

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. О. Иванова

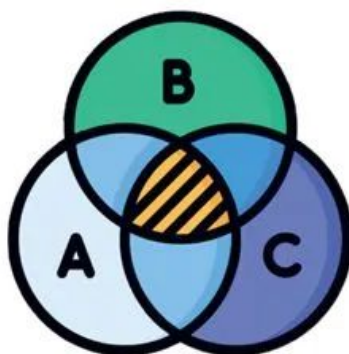
ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

ЕГЭ-2023

МАТЕМАТИКА ТЕМАТИЧЕСКИЙ ТРЕНИНГ

10-11 КЛАССЫ

- ▶ 1800 ЗАДАНИЙ БАЗОВОГО И ПРОФИЛЬНОГО УРОВНЕЙ
- ▶ АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ КАЖДОГО ЧЕТВЁРТОГО ЗАДАНИЯ
- ▶ КРАТКАЯ ТЕОРИЯ ПО ВСЕМ ТЕМАМ
- ▶ ОТВЕТЫ КО ВСЕМ ЗАДАНИЯМ



Глава I. Задания базового уровня сложности

§ 1. Арифметические действия с дробями

Вспомним, как выполняются действия умножения, деления, сложения и вычитания обыкновенных дробей.

Чтобы перемножить обыкновенные дроби, надо перемножить их числители и записать результат в числитель, затем перемножить знаменатели и результат записать в знаменатель:

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{10}{11} = \frac{5 \cdot 10}{7 \cdot 11} = \frac{50}{77},$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

На протяжении этого параграфа под словом «дробь» будем понимать обыкновенную дробь. Если числитель и знаменатель дроби делятся на некоторое натуральное число, отличное от единицы, то обычно числитель и знаменатель дроби делят на это число. При этом значение дроби не изменяется, а процедура деления числителя и знаменателя на одно и то же число, отличное от единицы, называется *сокращением дроби*:

$$\frac{55}{77} = \frac{5 \cdot 11}{7 \cdot 11} = \frac{5}{7}.$$

Если числитель и знаменатель дроби умножить на любое натуральное число, то значение дроби также не изменяется. Умножение числителя и знаменателя дроби на одно и то же число необходимо для приведения дробей к общему знаменателю, а также при обращении некоторых обыкновенных дробей в десятичные:

$$\frac{24}{5} = \frac{24 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{48}{10} = 4,8;$$

$$\frac{3}{40} = \frac{3 \cdot 25}{40 \cdot 25} = \frac{75}{1000} = 0,075.$$

Смешанным числом называют сумму натурального числа и правильной дроби. При этом натуральное число называется целой частью смешанного числа, а правильная дробь — дробной частью смешанного числа. Для выполнения действий над смешанными числами их нередко представляют в виде обыкновенных дробей. Для этого целую часть надо умножить на знаменатель дробной части, затем прибавить числитель дробной части. Полученный результат следует записать в числитель, а в знаменателе оставить знаменатель дробной части:

$$3\frac{4}{7} = \frac{3 \cdot 7 + 4}{7} = \frac{25}{7}.$$

$$3\frac{4}{7} \cdot 1\frac{2}{5} = \frac{25}{7} \cdot \frac{7}{5} = \frac{25 \cdot 7}{7 \cdot 5} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 7}{7 \cdot 5} = \frac{5}{1} = 5.$$

Чтобы разделить одну дробь на другую, надо первую дробь умножить на дробь, обратную второй дроби:

$$\frac{25}{7} : \frac{7}{5} = \frac{25}{7} \cdot \frac{5}{7} = \frac{25 \cdot 5}{7 \cdot 7} = \frac{125}{49}.$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

При сложении дробей с одинаковыми знаменателями складывают числители этих дробей и результат записывают в числитель, а в знаменатель записывают знаменатель этих дробей.

Сложить дроби с разными знаменателями можно двумя способами.

1. Приведение дробей к наименьшему общему знаменателю, равному наименьшему общему кратному (НОК) знаменателей дробей. Для этого умножаем числитель и знаменатель каждой дроби на соответствующие числа так, чтобы знаменатели у всех полученных дробей были одинаковыми. Затем складываем полученные числители и результат записываем в числитель, а знаменатель дроби оставляем равным знаменателю полученных дробей:

$$\frac{29}{8} + \frac{67}{12} = \frac{29 \cdot 3}{8 \cdot 3} + \frac{67 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{29 \cdot 3 + 67 \cdot 2}{24} = \frac{87 + 134}{24} = \frac{221}{24}.$$

2. Приведение дробей к общему знаменателю, равному произведению знаменателей. Числитель и знаменатель первой дроби умножаем на знаменатель второй дроби, а числитель и знаменатель второй дроби умножаем на знаменатель первой дроби. Получим дроби с одинаковыми знаменателями, которые складываем по указанному правилу:

$$\frac{29}{8} + \frac{67}{12} = \frac{29 \cdot 12}{8 \cdot 12} + \frac{67 \cdot 8}{12 \cdot 8} = \frac{29 \cdot 12 + 67 \cdot 8}{8 \cdot 12} = \frac{348 + 536}{96} =$$

$$= \frac{884}{96} = \frac{221}{24};$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}.$$

Чтобы вычесть из одной обыкновенной дроби другую, надо к первой дроби прибавить дробь, противоположную второй дроби:

$$\frac{29}{8} - \frac{67}{12} = \frac{29}{8} + \frac{(-67)}{12} = \frac{29 \cdot 12 + (-67) \cdot 8}{8 \cdot 12} = \frac{348 + (-536)}{96} =$$

$$= \frac{-188}{96} = -\frac{47}{24}.$$

Впрочем, сумму дробей $\frac{29}{8} + \frac{(-67)}{12}$ можно было найти приведением к наименьшему общему знаменателю:

$$\frac{29}{8} + \frac{(-67)}{12} = \frac{29 \cdot 3 + (-67) \cdot 2}{24} = \frac{87 + (-134)}{24} = -\frac{47}{24}.$$

Вспомним также, что выполнение операций над десятичными дробями сводится к выполнению операций над соответствующими целыми числами в столбик.

Для нахождения суммы $7,23 + 15,8$ запишем число $15,8$ под числом $7,23$ (сотни под сотнями, десятки под десятками, единицы под единицами, десятые доли под десятыми, сотые доли под сотыми, запятую под запятой) следующим образом:

$$\begin{array}{r} 7,23 \\ 15,8 \end{array}$$

Далее пользуемся известным алгоритмом нахождения суммы целых чисел в столбик, не обращая внимания на запятую. Получим: $7,23 + 15,8 = 23,03$.

Для нахождения произведения $7,23 \cdot 15,8$ умножим целое число 723 на целое число 158 в столбик по известному алгоритму. В полученном целом числе $114\,234$ нужно поставить запятую так, чтобы после неё осталось 3 цифры (так как у исходных множителей после запятой стоят 3 цифры). Получим: $7,23 \cdot 15,8 = 114,234$.

