: $\alpha_n = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$.

Получим уравнение: $156^\circ = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} \Leftrightarrow 180^\circ n - 360^\circ =$
$= 156^\circ n \Leftrightarrow 24^\circ n = 360^\circ \Leftrightarrow n = 15$.

6.7 24,9.

■ **Решение**

Проведём высоту CH правильного (равностороннего) треугольника ABC. Точка O — центр правильного треугольника, а также центр вписанной окружности и точка пересечения медиан треугольника. По свойству медиан $CO:OH=2:1$. Откуда получаем, что высота $CH=CO+OH=3OH=3r=3\cdot 8{,}3=24{,}9$.

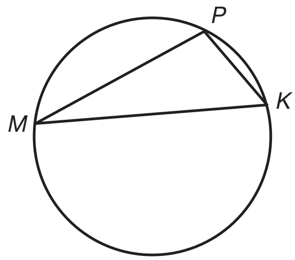


6.8 39.

■ **Решение**

Из теоремы синусов получим: $\dfrac{MK}{\sin P}=2R$, откуда выразим радиус описанной окружности: $R=\dfrac{MK}{2\sin P}=\dfrac{39}{2\sin 150^\circ}=\dfrac{39}{2\sin(180^\circ-30^\circ)}=$

$$=\frac{39}{2\sin 30^\circ}=\frac{39}{2\cdot \frac{1}{2}}=39.$$

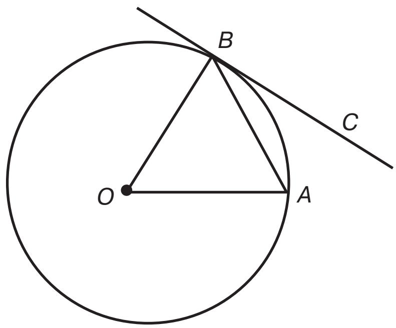


6.9 82.

■ **Решение**

$\angle CBA=41^\circ$ по условию, $\angle CBO=90^\circ$ по свойству касательной, значит, $\angle ABO=90^\circ-41^\circ=49^\circ$.

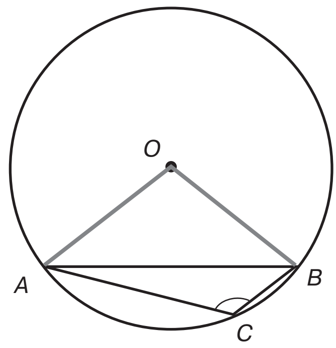
В треугольнике OBA: $OB=OA=R$, значит, $\triangle OBA$ — равнобедренный. Тогда $\angle BOA=180^\circ-2\angle ABO=180^\circ-2\cdot 49^\circ=82^\circ$. С другой стороны, $\angle BOA$ — центральный угол, следовательно, $\angle BOA=$ $=\cup AB=82^\circ$.



6.10 150.

■ **Решение**

Пусть искомый вписанный угол — $\angle ACB$, O — центр окружности.



Рассмотрим центральный угол $\angle AOB$, опирающийся на ту же хорду, что и $\angle ACB$.

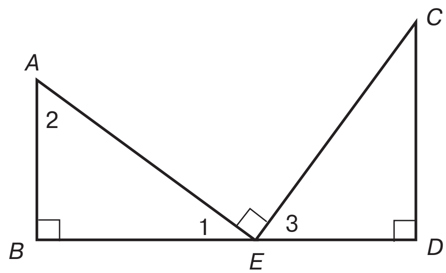
В $\triangle AOB$: $AO = OB = R$, $AB = R$ — по условию, следовательно, $\triangle AOB$ — равносторонний и $\angle AOB = 60°$.

Тогда $\cup ACB = \angle AOB = 60°$.

Откуда получим: $\angle ACB = \frac{1}{2}(360° - 60°) = 150°$.

6.11 28.

■ **Решение**



Рассмотрим углы 1, 2, 3. Из свойства суммы острых углов прямоугольного треугольника получим: $\angle 1 + \angle 2 = 90°$. С другой стороны, $\angle 1 + \angle AEC + \angle 3 = 180°$ и $\angle AEC = 90°$, значит, $\angle 1 + \angle 3 = 90°$.

Тогда $\angle 2 = \angle 3$. Итак, два прямоугольных треугольника ABE и EDC подобны по первому признаку подобия, коэффициент подобия равен $k = \frac{BE}{AB} = \frac{12}{3} = 4$. Из подобия следует, что $\frac{BE}{AB} = \frac{CD}{ED} \Rightarrow$

$\Rightarrow CD = k \cdot ED = 4 \cdot 7 = 28$.

6.12 30.

■ **Решение**

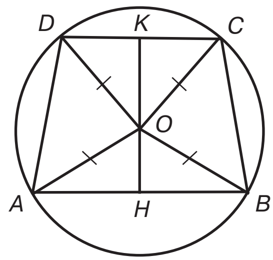
Условно обозначим смежные стороны прямоугольника и параллелограмма a, b.

Площадь прямоугольника вычисляется по формуле $S_1 = ab$, площадь параллелограмма равна $S_2 = ab \cdot \sin\alpha$, где α — угол между смежными сторонами. Из условия задачи следует, что $S_2 = \frac{1}{2}S_1$.

Откуда получим: $ab \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}ab \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$.

6.13 14.

■ **Решение**



Пусть O — центр окружности, описанной около трапеции $ABCD$. KH — высота трапеции, $KH = KO + OH$, где KO, OH — высоты равнобедренных треугольников DOC и AOD соответственно $(DO = OC = AO = OB = R)$.

Так как KO — высота равнобедренного треугольника DOC, значит, KO является и медианой, то есть $DK = KC = \frac{1}{2}DC = 8$.

Из прямоугольного треугольника DOK по теореме Пифагора: $KO = \sqrt{DO^2 - DK^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$.

Аналогично $AH = HB = \frac{1}{2}AB = 6$, $OH = \sqrt{AO^2 - AH^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

Следовательно, $KH = 6 + 8 = 14$.

6.14 54.

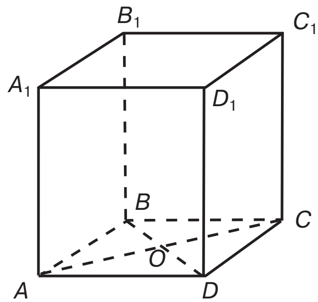
■ **Решение**

$\cup AB = 360^\circ \cdot 0{,}3 = 108^\circ$.

По свойству вписанного угла получим: $\angle ACB = \frac{1}{2} \cup AB = \frac{1}{2} \cdot 108^\circ = 54^\circ$.

8.1 1092.

■ **Решение**



Обозначим призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пусть O — точка пересечения диагоналей ромба $ABCD$.

Стороны ромба равны, поэтому все боковые грани являются равными прямоугольниками, значит, $S_{\text{полн}} = 2S_{ABCD} + 4S_{ADD_1A_1}$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD = \frac{18\cdot 24}{2} = 216.$$

Сторону ромба найдём из прямоугольного треугольника AOD, воспользовавшись теоремой Пифагора:

$$AD = \sqrt{AO^2 + OD^2} = \sqrt{\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15.$$

Тогда $S_{ADD_1A_1} = AD\cdot AA_1 = 15\cdot 11 = 165.$

Таким образом, $S_{\text{полн}} = 2S_{ABCD} + 4S_{ADD_1A_1} = 2\cdot 216 + 4\cdot 165 = 432 +$
$+ 660 = 1092.$

8.2 27.

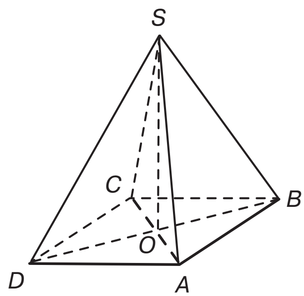
■ **Решение**

Так как в прямоугольный параллелепипед вписана сфера, следовательно, он является кубом. Ребро куба равно диаметру сферы, то есть $a = d = 2r = 2\cdot 1{,}5 = 3.$

Вычислим объём куба: $V = a^3 = 3^3 = 27.$

8.3 20.

■ **Решение**



В основании правильной четырёхугольной пирамиды — квадрат $ABCD$, диагонали AC и BD равны и точкой пересечения делятся пополам, значит, $DO = OB = AO = OC = \frac{1}{2}AC.$

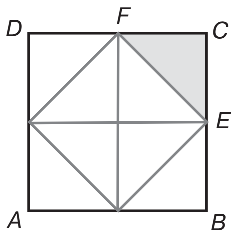
Рассмотрим прямоугольный треугольник SOD ($\angle O = 90°$). Из теоремы Пифагора получим: $DO = \sqrt{SD^2 - SO^2} = \sqrt{26^2 - 24^2} =$
$= \sqrt{(26+24)(26-24)} = \sqrt{50 \cdot 2} = \sqrt{100} = 10.$

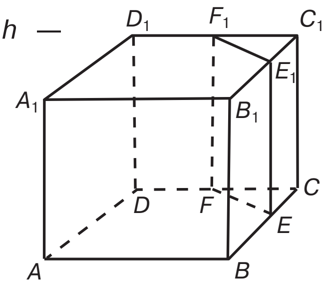
Следовательно, $AC = 2DO = 20$.