Вспомним также, что для обращения десятичной дроби в обыкновенную (что нередко приходится делать) представляем сначала деся-

тичную дробь в виде смешанного числа, а затем смешанное число представляем в виде обыкновенной дроби:

$$4,12 = 4\frac{12}{100} = \frac{4 \cdot 100 + 12}{100} = \frac{412}{100}.$$

Можно поступить и по-другому, умножив и разделив исходную десятичную дробь на подходящую степень числа 10:

$$4,12 = \frac{4,12 \cdot 100}{100} = \frac{412}{100}.$$

- 1.¹ Найдите значение выражения $1\frac{2}{5} + \frac{3}{4}$.
2. Найдите значение выражения $1\frac{3}{5} - \frac{3}{4}$.
3. Найдите значение выражения $\frac{5}{7} + 1\frac{3}{5} - \frac{11}{35}$.
4. Найдите значение выражения $\frac{3}{7} - 2\frac{4}{5} + \frac{13}{35}$.
5. Найдите значение выражения $7\frac{3}{4} : \frac{31}{2}$.
6. Найдите значение выражения $5\frac{1}{2} : \frac{11}{8}$.
7. Найдите значение выражения $5\frac{1}{4} : 7$.
8. Найдите значение выражения $6 : \frac{15}{14}$.
9. Найдите значение выражения $\left(-5\frac{7}{8} - \frac{3}{4}\right) \cdot 16$.
10. Найдите значение выражения $\left(3\frac{5}{8} + \frac{3}{4}\right) \cdot 16$.
11. Найдите значение выражения $\left(3\frac{5}{12} - \frac{5}{6}\right) \cdot 6$.
12. Найдите значение выражения $\left(3\frac{7}{12} - \frac{1}{3}\right) \cdot 8$.
13. Найдите значение выражения $\left(\frac{5}{8} - \frac{11}{12}\right) : \frac{7}{48}$.
14. Найдите значение выражения $\left(\frac{5}{18} - \frac{11}{12}\right) : \frac{5}{9}$.

¹ В рамку взяты номера заданий, к которым приведены образцы решений.

15. Найдите значение выражения $\left(\frac{5}{12} - \frac{9}{20}\right) : \frac{2}{15}$.
16. Найдите значение выражения $\left(\frac{5}{12} + \frac{11}{20}\right) : \frac{2}{15}$.
17. Найдите значение выражения $(153^2 - 117^2) : 270$.
18. Найдите значение выражения $(153^2 - 147^2) : 150$.
19. Найдите значение выражения $(274^2 - 174^2) : 224$.
20. Найдите значение выражения $(147^2 - 103^2) : 110$.
21. Найдите значение выражения $0,13 \cdot 0,5 - 0,04$.
22. Найдите значение выражения $0,13 \cdot 0,5 + 0,04$.
23. Найдите значение выражения $0,17 \cdot 0,4 - 2,03$.
24. Найдите значение выражения $0,11 \cdot 0,3 - 3,002$.
25. Найдите значение выражения $\frac{2,8}{1,7 - 6,7}$.
26. Найдите значение выражения $\frac{3,2}{1,7 + 3,3}$.
27. Найдите значение выражения $\frac{5,7}{2,3 + 17,7}$.
28. Найдите значение выражения $\frac{4,7}{1,3 - 5,3}$.
29. Найдите значение выражения $(1,072 + 3,228) : \frac{43}{5}$.
30. Найдите значение выражения $(3,7 - 1,15) \cdot \frac{10}{51}$.
31. Найдите значение выражения $\left(3\frac{3}{14} - 1,3\right) : 3\frac{29}{35}$.
32. Найдите значение выражения $\left(4\frac{7}{15} + 2,3\right) : \frac{7}{12}$.
33. Найдите значение выражения $(3,7 : 1,15) \cdot \frac{23}{37}$.

34. Найдите значение выражения $(1,072 : 3,228) \cdot 6\frac{3}{134}$.
35. Найдите значение выражения $(2,324 \cdot 4,15) : 48,223$.
36. Найдите значение выражения $(2,152 \cdot 3,15) : 33,894$.
37. Найдите значение выражения $63 \cdot \left(\frac{7}{18} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)$.
38. Найдите значение выражения $54 \cdot \left(\frac{5}{18} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)$.
39. Найдите значение выражения $27 \cdot \left(\frac{11}{18} - \frac{1}{12} - \frac{5}{3}\right)$.
40. Найдите значение выражения $18 \cdot \left(\frac{3}{18} + \frac{1}{4} + \frac{7}{3}\right)$.

Задания для контроля

Вариант 1

1. Найдите значение выражения $\frac{5}{7} + \frac{2}{5} - \frac{18}{35}$.
2. Найдите значение выражения $0,12 \cdot 0,4 - 0,049$.
3. Найдите значение выражения $\frac{2 - 7,6}{0,35}$.
4. Найдите значение выражения $\frac{3}{4} - 2,3 - \frac{8}{5}$.
5. Найдите значение выражения $27 \cdot \left(\frac{11}{18} - \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)$.

Вариант 2

1. Найдите значение выражения $\frac{3}{7} - \frac{4}{5} + \frac{34}{35}$.
2. Найдите значение выражения $3,1 : 0,05 - 62,001$.
3. Найдите значение выражения $\frac{3 - 5,8}{0,35}$.
4. Найдите значение выражения $\frac{7}{4} - 2,8 - \frac{7}{5}$.
5. Найдите значение выражения $81 \cdot \left(\frac{11}{18} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)$.

Вариант 3

1. Найдите значение выражения $\left(5\frac{1}{8} - \frac{17}{5}\right) : \frac{3}{40}$.
2. Найдите значение выражения $\frac{7}{11} : \left(-\frac{14}{33}\right) + \frac{7}{2}$.
3. Найдите значение выражения $3 : 0,06 + 37$.
4. Найдите значение выражения $\frac{2,37 \cdot 32,8}{23,7 \cdot 0,328}$.
5. Найдите значение выражения $\frac{18}{7} \cdot \frac{14}{3} : \frac{3}{5}$.

Вариант 4

1. Найдите значение выражения $\left(2\frac{5}{8} - \frac{12}{5}\right) : \frac{3}{40}$.
2. Найдите значение выражения $\frac{5}{11} : \left(-\frac{10}{33}\right) + \frac{7}{2}$.
3. Найдите значение выражения $4 : 0,05 - 27$.
4. Найдите значение выражения $\frac{4,52 \cdot 17,6}{45,2 \cdot 0,176}$.
5. Найдите значение выражения $\frac{20}{7} \cdot \frac{21}{4} : \frac{3}{10}$.

§ 2. Простые текстовые задачи

2.1. Задачи с целочисленным ответом

В ответе на эти задачи надо писать целое число (количество автобусов, число банок с краской, число пачек сахара и т. д.). Нужно самому подумать, в большую или меньшую сторону округлять результат вычислений.

- *Пример 1.*

Если для перевозки детей нужно 5,3 автобуса, то округлять будем в большую сторону (6 автобусов). Иначе автобусов просто не хватит.

- *Пример 2.*

Если денег хватает на 12,8 пачек сахара, то нам продадут всего 12 пачек и у нас останется сдача.

Иногда в условии может требоваться округление по математическим правилам. Если в округляемом числе цифра десятых (первая цифра, стоящая после запятой) меньше 5, то число округляется в меньшую сторону, то есть все цифры после запятой отбрасываются. Например: $14,298 \approx 14$. Если в округляемом числе цифра десятых больше или равна 5, то число округляется в большую сторону, то есть к числу единиц прибавляется 1. Например: $14,51 \approx 15$.

41. На складе 217 бочек с краской и 315 бочек с эмалью. Сколько потребуется машин, чтобы перевезти все бочки со склада в магазин, если в машину помещается не более 85 бочек?

42. Экскурсия по городу была организована для 127 школьников. Найдите, какое количество автобусов вместимостью 33 человека необходимо заказать для проведения этой экскурсии.

43. Теплоход рассчитан на 840 пассажиров и 26 членов команды. Спасательная шлюпка может вместить 72 человека. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

44. В летнем лагере 260 детей и 28 воспитателей. В автобус вмещается не более 50 пассажиров. Сколько автобусов потребуется, чтобы перевезти всех из лагеря в город?

45. Блокнот стоит 6 рублей 40 копеек. Какое наибольшее число блокнотов можно купить на 80 рублей?

46. Сырок стоит 7 рублей 80 копеек. Какое наибольшее число сырков можно купить на 70 рублей?
47. Порция мороженого «Пломбир» стоит 24 рубля 50 копеек. Какое наибольшее число порций можно купить на 260 рублей?
48. Шариковая ручка стоит 15 рублей 20 копеек. Какое наибольшее число ручек можно купить на 167 рублей 50 копеек?
49. В пачке бумаги 250 листов формата А4. За месяц в школе используется 1200 листов. Какое наименьшее число пачек бумаги нужно купить в школу на 3 месяца?
50. Необходимо распечатать электронную версию книги объёмом 508 страниц в 5 экземплярах. Какое наименьшее число пачек бумаги потребуется для распечатки, если в каждой пачке 250 листов?
51. Каждый день во время конференции расходуется 60 пакетиков чая. Конференция длится 4 дня. Чай продаётся в пачках по 25 пакетиков. Какое наименьшее число пачек нужно купить на все дни конференции?
52. В детском саду имеется 5 групп по 14 детей. На второй завтрак им выдают зефир по два каждому. Какое наименьшее число коробок зефира надо купить на второй завтрак, если в одной коробке содержится 12 штук?
53. В магазине проходит рекламная акция: при покупке двух пакетов яблочного сока покупатель получает ещё один пакет сока в подарок. Какое наибольшее число пакетов яблочного сока можно получить на 200 рублей, если цена одного пакета сока составляет 34 рубля?
54. В гипермаркете проходит рекламная акция: покупая 3 шоколадки, 4-ю покупатель получает в подарок. Шоколадка стоит 28 рублей. Какое наибольшее число шоколадок получит покупатель за 300 рублей?
55. При покупке картофеля на поле можно по цене двух мешков получить три. Какое наибольшее число мешков можно приобрести на 2220 рублей, если цена одного мешка составляет 315 рублей?
56. При покупке лука оптом можно по цене двух мешков получить два с половиной. Какое наибольшее число мешков можно приобрести на 1850 рублей, если цена одного мешка составляет 360 рублей?
57. Роза стоит 45 рублей. Сергей хочет подарить Свете букет из нечётного количества цветов. Из какого наибольшего числа роз получится составить букет, если у Сергея есть 550 рублей?
58. На день рождения принято дарить букет из нечётного числа цветов. Тюльпаны стоят 30 рублей за штуку. У Вани есть 370 рублей. Из какого наибольшего числа тюльпанов получится составить букет для подарка на день рождения Маши?

59. Гладиолус стоит 130 рублей. Роман хочет подарить друзьям на свадьбу букет из нечётного количества цветов. Из какого наибольшего числа гладиолусов получится составить букет, если у Романа есть 800 рублей?

60. На праздник 8 марта принято дарить букет из нечётного числа цветов. Тюльпаны стоят 40 рублей за штуку. У Андрея есть 330 рублей. Из какого наибольшего числа тюльпанов получится составить букет на праздник 8 марта для учительницы математики?

61. Для приготовления мармелада на 1 кг слив необходимо 1,4 кг сахара. Сколько килограммовых упаковок сахара нужно купить, чтобы сварить мармелад из 23 кг слив?

62. Для приготовления малинового варенья на 1 кг малины требуется 1,2 кг сахара. Сколько килограммовых упаковок сахара нужно купить, чтобы сварить варенье из 16 кг малины?

63. Для приготовления маринада для огурцов на 1 литр воды требуется 14 г лимонной кислоты. Лимонная кислота продаётся в пакетиках по 20 г. Какое наименьшее число пакетиков нужно купить хозяйке для приготовления 23 литров маринада?

64. Для приготовления маринада для огурцов на 1 литр воды требуется 13 г лимонной кислоты. Хозяйка готовит 9 литров маринада. В магазине продаются пакетики лимонной кислоты по 10 г. Какое наименьшее число пакетиков нужно купить хозяйке для приготовления маринада?

65. В отделении больницы находятся 25 больных, которым врач назначил уколы по 2,5 мл лекарства. Уколы необходимо делать 3 раза в день. В упаковке 16 ампул по 2,5 мл. Какое наименьшее количество упаковок лекарства нужно заказать на один день?

66. Больному прописано лекарство, которое следует пить порциями по 0,5 г 3 раза в день в течение 18 дней. Лекарство выпускается в упаковках по 10 таблеток по 0,5 г. Какое наименьшее количество упаковок потребуется на весь курс лечения?

67. Полугодовалому ребёнку дают фруктовое пюре порциями по 60 г 3 раза в день. Пюре выпускается в упаковках по 100 г. Какое наименьшее количество упаковок потребуется двум полугодовалым детям на неделю?

68. Одна таблетка лекарства весит 30 мг и содержит 15% активного вещества. Врач прописывает ребёнку 2,4 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку весом 15 кг в течение суток?

69. В доме, в котором живёт Пётр Иванович, один подъезд. На каждом этаже по пять квартир. Пётр Иванович живёт в квартире № 44. На каком этаже живёт Пётр Иванович?

70. В доме, в котором живёт Саша, один подъезд. На каждом этаже по четыре квартиры. Саша живёт в квартире № 51. На каком этаже живёт Саша?

71. В доме, в котором живёт Петя, 7 этажей и несколько подъездов. На каждом этаже по 5 квартир. Петя живёт в квартире № 109. В каком подъезде живёт Петя?

72. В доме, в котором живёт Дима, 9 этажей и несколько подъездов. На каждом этаже находится по 4 квартиры. Дима живёт в квартире № 174. В каком подъезде живёт Дима?

73. В американских автомобилях скорость на спидометре измеряется в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 47 миль в час? Ответ округлите до целого числа.

74. Геннадий купил американский автомобиль, спидометр которого показывает скорость в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 76 миль в час? Ответ округлите до целого числа.

75. Спидометр автомобиля показывает скорость как в милях в час, так и в километрах в час. Какую скорость в милях в час показывает спидометр, если автомобиль движется со скоростью 84 км в час? (Считайте, что 1 километр равен 0,62 мили; 1 миля равна 1,6 км.)

76. Спидометр автомобиля показывает скорость как в милях в час, так и в километрах в час. Какую скорость в километрах в час показывает спидометр, если автомобиль движется со скоростью 60 миль в час? (Считайте, что 1 миля равна 1,61 километра.)

77. Автобус «Москва — Таганрог» отправляется в 10:50, а прибывает в 6:50 на следующий день (время московское). Сколько часов автобус находится в пути?

78. Поезд «Ростов — Москва» отправляется в 13:40, а прибывает в 7:40 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

79. Поезд «Волгоград — Москва» отправляется в 13:20, а прибывает в 6:20 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

80. Поезд «Адлер — Ростов» отправляется в 22:40, а прибывает в 9:40 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

2.2. Денежные расчёты

Достаточно часто приходится определять затраты на приобретение различных товаров. Например, зная, что цена 1 м³ воды составляет 20 рублей 30 копеек, узнаем стоимость 150 м³ воды.

Переведём в рубли сумму 20 рублей 30 копеек. Копейка — это $\frac{1}{100}$ рубля, значит, 30 копеек равны $\frac{30}{100} = 0,3$ рубля. Отсюда 20 рублей 30 копеек = 20,3 рубля.

Теперь найдём произведение 150 (м³) и 20,3 (руб. за м³).