8.4 7,5.

■ **Решение**

$V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD} \cdot h$, $V_{CEFC_1E_1F_1} = S_{CEF} \cdot h$, где h — высота.





$S_{CEF} = \frac{1}{8} S_{ABCD}$, высоты равны, поэтому $V_{CEFC_1E_1F_1} = \frac{1}{8} V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} =$
$= \frac{1}{8} \cdot 60 = 7{,}5.$

8.5 8.

■ **Решение**

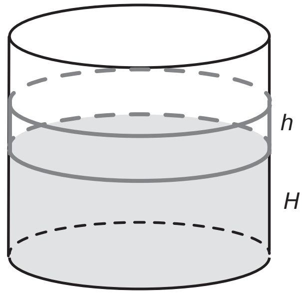
$V_{\text{призмы}} = S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} h$, где a — сторона основания.

Если сторона основания второй призмы в 1,5 раза больше, чем у первой, значит, площадь основания увеличится в 2,25 раза. Так как при переливании объём жидкости не изменяется, то высота (уровень жидкости) должна уменьшиться в 2,25 раза, то есть она будет равна $18 : 2{,}25 = 8$ (см).

8.6 1200.

■ **Решение**

Объём погружённой детали равен объёму вытесненной жидкости, то есть $V_{дет} = S_{осн} \cdot h$, где $h = 3$.



Площадь основания вычислим, зная объём налитой воды: $V_{воды} = S_{осн} \cdot H \Rightarrow S_{осн} =$

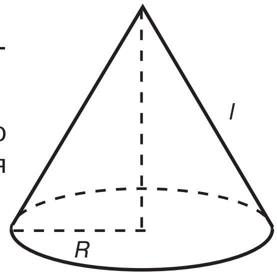
$$= \frac{V_{воды}}{H} = \frac{3200}{8} = 400.$$

Значит, $V_{дет} = 400 \cdot 3 = 1200$.

8.7 1,3.

■ **Решение**

Площадь боковой поверхности конуса вычисляется по формуле $S_{бок} = \pi Rl$.

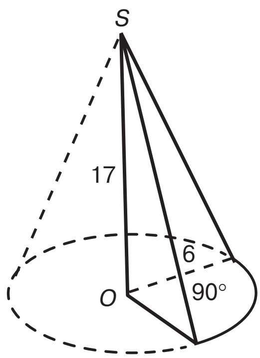


Если образующая l увеличится в 1,3 раза, то и площадь боковой поверхности увеличится в 1,3 раза.

8.8 51.

■ **Решение**

Достроим тело до конуса.



$$V_{конуса} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot 6^2 \cdot 17 = 204\pi.$$

Тогда объём данного тела равен

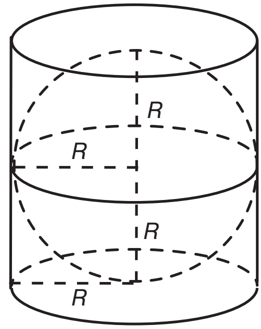
$$V = \frac{90^\circ}{360^\circ} V_{конуса} = \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 204\pi = \frac{1 \cdot 204\pi}{4} = 51\pi.$$

Значит, $\frac{V}{\pi} = 51$.

8.9 68.

■ **Решение**

Так как цилиндр описан около шара, то радиус основания цилиндра равен радиусу шара, а высота цилиндра равна диаметру шара.



$V_{цил} = S_{осн} \cdot h = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3.$

Имеем: $2\pi R^3 = 102 \Rightarrow \pi R^3 = 51.$

$V_{шара} = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3} \cdot 51 = 68.$

8.10 5.

■ **Решение**

Воспользуемся формулой $S_{пов} = 4\pi R^2$.

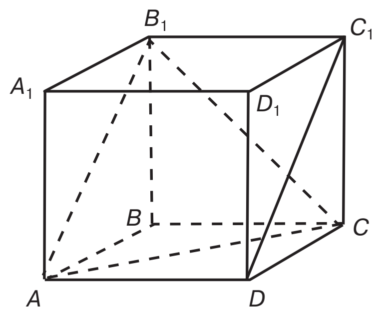
$S_1 = 4\pi R_1^{\,2} = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi,\ \ S_2 = 4\pi R_2^{\,2} = 4\pi \cdot 4^2 = 64\pi.$

По условию $S_3 = S_1 + S_2 = 36\pi + 64\pi = 100\pi$. С другой стороны, $S_3 = 4\pi R_3^{\,2}$.

Получим уравнение: $4\pi R_3^{\,2} = 100\pi \Rightarrow R_3^{\,2} = 25 \Rightarrow R_3 = 5.$

8.11 60.

■ **Решение**

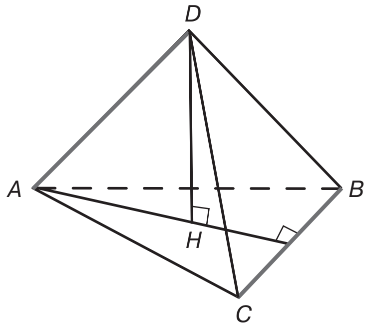


Угол между скрещивающимися прямыми DC_1 и AC равен углу между пересекающимися прямыми AB_1 и AC, так как прямая DC_1 параллельна прямой AB_1.

Для нахождения угла между AB_1 и AC рассмотрим треугольник AB_1C. Отрезки AB_1, B_1C и AC являются также гипотенузами равных прямоугольных треугольников ABB_1, B_1BC и ABC соответственно. Отсюда следует, что $AB_1 = B_1C = AC$, значит, треугольник AB_1C — равносторонний. Следовательно, угол между AB_1 и AC равен 60°.

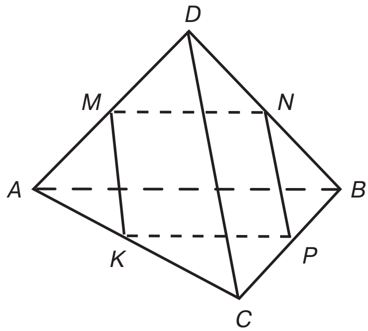
8.12 8.

■ Решение



Предварительно докажем, что скрещивающиеся рёбра правильного тетраэдра перпендикулярны. Рассмотрим пару скрещивающихся рёбер AD и BC. Проведём перпендикуляр DH, тогда AD — наклонная, AH — проекция наклонной. Так как $BC \perp AH$, то по теореме о трёх перпендикулярах $BC \perp AD$.

Аналогично доказывается перпендикулярность других пар рёбер.



Каждая сторона сечения является средней линией соответствующей грани, и поэтому она вдвое меньше параллельного ей ребра, то есть $MN = KP = \frac{1}{2}AB$, $MK = NP = \frac{1}{2}DC$. В силу того что $AB = DC$ и $AB \perp DC$, получаем, что $KMNP$ — квадрат. По условию $S_{KMNP} = 2$, следовательно, сторона квадрата — $KP = \sqrt{2}$, а ребро правильного тетраэдра — $AB = 2\sqrt{2}$.

Площадь полной поверхности тетраэдра равна $S = 4S_{ABC} =$ $= 4 \cdot \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = AB^2\sqrt{3} = (2\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.

Значит, $\frac{S}{\sqrt{3}} = 8$.

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

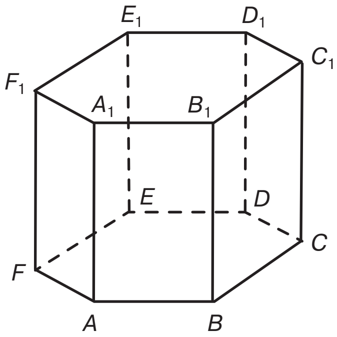
Можно запомнить факт, что скрещивающиеся рёбра правильного тетраэдра перпендикулярны.

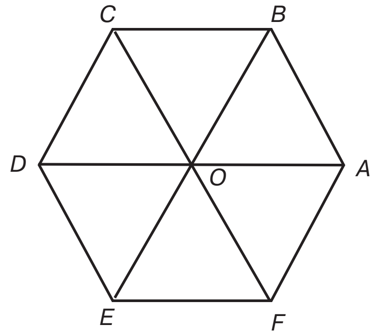
Полезно помнить формулу площади правильного треугольника со стороной a: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Эту формулу можно получить из общей формулы площади треугольника $S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$, где α — угол между сторонами a и b.

8.13 9.

■ **Решение**

Искомую площадь полной поверхности можно вычислить по формуле $S_{\text{полн}} = 2S_{\text{осн}} + 6S_{ABB_1A_1}$.





В основании лежит правильный шестиугольник, который состоит из шести равных равносторонних треугольников со стороной $\sqrt{3}$, значит, $S_{\text{осн}} = 6S_{\triangle AOB} = 6\cdot\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

Все боковые грани являются квадратами, поэтому $S_{ABB_1A_1} = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$.

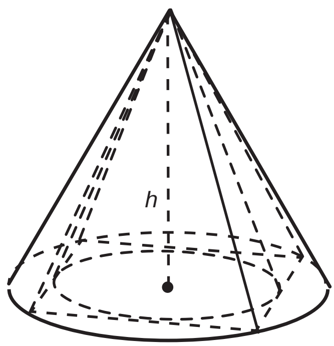
Таким образом, $S_{\text{полн}} = 2\cdot\dfrac{9\sqrt{3}}{2} + 6\cdot 3 = 9\sqrt{3} + 18$.

Дадим ответ на вопрос задания: $S_{\text{полн}}\cdot\left(2-\sqrt{3}\right) = \left(9\sqrt{3}+18\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right) =$

$= 9\left(\sqrt{3}+2\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right) = 9\cdot\left(2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2\right) = 9\cdot 1 = 9.$

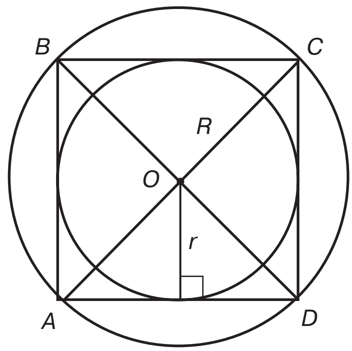
8.14 2.

■ **Решение**



Объём конуса вычисляется по формуле $V_{\text{конуса}} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$. Так как конусы имеют равные высоты, то отношение объёмов равно отношению квадратов радиусов оснований конусов.

Пусть r — радиус конуса, вписанного в пирамиду; R — радиус конуса, описанного около пирамиды. В основании правильной четырёхугольной пирамиды квадрат $ABCD$, пусть его сторона $AB = 2a$, тогда $r = \frac{1}{2}AB = a$.



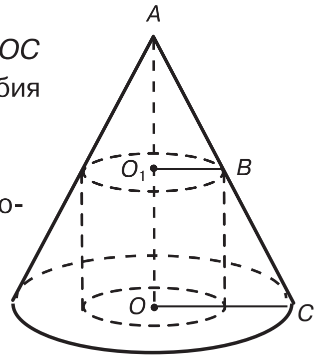
Из прямоугольного треугольника ACD по теореме Пифагора найдём: $AC = 2a\sqrt{2}$, следовательно, $R = \frac{1}{2}AC = a\sqrt{2}$.

Итак, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{R^2}{r^2} = \frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2}{a^2} = 2$.

8.15 13,5.

■ **Решение**

В силу подобия треугольников AO_1B и AOC (по двум углам) с коэффициентом подобия $k = \frac{AO_1}{AO} = \frac{1}{2}$ получим, что $O_1B = \frac{1}{2}OC$.



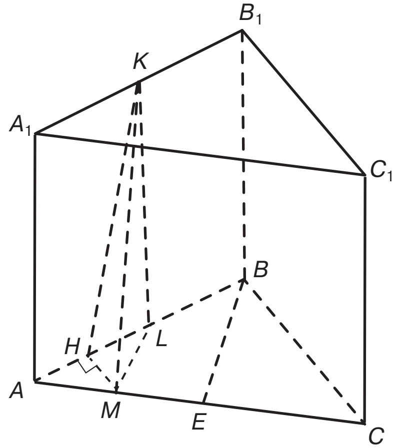
Вычислим отношение объёмов цилиндра и конуса: $\frac{V_{\text{цил}}}{V_{\text{кон}}} = \frac{\pi \cdot (O_1B)^2 \cdot OO_1}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot OC^2 \cdot AO} = \frac{\frac{1}{4}OC^2 \cdot \frac{1}{2}AO}{\frac{1}{3}OC^2 \cdot AO} = \frac{3}{8}$.

Отсюда получим: $V_{\text{цил}} = \frac{3}{8} \cdot V_{\text{кон}} = \frac{3}{8} \cdot 36 = 13{,}5$.

14.1 **Решение:**

14

а) Пусть L — середина ребра AB, E — середина ребра AC. Так как треугольник ABC равнобедренный, отрезок BE перпендикулярен отрезку AC. Поскольку $AM : MC = 1 : 3$, имеем $AM = ME$. Значит, треугольник AML подобен треугольнику AEB. Следовательно, отрезок LM перпендикулярен отрезку AC. Поскольку отрезок KL перпендикулярен плоскости ABC, получаем, что отрезок AC перпендикулярен плоскости KLM, а значит, KM перпендикулярно AC.



б) Пусть MH — высота треугольника AML. Так как плоскости ABC и ABB_1 перпендикулярны, отрезок MH перпендикулярен плоскости ABB_1, и поэтому искомый угол равен углу HKM.

$S_{AML}=\frac{1}{2}MH\cdot AL$. С другой стороны, $S_{AML}=\frac{1}{2}MA\cdot ML$. Тогда $MH\cdot AL=MA\cdot ML$,

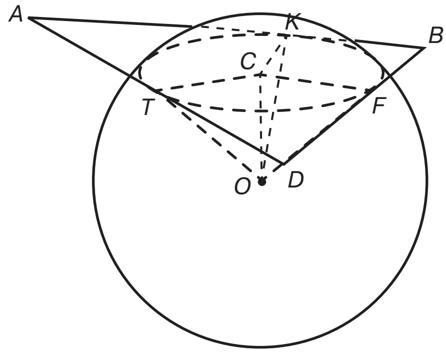
откуда $MH=\frac{MA\cdot ML}{AL}=\frac{2\sqrt{3^2-2^2}}{3}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

Значит, $\sin\angle HKM=\frac{MH}{KM}=\frac{2\sqrt{5}}{3}:\sqrt{3^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{14}}$, следовательно, $\angle HKM=\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{14}}$.

Ответ: б) $\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{14}}$.

14.2 **Решение:**

а) Пусть T, K и F — точки касания сферы и сторон треугольника, точка C — основание перпендикуляра, проведённого из центра O сферы к плоскости треугольника (точка C совпадает с центром окружности, полученной в сечении).



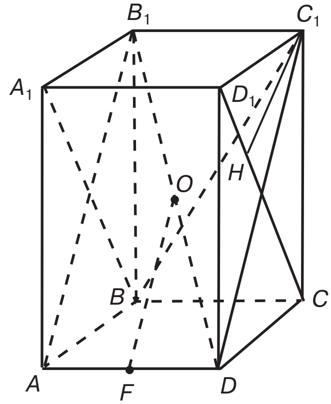
Отрезки OT, OK и OF перпендикулярны сторонам треугольника (как радиус, проведённый в точку касания). Отсюда следует, что отрезки CT, CK и CF перпендикулярны сторонам треугольника.

б) Из равенства прямоугольных треугольников OCT, OCK и OFC

($OT = OK = OF$, OC — общая сторона) следует, что $CT = CK = CF$, то есть точка C — центр окружности, вписанной в треугольник ADB. Радиус этой окружности $r = \frac{AD + DB + AB}{2} - AB = 1$ см.

В прямоугольном треугольнике OCK ($\angle OCK = 90°$, $OK = \sqrt{10}$, $CK = 1$) катет $CO = \sqrt{OK^2 - CK^2} = 3$ см.

Ответ: б) 3 см.



14.3 **Решение:**

а) В треугольнике AB_1D отрезок OF — средняя линия, следовательно, прямые OF и AB_1 параллельны между собой.

Так как $AD = A_1D_1$ и $A_1D_1 = B_1C_1$ (противолежащие стороны параллелограммов), то $AD = B_1C_1$. Кроме того, $AD || A_1D_1$ и $A_1D_1 || B_1C_1$, следовательно, $AD || B_1C_1$.

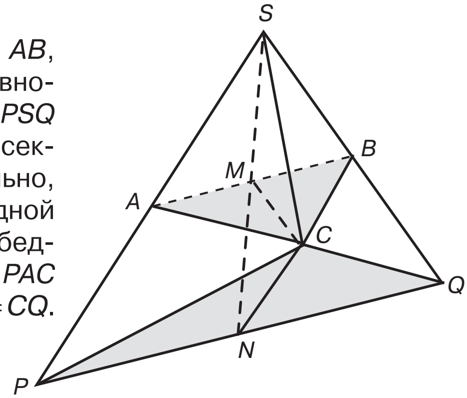
Отсюда следует, что четырёхугольник AB_1C_1D — параллелограмм, значит, $AB_1 || DC_1$. Таким образом, $OF || AB_1$, $AB_1 || DC_1$. Следовательно, $OF || DC_1$. Прямая OF параллельна прямой DC_1, лежащей в плоскости DCC_1. По признаку параллельности прямой и плоскости прямая $OF || (DCC_1)$.

б) Сечение плоскостью A_1BC есть прямоугольник A_1BCD_1. Пусть точка H — проекция точки C_1. Тогда искомый угол между плоскостью A_1BC и прямой BC_1 равен углу HBC_1. Рассмотрим прямоугольный треугольник D_1C_1C. С одной стороны, $S_{D_1C_1C} = \frac{1}{2} D_1C_1 \cdot C_1C$.