$150 \cdot 20,3 = 15 \cdot 10 \cdot 20,3 = 15 \cdot 203 = 3045$. Значит, стоимость 150 м³ воды равна 3045 рублей.

81. Летом килограмм помидоров стоит 40 рублей. Валентина Львовна купила 3 кг 300 г помидоров. Сколько рублей сдачи она должна получить с 1000 рублей?

82. Лена купила 1 кг 200 г яблок по цене 126 рублей за килограмм. Сколько сдачи она должна получить с 500 рублей? Ответ укажите в рублях.

83. На автозаправке клиент отдал кассиру 1000 рублей и залил в бак 32 литра бензина по цене 30 рублей 50 копеек за литр. Сколько сдачи должен получить клиент? Ответ дайте в рублях.

84. На счету мобильного телефона Максима было 215 рублей, а после разговора с бабушкой осталось 160 рублей. Сколько минут длился разговор с бабушкой, если одна минута разговора стоит 2 рубля 50 копеек?

85. Маша купила месячный проездной билет на троллейбус. Проездной билет стоит 280 рублей, а разовая поездка — 7 рублей. Сколько рублей сэкономила Маша, если за месяц она сделала 48 поездок на троллейбусе?

86. Аня купила месячный проездной билет на автобус. За месяц она сделала 54 поездки. Сколько рублей она сэкономила, если проездной билет стоит 700 рублей, а разовая поездка 18 рублей?

87. Больному предложено два расчёта за лечение: оплата 9 разовых процедур по цене 125 рублей за процедуру или оплата всех процедур одновременно в размере 2000 рублей. Какой способ оплаты выгоднее? В ответе укажите, на сколько рублей.

88. Индивидуальному предпринимателю предложили купить 11 пар мужских кроссовок либо по цене 1875 рублей за пару, либо оптом за

20 000 рублей. Какой способ покупки выгоднее? В ответе укажите, на сколько рублей.

89. 1 киловатт-час электроэнергии стоит 2 рубля 10 копеек. Счётчик электроэнергии 1 мая показывал 346 025 киловатт-часов, а 1 июня показывал 346 308 киловатт-часов. Сколько рублей нужно заплатить за электроэнергию за май?

90. В квартире, где проживает Владимир, установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). 1 сентября счётчик показывал расход 143 м^3 воды, а 1 октября — 152 м^3 . Какую сумму должен заплатить Владимир за холодную воду за сентябрь, если цена 1 м^3 холодной воды составляет 20 рублей 30 копеек? Ответ дайте в рублях.

91. 1 киловатт-час электроэнергии стоит 2 рубля 60 копеек. Счётчик электроэнергии 1 мая показывал 7381 киловатт-час, а 1 июня — 8124 киловатт-часа. Сколько рублей надо заплатить за электроэнергию за май?

92. 1 м^3 бытового газа стоит 5 рублей 40 копеек. Счётчик газа 1 января показывал 7381 м^3 , а 1 февраля — 8174 м^3 . Сколько рублей надо заплатить за бытовой газ за январь?

2.3. Проценты

Один процент (1%) — это одна сотая часть.

1% от числа A — одна сотая часть числа A , то есть $\frac{A}{100}$.

$p\%$ от числа A — это $\frac{p \cdot A}{100}$.

15% от числа 200 — это $\frac{15 \cdot 200}{100} = 30$.

Если число B больше числа A на $p\%$ от числа A , то

$$B = A + \frac{p \cdot A}{100} = \frac{(100 + p) \cdot A}{100} \quad \text{или} \quad B = A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Если число B меньше числа A на $p\%$ от числа A , то

$$B = A - \frac{p \cdot A}{100} = \frac{(100 - p) \cdot A}{100} \quad \text{или} \quad B = A \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right).$$

При решении задач на проценты важно точно знать, от какого числа рассчитывается процент в каждом конкретном случае.

93. Платье стоит 2120 рублей. Скидка в день распродажи равна 35%. Сколько стоит платье со скидкой в день распродажи?

94. Футболка стоила 900 рублей. После снижения цены она стала стоить 720 рублей. На сколько процентов была снижена цена на футболку?
95. Стоимость одной поездки в маршрутном такси была повышена на 32% и составила 33 рубля. Сколько рублей стоила одна поездка до повышения цены?
96. Тестовое задание повышенной степени сложности выполнили 7 школьников, что составляет 4% от общего числа тестируемых. Найдите, сколько школьников участвовало в тестировании.
97. За квартал завод выпустил 180 000 станков, из них 8% не прошли ОТК (оказались с браком). Среди прошедших ОТК станков 45% были проданы в течение первого квартала. Сколько станков было продано в течение первого квартала?
98. За квартал фабрика выпустила 160 000 мужских джинсов, из них 15% были отправлены в торговые сети. 45% остальных были отправлены заказчику. Сколько джинсов было отправлено заказчику?
99. В некотором городе живёт 300 000 жителей. Среди них 20% детей и подростков. Среди взрослых жителей 40% не работает (пенсионеры, студенты, домохозяйки и т. п.). Сколько взрослых жителей работает?
100. Среди 50 000 жителей 40% не интересуется футболом. Среди футбольных болельщиков 70% смотрели по телевизору финал Лиги чемпионов. Сколько жителей города смотрели этот матч по телевизору?
101. Билет на междугородный автобус для взрослого стоит 260 рублей. Стоимость билета для ребёнка до 10 лет составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 17 детей до 10 лет и 2 взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?
102. Билет для взрослого на подъёмник в Архызе стоит 150 рублей. Пенсионерам от 60 до 70 лет предоставляется скидка 50%. Сколько рублей стоят билеты для группы из 22 взрослых, среди которых 6 пенсионеров от 60 до 70 лет?
103. Железнодорожный билет для взрослого стоит 1580 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 17 школьников и 3 взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?
104. Билет на электричку для взрослого стоит 125 рублей. Пенсионерам по возрасту предоставляется скидка 50%. Сколько рублей стоят билеты для группы из 15 взрослых, среди которых 4 пенсионера по возрасту?

105. Блокнот стоил 6 рублей. После переоценки он подорожал на 10%. Какое наибольшее число таких блокнотов можно купить на 80 рублей после переоценки?
106. Поздравительная открытка стоит 20 рублей. Какое максимальное число открыток можно будет купить на 200 рублей после повышения цены на 25%?
107. В магазине во фруктовом отделе при покупке на сумму свыше 150 рублей предоставляется скидка 10%. Сколько штук киви можно купить за 200 рублей, если одна штука стоит 8 рублей? (В ответе укажите наибольшее возможное количество.)
108. В супермаркете при покупке на сумму свыше 350 рублей делается скидка 10%. Сколько плиток шоколада можно купить за 400 рублей, если одна плитка стоит 35 рублей? (В ответе укажите наибольшее возможное количество.)
109. Стоимость 15 учебников по математике составляет 2100 руб. Какое максимальное количество учебников по математике можно будет приобрести на ту же сумму, если учебник подорожает на 10%?
110. Стоимость 20 мячей до уценки составляла 900 руб. Какое максимальное количество мячей можно приобрести на ту же сумму после их уценки на 10%?
111. В маршрутном такси 20 посадочных мест. Какое минимальное количество такси потребуется для того, чтобы перевезти 87 учащихся от школы до Дворца спорта, если каждое такси будет заполнено школьниками на 90%?
112. Из 30 центнеров муки 40% было продано оптом, а остальное расфасовано в пакеты по 2 кг. В один ящик вмещается 40 пакетов. Сколько ящиков потребуется, чтобы разместить пакеты с мукой?
113. Анна Владимировна купила в магазине стиральную машину в кредит на год под 12% годовых. Стиральная машина стоит 24 тысячи рублей. Сколько рублей Анна Владимировна должна вносить ежемесячно за машину, если всю сумму кредита вместе с процентами нужно погасить за год, выплачивая каждый месяц одинаковую сумму денег?
114. Молодая пара приобрела в магазине холодильник стоимостью 21 000 рублей в кредит на полгода под 30% годовых. Сколько рублей нужно вносить ежемесячно за холодильник, если всю сумму кредита вместе с процентами необходимо погасить за полгода, выплачивая каждый месяц одинаковую сумму денег?

115. Клиент взял в банке кредит 100 000 рублей на год под 14% годовых. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, чтобы через год выплатить всю сумму вместе с процентами. Сколько рублей должен клиент вносить в банк каждый месяц?

116. Клиент взял в банке кредит 120 000 рублей на полгода под 25% годовых. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, чтобы через полгода выплатить всю сумму вместе с процентами. Сколько рублей должен клиент вносить в банк каждый месяц?

Задания для контроля

Вариант 1

1. На туристический слёт приехали 250 участников и 30 членов жюри. Каждый автобус вмещает не более 42 человек. Какое наименьшее количество автобусов требуется для перевозки всех участников и всех членов жюри?
2. Больному прописаны инъекции лекарства, которые нужно делать по ампуле 0,6 г 2 раза в день в течение 28 дней. В одной упаковке 10 ампул лекарства по 0,6 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?
3. Павел купил американский автомобиль, на спидометре которого скорость измеряется в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 50 миль в час? Ответ округлите до целого числа.
4. В городе 180 000 жителей. Из них 30% дети и подростки. Среди взрослых 45% не работает (пенсионеры, студенты, домохозяйки и т. п.). Сколько взрослых работает?
5. Налог на доходы и пенсионный налог составляют 14% от заработной платы. После удержания этих налогов менеджер получил 12 900 рублей. Сколько рублей составляет заработная плата этого менеджера?

Вариант 2

1. Мама для своих двух детей покупает чётное количество воздушных шариков. Какое наибольшее число шариков она сможет купить на 320 рублей, если один шарик стоит 35 рублей?
2. Больному прописано лекарство, которое нужно пить по 0,2 г 4 раза в день в течение 12 дней. В одной упаковке 8 таблеток лекарства по 0,2 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?

3. В магазине килограмм апельсинов стоит 40 рублей. Света купила 1 кг 100 г апельсинов. Сколько рублей сдачи она должна получить с 500 рублей?
4. Магазин закупает кастрюли по оптовой цене 70 рублей за штуку и продаёт с наценкой 20%. Какое наибольшее число кастрюль можно купить в этом магазине на 1300 рублей?
5. Цена на электродрель была повышена на 18% и составила 2360 рублей. Сколько рублей стоила электродрель до повышения цены?

Вариант 3

1. Шарик стоит 3 рубля 40 копеек. Какое наибольшее число шариков можно купить на 40 рублей?
2. В коробке 110 кусков мела. За месяц в школе расходуется 400 кусков мела. Какое наименьшее количество коробок мела нужно купить в школу на 6 месяцев?
3. В магазин привезли учебники по биологии для 7–9-х классов по 50 штук для каждого класса. В шкафу 4 полки, на каждой полке помещается 30 книг. Сколько шкафов можно полностью заполнить учебниками по биологии, если все книги имеют одинаковый формат?
4. Оптовая цена рулона обоев 80 рублей. Розничная цена на 30% выше оптовой. Какое наибольшее число таких рулонов можно купить по розничной цене на 800 рублей?
5. Кириллу нужно 120 000 руб. для поступления в платную аспирантуру. Он взял в банке кредит на год под 12%. Для погашения кредита необходимо ежемесячно вносить в банк одинаковую сумму денег, с тем чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько рублей Кирилл должен вносить в банк каждый месяц?

Вариант 4

1. На экскурсию поехали 320 школьников и 35 учителей. Каждый автобус вмещает не более 38 человек. Какое наименьшее количество автобусов требуется для перевозки всех школьников и всех учителей?
2. Для приготовления 1 литра компота требуется 70 г сахара. Сахар продаётся в пакетах по 500 г. Какое наименьшее число пакетов нужно купить хозяйке для приготовления 16 литров компота?
3. Павел купил катер, на приборах которого скорость измеряется в узлах. Узел равен 1852 м в час. Какова скорость катера в километрах в час, если его скорость 30 узлов? Ответ округлите до целого числа.

4. Банка кофе стоила 320 рублей. После повышения цены она стала стоить 368 рублей. На сколько процентов была повышена цена на банку кофе?
5. Оптовая цена ножа 160 рублей. Розничная цена на 20% выше оптовой. Какое наибольшее число таких ножей можно купить по розничной цене на 3000 рублей?

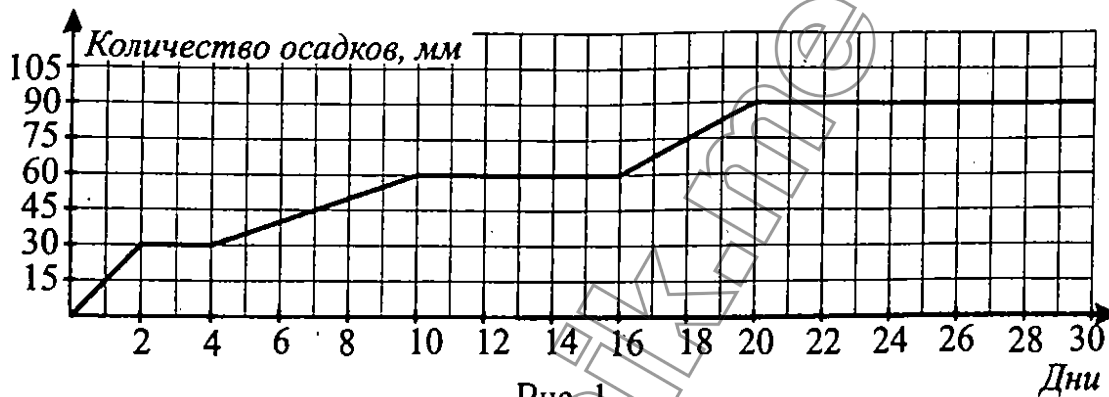
sbornik.me

§ 3. График функции и элементы статистики

3.1. Чтение графиков и диаграмм

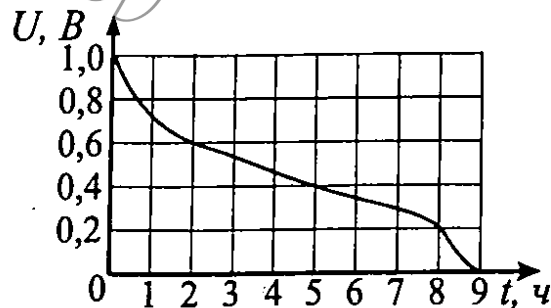
Главное при решении подобной задачи — внимательно прочитать условие и вопрос. При поиске ответа на такой вопрос иногда удобно прямо на графике провести недостающие линии, при необходимости дописать пропущенные числа.

117. На графике (см. рис. 1) показано изменение количества выпавших осадков по области в течение месяца. Определите по графику, сколько осадков (в мм) выпало за первые 10 дней месяца.



118. На графике (см. рис. 1) показано изменение количества выпавших осадков по области в течение месяца. Определите по графику, сколько осадков (в мм) выпало за последние 20 дней месяца.