С другой стороны, $S_{D_1C_1C} = \frac{1}{2} D_1C \cdot C_1H$. Отсюда следует, что $D_1C_1 \cdot C_1C = D_1C \cdot C_1H$, тогда получим: $C_1H = \frac{D_1C_1 \cdot C_1C}{D_1C} = \frac{24}{5}$. Из прямоугольного треугольника BCC_1 находим $BC_1 = 17$. Из прямоугольного треугольника C_1HB находим $\sin B = \frac{C_1H}{BC_1} = \frac{24}{85}$.

Ответ: б) $\arcsin\frac{24}{85}$.

14.4 **Решение:**



а) Пусть M — середина ребра AB, N — середина отрезка PQ. В равнобедренных треугольниках ASB и PSQ медианы SM и SN являются биссектрисами и высотами. Следовательно, точки S, M и N лежат на одной прямой. Треугольник PCQ равнобедренный, так как треугольники PAC и QBC равны, значит, $PC = CQ$.

В треугольниках ABC и PCQ высотами являются отрезки CM и CN соответственно. Из того, что отрезок PQ перпендикулярен отрезку SN и отрезку CN, следует, что прямая PQ перпендикулярна плоскости SNC, и поскольку перпендикуляр к плоскости перпендикулярен любой прямой, лежащей в ней, то прямые PQ и SC перпендикулярны.

б) Из предыдущего пункта получаем, что плоскость NSC перпендикулярна плоскостям ABC и PCQ, а потому $\angle MCN = \alpha$ искомый. Найдём стороны треугольника MCN.

$MN = SM = \sqrt{SA^2 - AM^2} = \sqrt{7^2 - 3^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$, $CM = AM\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

В треугольнике SBC из теоремы косинусов имеем: $\cos\angle CSB = \dfrac{SB^2 + SC^2 - CB^2}{2SB \cdot SC} = \dfrac{49+49-36}{2\cdot 7\cdot 7} = \dfrac{62}{2\cdot 49} = \dfrac{31}{49}$.

В треугольнике SCQ из теоремы косинусов: $CQ^2 = CS^2 +$ $+ SQ^2 - 2CS \cdot SQ \cdot \cos\angle CSB = 49 + 196 - 2\cdot 7\cdot 14\cdot \dfrac{31}{49} = 245 - 124 = 121$.

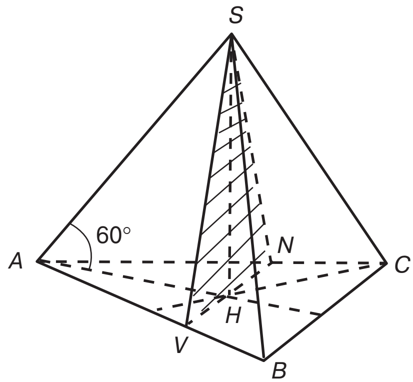
Тогда $CN = \sqrt{CQ^2 - NQ^2} = \sqrt{121 - 36} = \sqrt{85}$.

В треугольнике MCN из теоремы косинусов: $\cos\alpha = \dfrac{27+85-40}{2\cdot 3\sqrt{3}\cdot\sqrt{85}} =$ $= \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{85}}$, следовательно, $\alpha = \arccos\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{85}}$.

Ответ: б) $\arccos\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{85}}$.

14.5 Решение:

а) Рассмотрим боковое ребро SA и противолежащую ему сторону основания BC. Прямая BC лежит в плоскости ABC, а прямая SA пересекает эту плоскость в точке A, следовательно (по признаку скрещивающихся прямых), эти прямые скрещиваются.



б) Треугольники AVN и ABC подобны, и коэффициент подобия равен отношению отрезка AH — медианы меньшего треугольника — к медиане большего треугольника.

Так как точка H является точкой пересечения медиан треугольника ABC, то $k=\frac{2}{3}$. Отсюда $VN=\frac{2a}{3}$, где a — сторона основания пирамиды.

Выразим теперь сторону основания a пирамиды через её высоту и угол между боковым ребром и основанием. Из прямоугольного треугольника SHA найдём AH: $AH=SH\operatorname{ctg}A=2$ см.

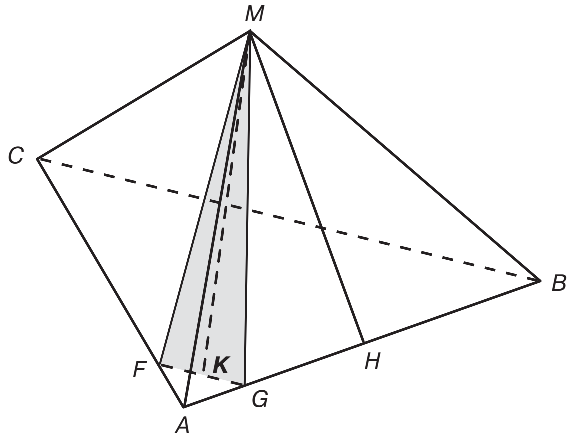
Так как AH — две трети медианы треугольника ABC, а медиана равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, то $a=2\sqrt{3}$ см, а $VN=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ см. Отсюда площадь сечения: $S_{VNS}=\frac{SH\cdot VN}{2}=4\text{ см}^2$.

Ответ: б) 4 см^2.

14.6 Решение:

а) Из условия следует, что $AG=AF=2$. Треугольники AMG и AMF равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $MG=MF$.

б) Проведём высоту MH боковой грани AMB. Из прямоугольного треугольника AHM находим: $MH=\sqrt{AM^2-AH^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$.



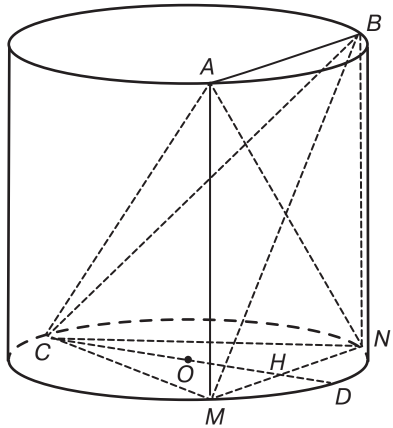
В прямоугольном треугольнике MHG $HG=4$, поэтому $MG=\sqrt{MH^2+HG^2}=\sqrt{8^2+4^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$. Треугольник AGF равносторонний, значит, $GF=AG=2$.

В равнобедренном треугольнике GMF проведём высоту MK. Она является также медианой, то есть делит отрезок GF пополам. Из прямоугольного треугольника MKG получаем: $MK = =\sqrt{MG^2-GK^2}=\sqrt{80-1}=\sqrt{79}$.

Следовательно, площадь треугольника GMF равна $S_{\triangle GMF}=\frac{1}{2}GF\cdot MK=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{79}=\sqrt{79}$.

Ответ: б) $\sqrt{79}$.

14.7 **Решение:**



а) Плоскость сечения $ABNM$ перпендикулярна прямой CD, поэтому отрезки AM и BN являются образующими цилиндра. Следовательно, отрезки AM и BN параллельны и равны, значит, $ABNM$ — параллелограмм. Так как прямые AM и BN перпендикулярны основаниям цилиндра и, в частности, прямой AB, параллелограмм $ABNM$ является прямоугольником. Отрезки AN и BM равны как диагонали прямоугольника.

б) Объём пирамиды вычисляется по формуле $V=\frac{1}{3}S\cdot h.$

$S=S_{ABNM}=9\cdot 2=18.$

Пусть H — точка пересечения отрезков NM и CD, O — центр основания цилиндра, содержащего отрезок CD.

По условию $OM=r=2$, $MN=r=2$, тогда $MH=1$.

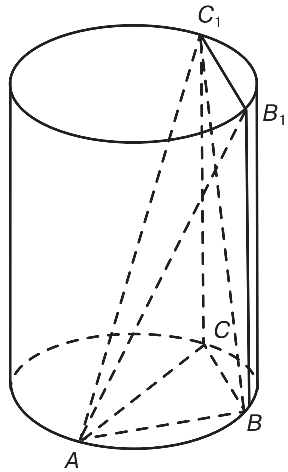
В прямоугольном треугольнике MOH по теореме Пифагора: $OH=\sqrt{OM^2-MH^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}.$

Высота пирамиды: $CH=CO+OH=r+OH=2+\sqrt{3}.$

Следовательно, объём пирамиды равен $V=\frac{1}{3}\cdot 18\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)=12+6\sqrt{3}.$

Ответ: б) $12+6\sqrt{3}.$

14.8 **Решение:**



а) Пусть BB_1 — образующая цилиндра. Тогда BB_1C_1C — прямоугольник, поэтому угол между прямыми AC_1 и BC равен $\angle AC_1B_1$.

Угол ABC опирается на диаметр основания цилиндра, поэтому $\angle ABC=90^\circ$. Значит, прямая B_1C_1, параллельная прямой BC, перпендикулярна прямым AB и BB_1. Таким образом, прямая B_1C_1 перпендикулярна плоскости ABB_1, значит, $\angle AB_1C_1$ прямой.