119. На рисунке 2 показана зависимость напряжения в электрической цепи фонарика от времени его работы. По горизонтальной оси отмечается время работы фонарика в часах, по вертикальной — напряжение в вольтах. Найдите по рисунку, какое напряжение (в вольтах) будет в электрической цепи через 2 часа после начала работы фонарика.



120. В ходе химической реакции количество исходного вещества (реагента), которое ещё не вступило в реакцию, со временем постепенно уменьшается. На рисунке 3 эта зависимость представлена графиком. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента начала реакции, на оси ординат — масса оставшегося реагента, который ещё не вступил в реакцию (в килограммах). Определите по графику, сколько килограммов реагента вступило в реакцию за первые четыре минуты.

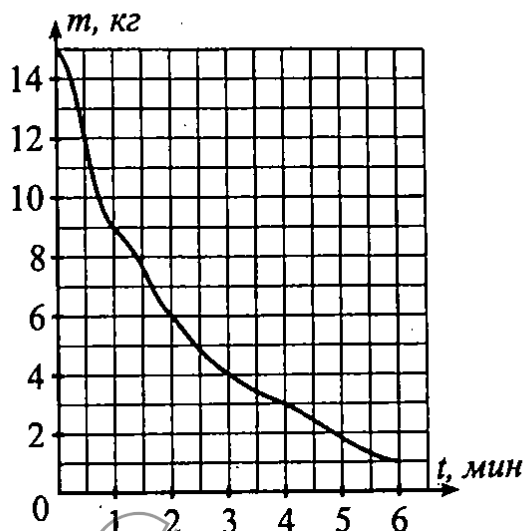


Рис. 3

121. На графике (см. рис. 4) показан выпуск продукции на медицинском предприятии с 5 по 7 октября. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат — масса продукции в килограммах. Определите по графику массу продукции, выпущенную предприятием 7 октября к 15 часам.

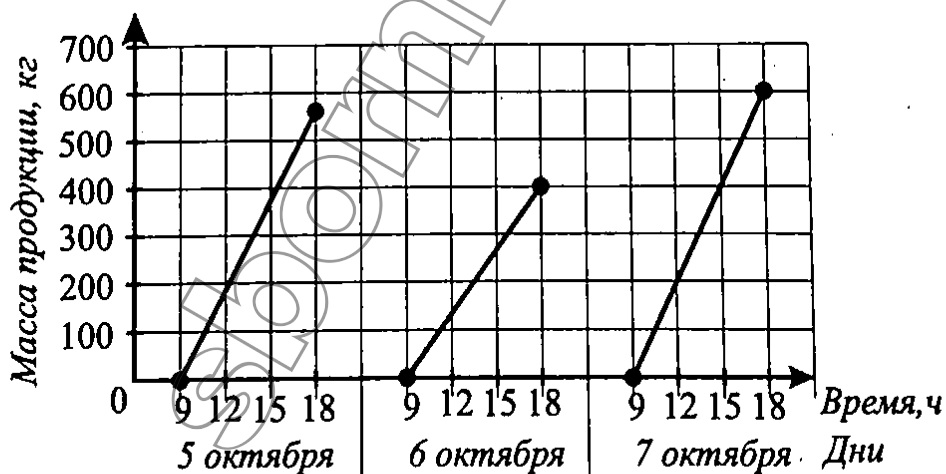


Рис. 4

122. На рисунке 5 (см. с. 29) жирными точками показана динамика изменения курса доллара США по отношению к рублю во все рабочие дни с 08.01.12 по 05.02.12. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — курс доллара по отношению к рублю. Для наглядности жирные точки соединены линиями. Определите по рисунку курс доллара 15.01.12 (в рублях).

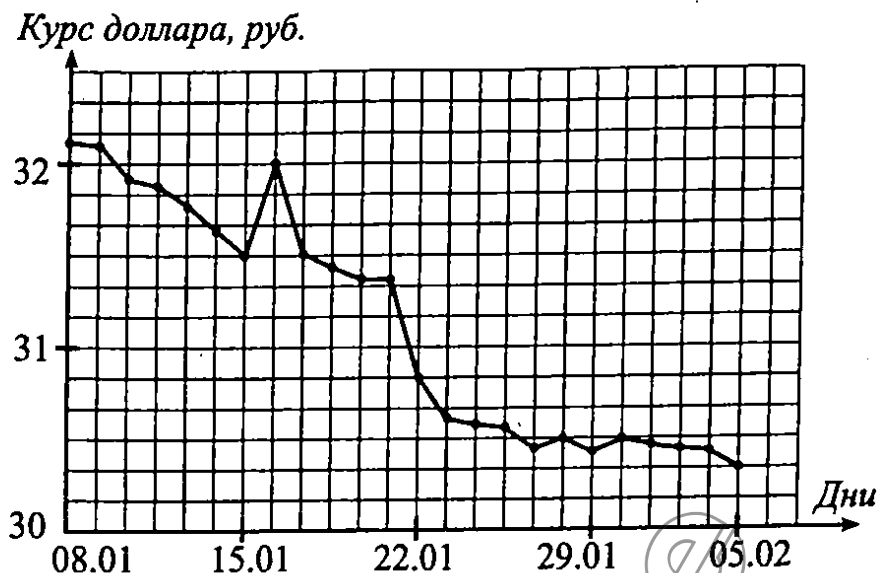


Рис. 5

123. На графике (см. рис. 6) изображена зависимость крутящего момента двигателя от числа его оборотов в минуту. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту, на оси ординат — крутящий момент в Н·м. Скорость автомобиля (в км/ч) приближённо выражается формулой $v = 0,03n$, где n — число оборотов двигателя в минуту.

С какой наименьшей скоростью должен двигаться автомобиль, чтобы крутящий момент был не меньше 75 Н·м? Ответ дайте в километрах в час.

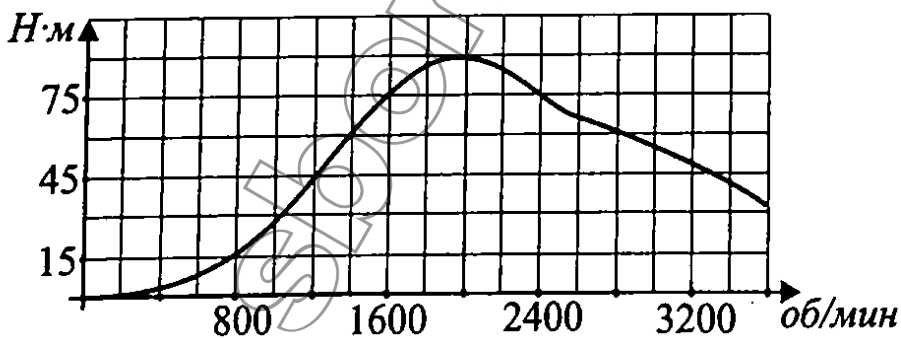


Рис. 6

124. На графике (см. рис. 6) изображена зависимость крутящего момента двигателя от числа его оборотов в минуту. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту, на оси ординат — крутящий момент в Н·м. Скорость автомобиля (в км/ч) приближённо выражается формулой $v = 0,025n$, где n — число оборотов двигателя в минуту.

С какой наименьшей скоростью должен двигаться автомобиль, чтобы крутящий момент был не меньше 45 Н·м? Ответ дайте в километрах в час.

125. На графике (см. рис. 7) показано изменение температуры воздуха в некотором населённом пункте на протяжении трёх суток, начиная с 0:00 часов четверга. На оси абсцисс отчается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по графику наименьшую температуру воздуха в ночь с пятницы на субботу (ночь длится с 19:00 до 5:00). Ответ дайте в градусах Цельсия.

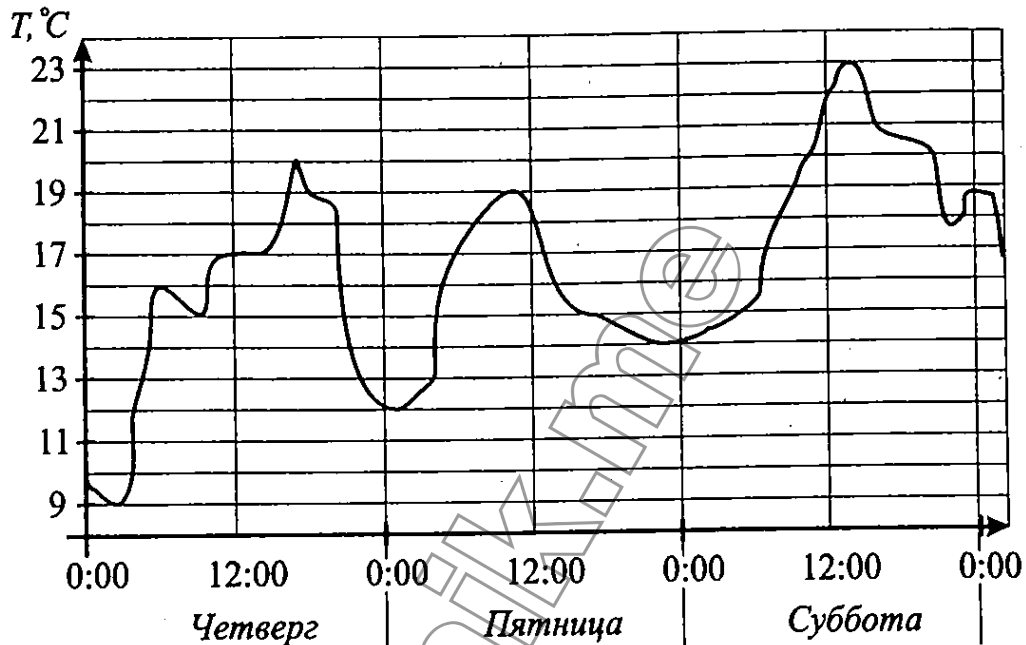


Рис. 7

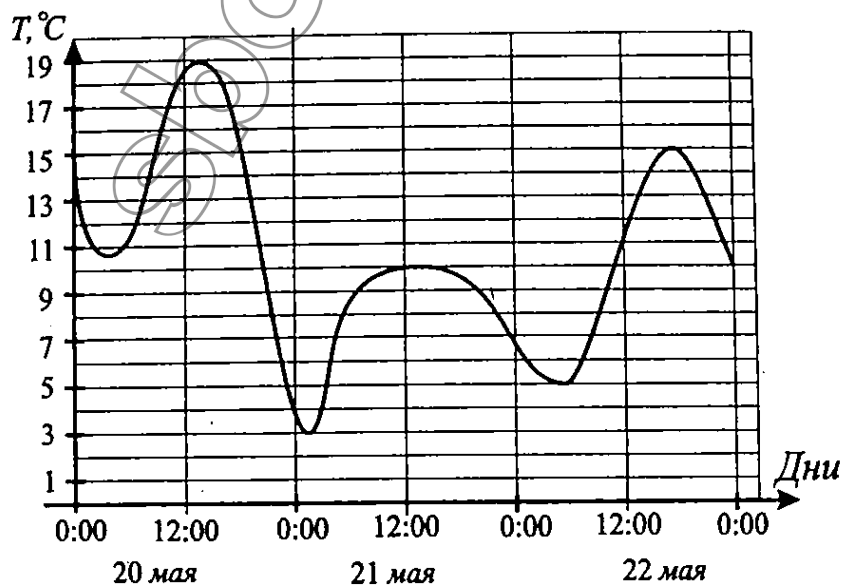


Рис. 8

126. На графике (рис. 8, см. с. 30) показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток, начиная с 0 часов 20 мая. На оси абсцисс отмечается время суток, на оси ординат — значение температуры в градусах. Определите по графику, какой была наименьшая температура (в градусах Цельсия) за указанный период.

127. На рисунке 9 изображён график изменения курса евро в течение 5 дней: с 4 по 8 марта. Определите наименьшую стоимость евро 6 марта (в рублях).

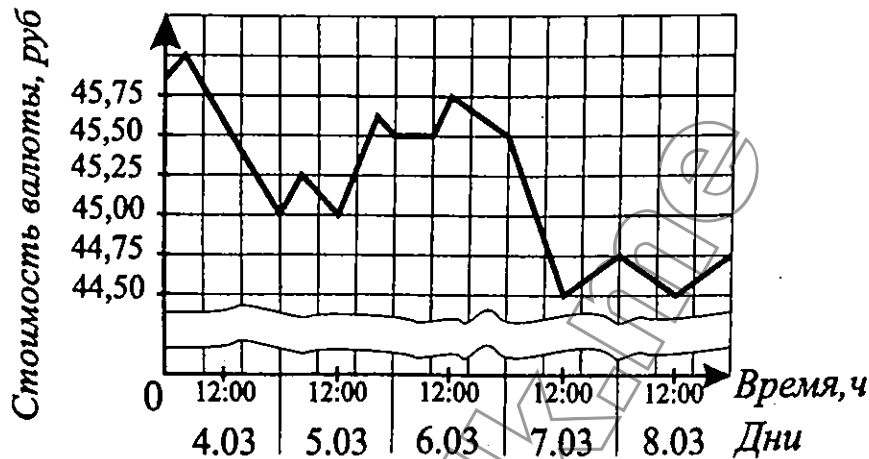


Рис. 9

128. На диаграмме (см. рис. 10) показано количество посетителей сайта информационного агентства в течение каждого часа 6 февраля 2010 года. По горизонтали указываются часы, по вертикали — количество посетителей сайта за данный час. Определите по диаграмме, за какой час на данном сайте побывало максимальное количество посетителей.

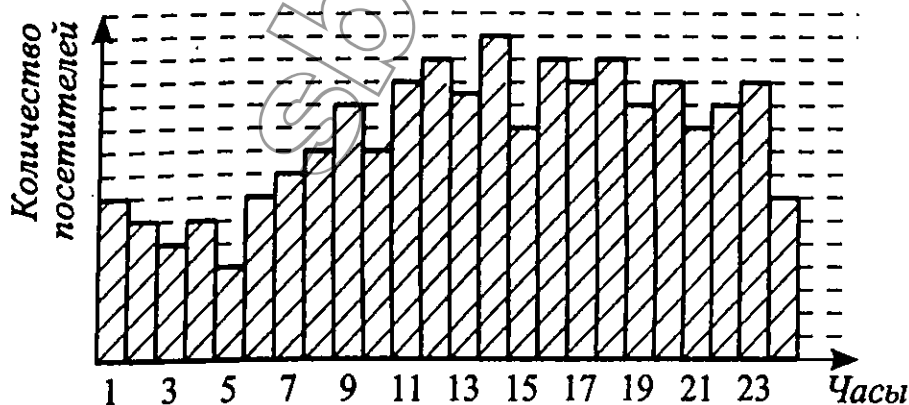


Рис. 10

129. На графике (рис. 11, см. с. 32) показано изменение температуры воздуха в некотором населённом пункте на протяжении трёх суток, начи-

ная с 0:00 часов четверга. Определите по графику разность между наибольшим и наименьшим значениями температуры воздуха в четверг.