В прямоугольном треугольнике AB_1C_1: $B_1C_1=BC=AB=2\sqrt{2}$, $AB_1=\sqrt{AB^2+BB_1^{\,2}}=\sqrt{AB^2+CC_1^{\,2}}=\sqrt{24}=2\sqrt{6},$

$\operatorname{tg}\angle AC_1B_1=\frac{AB_1}{B_1C_1}=\frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\sqrt{3},$ значит, $\angle AC_1B_1=60^\circ.$

б) Отрезок AC является диаметром основания цилиндра. Из равнобедренного прямоугольного треугольника ABC: $AC = \sqrt{AB^2+BC^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{16} = 4.$

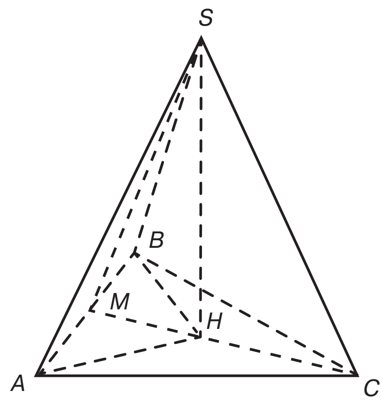
Значит, площадь основания цилиндра равна $S_{осн} = \pi r^2 = \pi\left(\dfrac{AC}{2}\right)^2 = 4\pi.$

Следовательно, объём цилиндра равен $V = S_{осн}\cdot h = 4\pi\cdot BB_1 = 16\pi.$

Ответ: б) 16π.

14.9 **Решение:**

а) Пусть SH — высота пирамиды $SABC$. Треугольник ASB равнобедренный, отсюда следует, что прямые AB и SM перпендикулярны. Прямая AB перпендикулярна плоскости SMC, так как она перпендикулярна двум пересекающимся прямым SM и SH. Значит, CM является не только медианой, но и высотой треугольника ABC. Треугольники ACM и BCM прямоугольные и равны по двум катетам, значит, $AC = CB$, то есть треугольник ABC — равнобедренный.



б) В пирамиде $SABC$: $MH = CH = \sqrt{SC^2 - SH^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{17}\right)^2 - 12^2} = \sqrt{9} = 3,$

$AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5,$

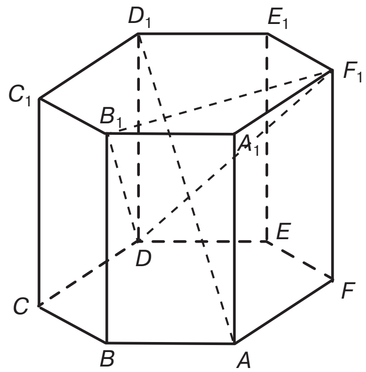
$BM = AM = \sqrt{AH^2 - MH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4.$

Тогда $V = \dfrac{1}{3}S_{осн}\cdot h = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}AB\cdot CM\cdot SH = 96.$

Ответ: б) 96.

14.10 Решение:

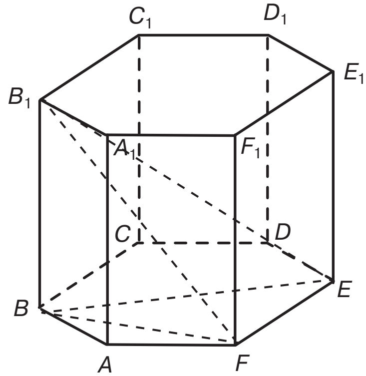
а) Поскольку $B_1F_1 \perp A_1D_1$ (свойство диагоналей правильного шестиугольника) и $B_1F_1 \perp A_1A$ (поскольку верхнее основание призмы перпендикулярно боковому ребру), то $B_1F_1 \perp (AA_1D_1)$.



Тогда $(DB_1F_1) \perp (AA_1D_1)$ (признак перпендикулярности плоскостей).

б) Объём призмы вычисляется по формуле $V = S_{осн} \cdot H$.

$S_{осн} = \dfrac{6AB^2\sqrt{3}}{4}$. Из треугольников BFB_1 и BB_1E находим: $AB = 2$ см, $BB_1 = 3\sqrt{3}$ ($BE = 2BA$, $BF = 2AB\sin 60°$). Отсюда



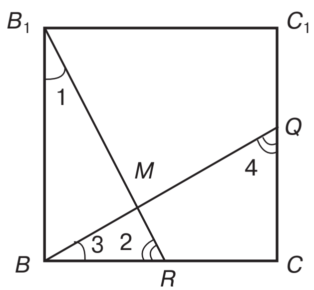
$$S_{осн} = \frac{6AB^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}\ \text{см}^2.$$

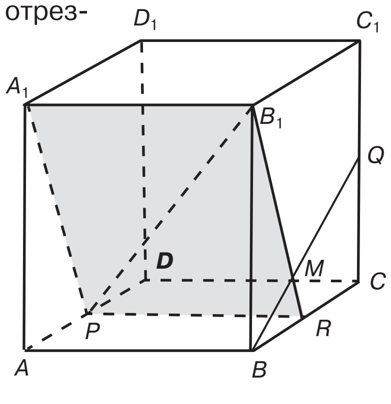
$$V = S_{осн} \cdot H = 6\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 54\ \text{см}^3.$$

Ответ: б) 54 см^3.

14.11 Решение:

а) Построим отрезок B_1R, параллельный A_1P. Пусть точка M — точка пересечения отрезков B_1R и QB.





Прямоугольные треугольники BB_1R и BQC равны по двум катетам. Отсюда следует, что $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$ как соответственные элементы равных треугольников. С другой стороны, $\angle 1 + \angle 2 = 90°$, значит, $\angle 2 + \angle 3 = 90°$.

Тогда в треугольнике BMR угол M является прямым. Значит, прямые B_1R и QB перпендикулярны.

Так как прямая PR перпендикулярна плоскости BB_1C, то прямые PR и QB перпендикулярны.

Итак, прямая QB перпендикулярна двум пересекающимся прямым B_1R и PR, лежащим в плоскости B_1RP, значит, прямая QB перпендикулярна плоскости B_1RP, в том числе и прямой B_1P, что и требовалось доказать.

б) Используя данные пункта *а*, получим, что сечение A_1B_1RP — прямоугольник.

Из прямоугольного треугольника BB_1R по теореме Пифагора получим: $B_1R = \sqrt{BB_1^2 + BR^2} = \sqrt{6^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

Тогда $S_{\text{сеч}} = PR \cdot B_1R = 6 \cdot 3\sqrt{5} = 18\sqrt{5}$.

Ответ: б) $18\sqrt{5}$.

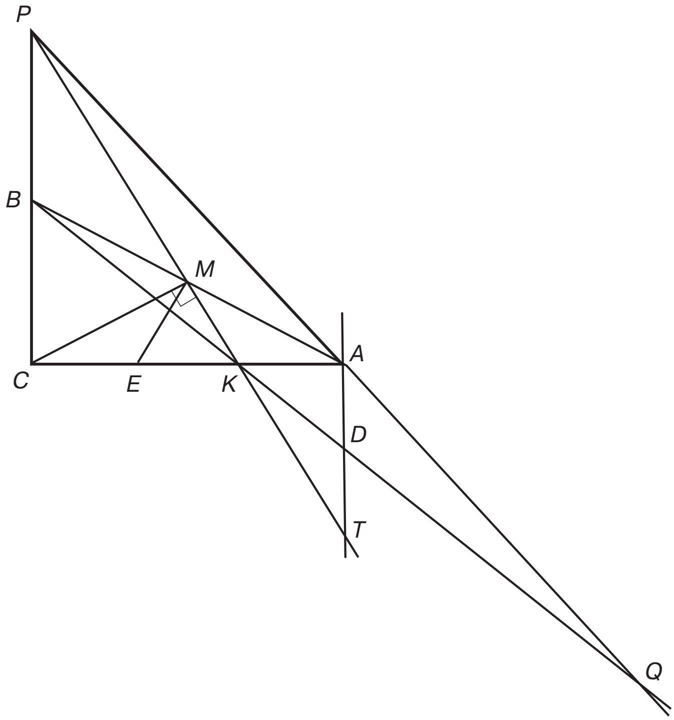
16 **16.1** **Решение:**

а) Пусть E — середина KC. Тогда ME — медиана прямоугольного треугольника CMK, проведённая из вершины прямого угла. Значит, $ME = \frac{1}{2}CK = AK = \frac{1}{2}AE$. Следовательно, $\angle BAC = 30°$.

б) Из прямоугольных треугольников ABC и KBC находим:

$$AC = BC\,\mathrm{tg}30° = \sqrt{21}\cdot\sqrt{3} = 3\sqrt{7},\quad BK = \sqrt{BC^2 + \left(\frac{2}{3}AC\right)^2} = \sqrt{21+28} = 7.$$

Через вершину A проведём прямую, параллельную BC. Пусть T — точка пересечения этой прямой с прямой MK, а D — точка пересечения прямой BK с прямой AT.



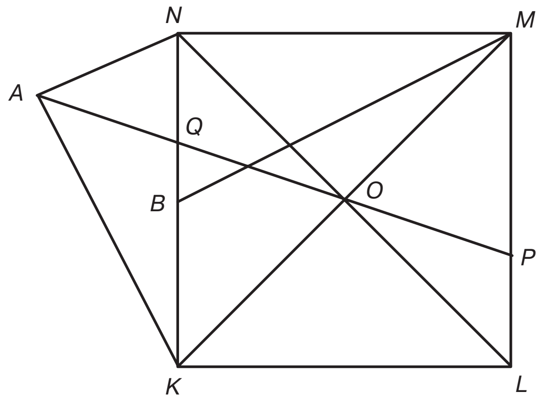
Из равенства треугольников AMT и BMP получаем, что $AT = BP$, а из подобия треугольников CKP и AKT следует, что $CP = 2AT = 2BP$. Значит, B — середина CP.

Треугольник AKD подобен треугольнику CKB с коэффициентом $\frac{1}{2}$, то есть $AD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}BP$ и $AD \parallel BP$, значит, AD — средняя линия треугольника BQP. Тогда получим: $BQ = 2DB = 2 \cdot \frac{3}{2}BK = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 7 = 21$. Следовательно, $KQ = BQ - BK = 21 - 7 = 14$.

Ответ: б) 14.

16.2 **Решение:**

а) Так как $MN = KN = 3BN$, $AK = 3AN$, прямоугольные треугольники BMN и NKA подобны. Значит, $\angle MBN = \angle ANK$ Следовательно, прямая BM параллельна прямой AN.



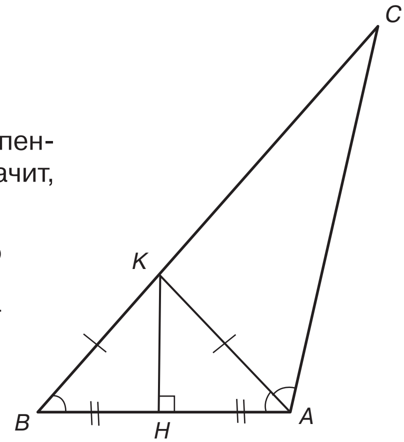
б) Диагонали квадрата перпендикулярны, равны и делятся точкой пересечения пополам, поэтому $\angle KON = 90^\circ$ и $OK = ON$. Из точек A и O отрезок KN виден под прямым углом, значит, эти точки лежат на окружности с диаметром KN. Вписанные в эту окружность углы KAO и NAO опираются на равные хорды, поэтому AO — биссектриса угла KAN.

Пусть отрезок AP пересекает сторону KN в точке Q. Тогда AQ — биссектриса треугольника KAN. По свойству биссектрисы $\frac{NQ}{QK} = \frac{AN}{AK} = \frac{1}{3}$.

Треугольник LOP равен треугольнику NOQ по стороне и двум прилежащим к ней углам, значит, $LP = NQ$. Тогда $MP = KQ$. Следовательно, $\frac{LP}{PM} = \frac{NQ}{QK} = \frac{1}{3}$.

Ответ: б) 1:3.

16.3 **Решение:**



а) Точка K лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB, значит, $\triangle AKH = \triangle BKH$ и $\angle ABC = \angle BAK = \angle CAK$.

Треугольники ABC и KAC подобны по двум углам, значит, $\frac{AC}{BC} = \frac{CK}{AC}$. Отсюда получим, что $AC^2 = BC \cdot CK$.

б) Пусть $\angle KAB = \angle KBA = \beta$. Тогда $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-0,36} = 0,8$.

$S_{ACK} = \frac{1}{2} AC \cdot AK \cdot \sin\beta \Leftrightarrow 108 = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot AK \cdot 0,8$, откуда $AK = 15$.

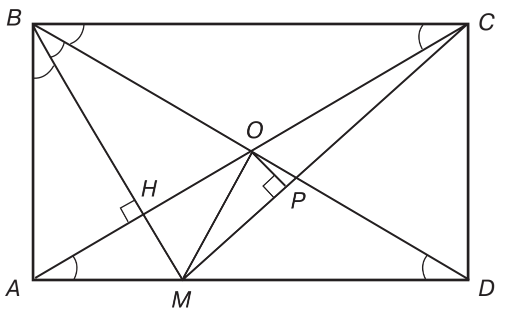
Так как $AC^2 = BC \cdot CK$, то $18^2 = (CK + 15) \cdot CK \Rightarrow CK = 12$.

Пусть r — радиус окружности, вписанной в треугольник AKC.

Тогда $r = \frac{2S_{ACK}}{AK + CK + AC} = \frac{2 \cdot 108}{15 + 12 + 18} = 4,8$.

Ответ: б) 4,8.

16.4 Решение:



а) Пусть $\angle CBD = \alpha$. Треугольник BMD равнобедренный, следовательно, $\angle DBM = \angle BDM = \angle CBD = \alpha$. Прямоугольные треугольники ACB и BDA равны по катету и гипотенузе, поэтому $\angle ACB = \angle ADB = \alpha$.

Пусть H — точка пересечения BM и AC. Тогда BH — высота прямоугольного треугольника ABC, проведённая из вершины прямого угла. Значит, $\angle ABH = \angle DBM = \alpha$. Следовательно, $\angle ABM = \frac{1}{3} \cdot 90^\circ = 30^\circ$.

б) Из прямоугольного треугольника ABC получим: $AB = BC\,\mathrm{tg}\,30^\circ = \frac{6\sqrt{21}}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{7}$. Из прямоугольного треугольника ABM получим: $AM = AB\,\mathrm{tg}\,30^\circ = \frac{6\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{21}$.

$MD = AD - AM = 6\sqrt{21} - 2\sqrt{21} = 4\sqrt{21}.$

Из прямоугольного треугольника CMD получим:

$$MC = \sqrt{CD^2 + MD^2} = \sqrt{\left(6\sqrt{7}\right)^2 + \left(4\sqrt{21}\right)^2} = 14\sqrt{3}.$$

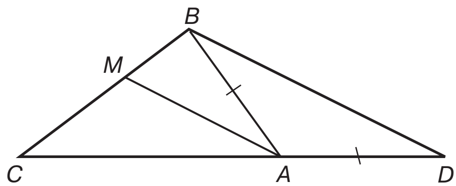
Пусть O — точка пересечения диагоналей (центр) прямоугольника $ABCD$. Расстояние от центра O до прямой CM равно высоте OP треугольника CMO.

$$S_{CMO} = \frac{1}{2}S_{ACM} = \frac{1}{4}AM \cdot AB = \frac{1}{2}CM \cdot OP \Rightarrow OP = \frac{AM \cdot AB}{2MC} = \frac{2\sqrt{21} \cdot 6\sqrt{7}}{2 \cdot 14\sqrt{3}} = 3.$$

Ответ: б) 3.

16.5 **Решение:**

а) Пусть $\angle BAC = \alpha$. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle ABD + \angle ADB = \alpha$.



Треугольник ABD равнобедренный, значит, $\angle ADB = \angle ABD = \frac{\alpha}{2}$.

Так как $AM \parallel BD$, то $\angle MAC = \angle BDC = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\angle BAC$. Таким образом, AM — биссектриса угла BAC.

б) По свойству биссектрисы треугольника $\frac{CM}{MB} = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{4}$, значит,

$$\frac{S_{ACM}}{S_{ABC}} = \frac{CM}{CB} = \frac{5}{9} \Rightarrow S_{ACM} = \frac{5}{9}S_{ABC} = \frac{5}{9} \cdot 54 = 30.$$

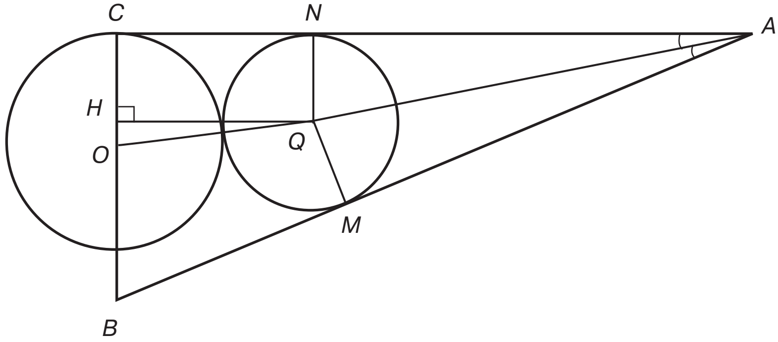
Треугольник DBC подобен треугольнику ACM с коэффициентом $\frac{9}{5}$,

значит, $\frac{S_{DBC}}{S_{ACM}} = \left(\frac{9}{5}\right)^2 \Rightarrow S_{DCB} = \frac{81}{25}S_{ACM} = \frac{81}{25} \cdot 30 = 97{,}2.$

Отсюда получим: $S_{AMBD} = S_{DCB} - S_{ACM} = 97{,}2 - 30 = 67{,}2.$

Ответ: б) 67,2.

16.6 Решение:



а) Пусть Q — центр второй окружности, M и N — точки её касания со сторонами AB и AC соответственно, а точка H — проекция точки Q на BC. Имеем: $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$, следовательно, $\cos A=\frac{12}{13}$, $\sin A=\frac{5}{13}$.

Тогда $\operatorname{tg}\angle NAQ=\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{\sin A}{1+\cos A}=\frac{1}{5}$, поэтому $AC>AN=5NQ$, что требовалось доказать.

б) Пусть x — радиус второй окружности. Рассмотрим прямоугольный треугольник OHQ: $QH=CN=12-5x>0$, $OQ=x+0{,}5$, $OH=|OC-CH|=|0{,}5-x|$.

По теореме Пифагора $OH^2+QH^2=OQ^2$, откуда получим:

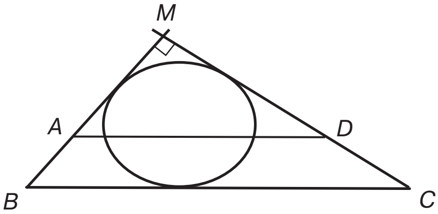
$$(12-5x)^2+(0{,}5-x)^2=(0{,}5+x)^2 \Rightarrow 25x^2-122x+144=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=2{,}88 \end{array}\right..$$

Но по условию $12-5x>0$, поэтому $x=2$.

Ответ: б) 2.

16.7 Решение:

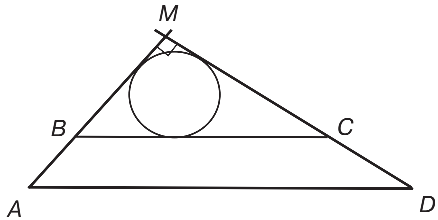
а) В трапеции отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований трапеции, а средняя линия — полусумме оснований трапеции. То есть полуразность оснований равна 5, полусумма оснований равна 25, значит, основания трапеции равны 20 и 30. Пусть $BC = 30$, $AD = 20$.



Стороны BC и AD треугольников MBC и MAD параллельны, поэтому эти треугольники подобны.

б) Поскольку треугольники MBC и MAD подобны с коэффициентом $k = \frac{2}{3}$, то $MB = \frac{AB}{1-k} = 18$, $MC = \frac{CD}{1-k} = 24$. Треугольник MBC прямоугольный с гипотенузой BC. Радиус вписанной окружности равен $r = \frac{MB + MC - BC}{2} = 6$.

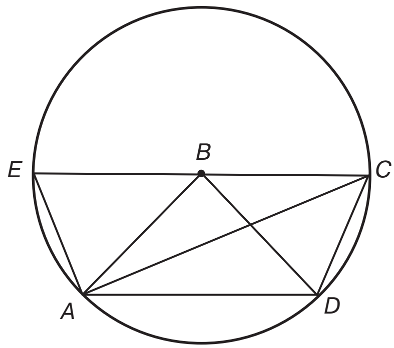
Пусть $AD = 30$, $BC = 20$.



Радиус вписанной окружности треугольника MAD равен 6. Треугольники MAD и MBC подобны с коэффициентом $k = \frac{2}{3}$. Значит, радиус вписанной окружности треугольника MBC равен $r = 6k = 4$.

Ответ: б) 4 или 6.

16.8 **Решение:**

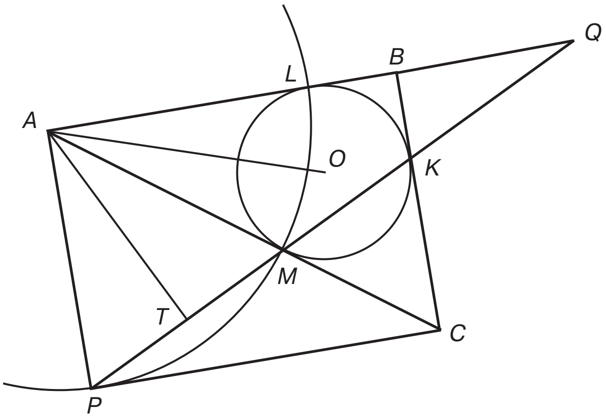


а) $\angle BAC = \angle ACB = \angle CAD$, следовательно, AC — биссектриса угла BAD.

б) Так как $BA = BD = BC = 8{,}5$, точки A, D и C лежат на окружности радиуса 8,5 с центром в точке B. Продолжим основание BC за точку B до пересечения с этой окружностью в точке E. Тогда EC — диаметр окружности, а $ADCE$ — равнобедренная трапеция. Поэтому $AE = CD$, а так как точка A лежит на окружности с диаметром CE, получаем, что $\angle CAE = 90°$. Из прямоугольного треугольника CAE получим: $AE = \sqrt{CE^2 - AC^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$. Значит, $CD = AE = 8$.

Ответ: б) 8.

16.9 **Решение:**



а) Так как $CK = CM$ и $AP = AM$, треугольники MCK и PAM равнобедренные, причём $\angle CMK = \angle AMP$ — углы при их основаниях MK и MP. Значит, $\angle MKC = \angle MPA$. Следовательно, прямая AP параллельна прямой BC.

б) Пусть $BK = BL = x$, тогда $CK = CM = 4$, $AL = AM = 6$, $BC = 4 + x$, $AB = 6 + x$.

По теореме Пифагора $AC^2 = BC^2 + AB^2$, откуда получим: $100 = (4+x)^2 + (6+x)^2 \Rightarrow x^2 + 10x - 24 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -12 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

По условию задачи $x > 0$, поэтому $x = 2$, значит, $BC = 6$, $AB = 8$.

Так как $BC = AP = 6$ и $BC \parallel AP$, четырёхугольник $ABCP$ — прямоугольник, значит, $CP = AB = 8$.

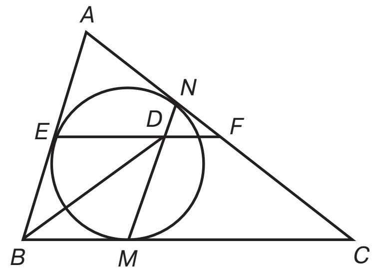
Треугольники AMQ и CMP подобны с коэффициентом $k = \frac{AM}{CM} = \frac{3}{2}$, поэтому $AQ = \frac{3}{2}CP = \frac{3}{2} \cdot 8 = 12$.

По теореме Пифагора $PQ = \sqrt{AP^2 + AQ^2} = \sqrt{36 + 144} = 6\sqrt{5}$.

Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle MAO = \frac{\alpha}{2}$, $\angle MAT = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $\angle PAT = 90^\circ - \angle QAT = 90^\circ - \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$, поэтому AT — биссектриса, следовательно, и высота равнобедренного треугольника MAP. Таким образом, AT — высота прямоугольного треугольника PAQ, проведённая из вершины прямого угла. Значит, $QT=\dfrac{AQ^2}{PQ}=\dfrac{144}{6\sqrt{5}}=\dfrac{24}{\sqrt{5}}$.

Ответ: б) $\dfrac{24}{\sqrt{5}}$.

16.10 **Решение:**



а) Поскольку $CM=CN$, треугольник MCN равнобедренный. Прямые EF и BC параллельны, поэтому треугольник DFN подобен треугольнику MCN, следовательно, треугольник DFN также равнобедренный: $DF=NF$.

б) Обозначим $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. Пусть p — полупериметр треугольника ABC. Предположим, что $a>c$. Тогда $BE=\dfrac{c}{2}$, $CF=\dfrac{b}{2}$, $CM=CN=$ $=p-c=\dfrac{a+b-c}{2}$, $FD=FN=CN-CF=\dfrac{a+b-c}{2}-\dfrac{b}{2}=\dfrac{a-c}{2}$.

Значит, $ED=EF-FD=\dfrac{a}{2}-\dfrac{a-c}{2}=\dfrac{c}{2}=EB$, то есть треугольник BED равнобедренный.

Аналогично для $a\le c$. Так как $ED\parallel BC$, то $\angle BED=180^\circ-\angle ABC=$ $=180^\circ-60^\circ=120^\circ$.

Следовательно, $S_{BED}=\dfrac{1}{2}BE\cdot ED\cdot\sin120^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot14\cdot14\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=49\sqrt{3}$.

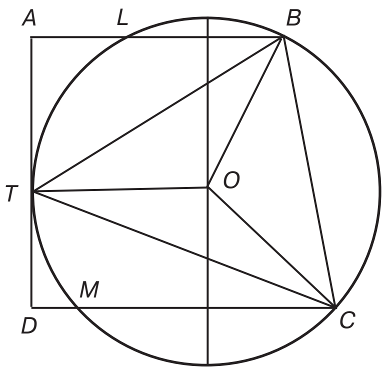
Ответ: б) $49\sqrt{3}$.

16.11 **Решение:**

а) Угол BTC вписан в окружность, а угол BOC — соответствующий ему центральный угол. Следовательно, $\angle BOC=2\angle BTC$, то есть угол BOC вдвое больше угла BTC.

б) По условию окружность касается стороны AD, поэтому прямые OT и AD перпендикулярны.

Пусть окружность вторично пересекает сторону AB в точке L и сторону CD — в точке M. Тогда диаметр окружности, перпендикулярный стороне AB, делит каждую из хорд BL и CM пополам.



Введём обозначение: $OT = r$, тогда $AL = 2r - AB = 2r - 4$, $DM = 2r - CD = 2r - 9$.

В треугольнике ABT по теореме Пифагора: $TB^2 = AT^2 + AB^2$.

По теореме о касательной и секущей $AT^2 = AB \cdot AL = 4(2r - 4)$.

Следовательно, $TB^2 = 4(2r-4) + 4^2 = 8r - 16 + 16 = 8r$.

В треугольнике CDT по теореме Пифагора: $TC^2 = DT^2 + DC^2$.

По теореме о касательной и секущей $DT^2 = DC \cdot DM = 9(2r - 9)$.

Следовательно, $TC^2 = 9(2r-9) + 9^2 = 18r - 81 + 81 = 18r$.

В треугольнике BTC из теоремы синусов получим: $BC = 2r \cdot \sin BTC$.

Пусть x — искомое расстояние от точки T до прямой BC.

Тогда $S_{BTC} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot BC$. С другой стороны, $S_{BTC} = \frac{1}{2} \cdot TB \cdot TC \cdot \sin BTC$.

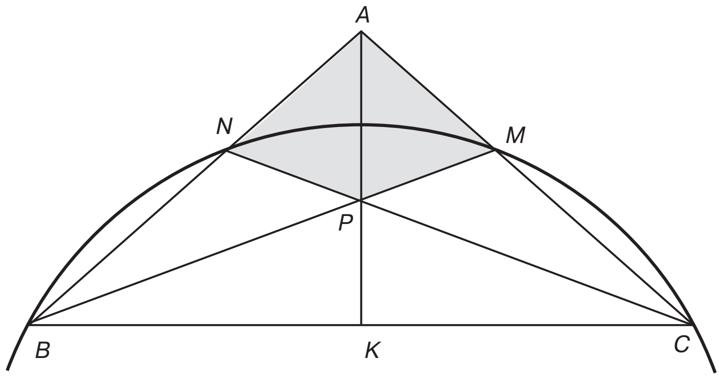
Отсюда получим: $x \cdot 2r \cdot \sin BTC = \sqrt{8r} \cdot \sqrt{18r} \cdot \sin BTC \Rightarrow x =$

$$= \frac{\sqrt{8r} \cdot \sqrt{18r}}{2r} = \frac{12}{2} = 6.$$

Ответ: б) 6.

16.12 **Решение:**

а) Вписанные углы NCM и MBN опираются на одну и ту же дугу NM, значит, они равны. Так как $\frac{1}{2}\angle ACB = \angle MCN = \angle MBN = \frac{1}{2}\angle ABC$, то $\angle ACB = \angle ABC$, следовательно, треугольник ABC равнобедренный по признаку. Из этого получим, что $AB = AC$.



б) Поскольку $\angle BCN = \angle MCN = \angle MBN = \angle MBC$, то равны дуги $\cup BN = \cup NM = \cup MC$, откуда получим равенство хорд $BN = NM = MC = 14$. Значит, треугольник BNM равнобедренный и $\angle NMB = \angle MBN$. Из равенства углов $\angle NMB = \angle MBN = \angle MBC$ получим, что прямая MN параллельна прямой BC.

Из условия: $MN : BC = 2 : 5 \Rightarrow BC = \dfrac{5}{2} MN = \dfrac{5}{2} \cdot 14 = 35.$

Пусть AK — медиана, биссектриса и высота треугольника ABC. Прямая AK проходит через точку P — центр вписанной окружности.

Из подобия треугольников ANM и ABC получим: $\dfrac{AN}{AB} =$

$$= \frac{MN}{BC} = \frac{2}{5} \Rightarrow AB = \frac{5}{2} AN = \frac{5}{3} BN = \frac{5}{3} \cdot 14 = \frac{70}{3}.$$

В прямоугольном треугольнике ABK из теоремы Пифагора получим: $AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{\left(\dfrac{70}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{35}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{4 \cdot 35^2}{9} - \dfrac{35^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{(16-9) \cdot 35^2}{36}} =$

$= \dfrac{35\sqrt{7}}{6}$. Площадь треугольника ABC равна: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AK \cdot BC =$

$$= \frac{1}{2} PK \cdot (AB + AC + BC).$$

Следовательно, $PK = \dfrac{AK \cdot BC}{AB + AC + BC} = \dfrac{\dfrac{35\sqrt{7}}{6} \cdot 35}{\dfrac{70}{3} + \dfrac{70}{3} + 35} = \dfrac{5\sqrt{7}}{2}.$

Тогда $AP = AK - PK = \frac{35\sqrt{7}}{6} - \frac{5\sqrt{7}}{2} = \frac{10\sqrt{7}}{3}$.

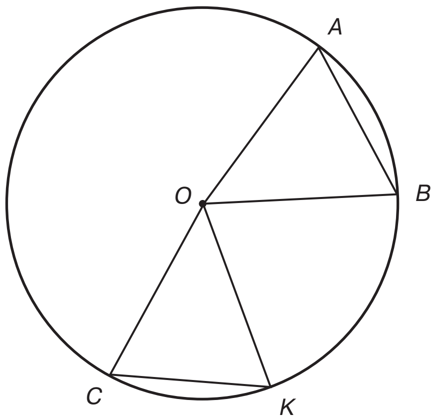
Так как в четырёхугольнике $AMPN$ диагонали AP и MN перпендикулярны, то его площадь равна

$$S_{AMPN} = \frac{1}{2} AP \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot \frac{10\sqrt{7}}{3} \cdot 14 = \frac{70\sqrt{7}}{3}.$$

Ответ: б) $\frac{70\sqrt{7}}{3}$.

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

При решении пункта *б* была использована теорема о том, что равные дуги стягиваются равными хордами. Не во всех учебниках данное утверждение формулируется и доказывается. Приведём доказательство. Оно может быть частью решения задачи.



Пусть $\cup AB = \cup CK$. Докажем, что $AB = CK$.

Соединим концы хорд с центром окружности — точкой O. Полученные треугольники AOB и KOC равны по двум соответственно равным сторонам (радиусы одной окружности) и по равному углу, заключённому между этими сторонами (эти углы равны как центральные, соответствующие равным дугам). Следовательно, $AB = CK$.

Справочное издание
анықтамалық баспа

СБОРНИКИ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ

Колесникова Татьяна Александровна

МАТЕМАТИКА

Решение задач на ЕГЭ

(орыс тілінде)

Ответственный редактор *А. Жилинская*
Ведущий редактор *Т. Судакова*
Художественный редактор *Д. Сафонов*

В коллаже на обложке использованы иллюстрации:
© Vector Tradition, balabolka / Shutterstock.com
Используется по лицензии от Shutterstock.com

ООО «Издательство «Эксмо»
123308, Россия, Москва, ул. Зорге, д. 1. Тел.: 8 (495) 411-68-86.
Home page: www.eksmo.ru E-mail: info@eksmo.ru
Өндіруші: «ЭКСМО» АҚБ Баспасы, 123308, Мәскеу, Ресей, Зорге көшесі, 1 үй.
Тел.: 8 (495) 411-68-86.
Home page: www.eksmo.ru E-mail: info@eksmo.ru.
Тауар белгісі: «Эксмо»
Интернет-магазин : www.book24.ru

Интернет-магазин : www.book24.kz
Интернет-дүкен : www.book24.kz
Импортёр в Республику Казахстан ТОО «РДЦ-Алматы».
Қазақстан Республикасындағы импорттаушы «РДЦ-Алматы» ЖШС.
Дистрибьютор и представитель по приему претензий на продукцию,
в Республике Казахстан: ТОО «РДЦ-Алматы»
Қазақстан Республикасында дистрибьютор және өнім бойынша арыз-талаптарды
қабылдаушының өкілі «РДЦ-Алматы» ЖШС,
Алматы қ., Домбровский көш., 3«а», литер Б, офис 1.
Тел.: 8 (727) 251-59-90/91/92; E-mail: RDC-Almaty@eksmo.kz
Өнімнің жарамдылық мерзімі шектелмеген.
Сертификация туралы ақпарат сайтта: www.eksmo.ru/certification

Сведения о подтверждении соответствия издания согласно законодательству РФ
о техническом регулировании можно получить на сайте Издательства «Эксмо»
www.eksmo.ru/certification
Өндірген мемлекет: Ресей. Сертификация қарастырылған

6+

Дата изготовления / Подписано в печать 06.11.2019. Формат 70x90 1/16.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 16,33.
Тираж экз. Заказ

ISBN 978-5-04-107716-7

МАТЕМАТИКА

Решение задач на ЕГЭ

В книге подробно разобраны решения задач, которые могут встретиться на ЕГЭ по математике профильного уровня. По каждому типу задания приводятся краткий теоретический материал, алгоритм выполнения, примеры с решением и ответом. Для отработки навыков решения задач и закрепления теоретических знаний в пособии приводятся задачи для самостоятельного решения.

Пособие поможет:

- систематизировать знания;
- научиться решать текстовые и геометрические задачи;
- избежать типичных ошибок и получить высокий балл на экзамене.

ISBN 978-5-04-107716-7