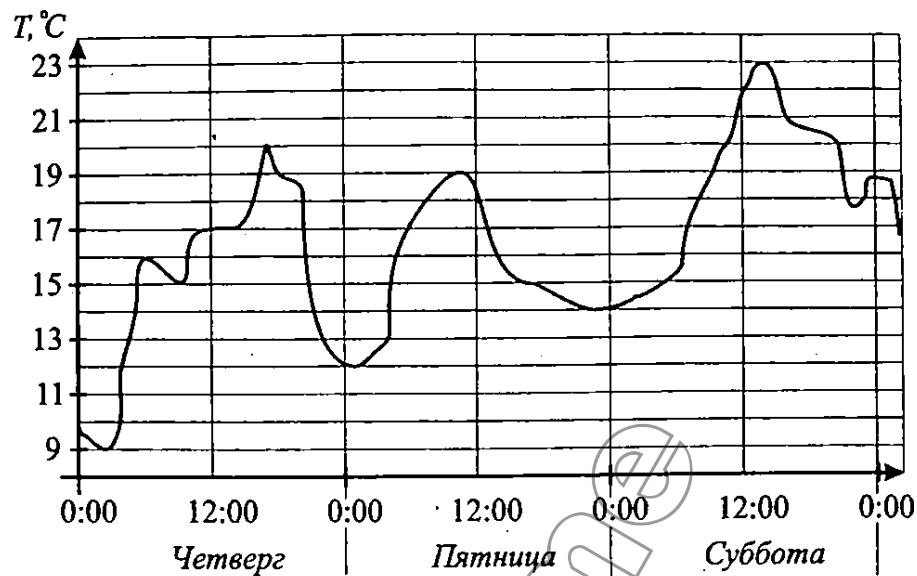


Рис. 11

130. На графике (см. рис. 12) показано изменение температуры воздуха в период с 5 по 7 марта в некотором городе. По горизонтали указываются дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями температуры 6 марта. Ответ дайте в градусах Цельсия.

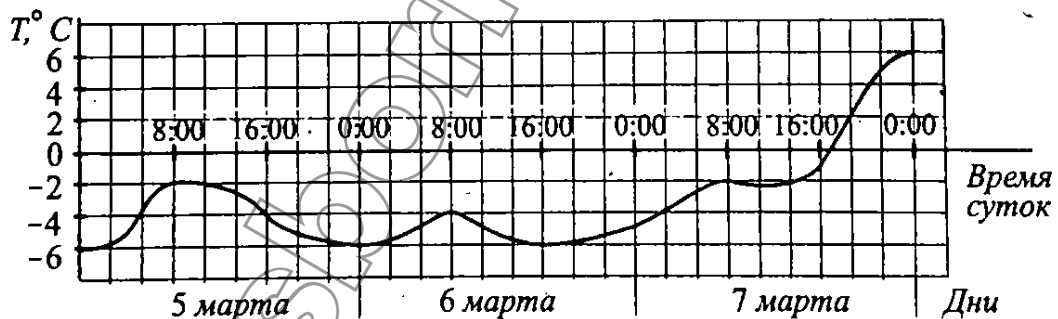


Рис. 12

131. На графике (рис. 13, см. с. 33) показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток, начиная с 0 часов 20 мая. На оси абсцисс отмечается время суток, на оси ординат — значение температуры в градусах. Определите, какой была разница между наибольшим и наименьшим значениями температуры за указанный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.

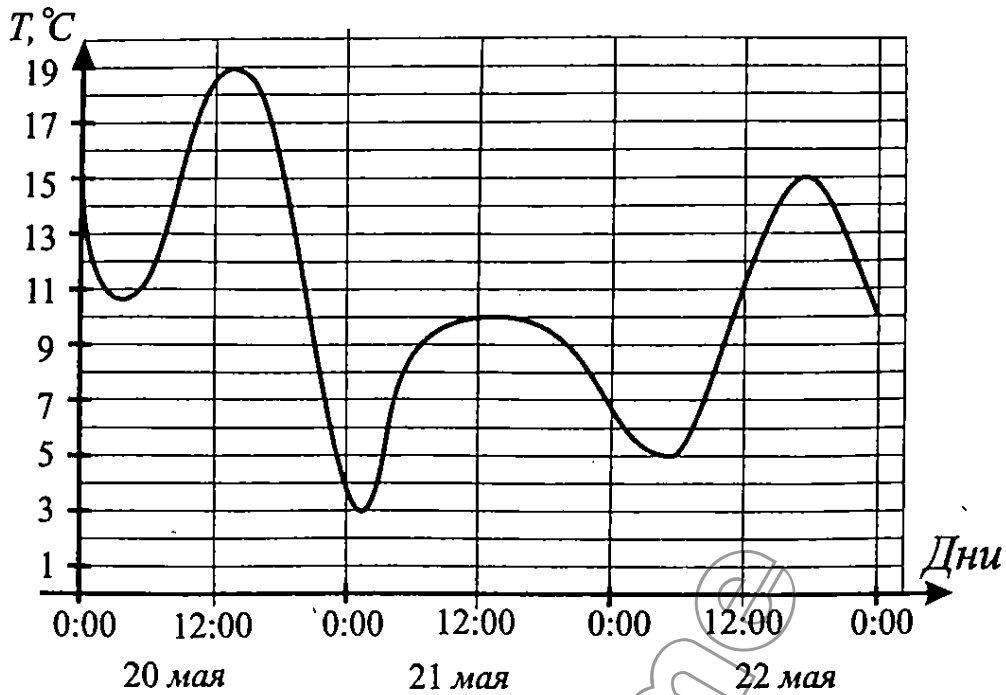


Рис. 13

132. На графике (см. рис. 14) показано изменение удельной теплоёмкости водного раствора некоторого вещества в зависимости от температуры. По горизонтали указывается температура в градусах Цельсия, по вертикали — удельная теплоёмкость в $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$. Определите по рисунку разницу между наибольшей и наименьшей удельной теплоёмкостью раствора в диапазоне температур от 20° до 100° . Ответ дайте в $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$.

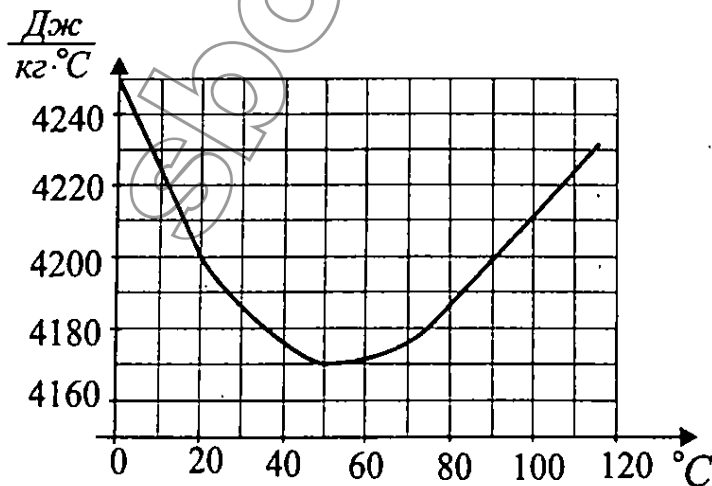


Рис. 14

133. На диаграмме (см. рис. 15) показана среднемесячная температура воздуха в городе N за каждый месяц 1965 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите, сколько было месяцев с положительной среднемесячной температурой.

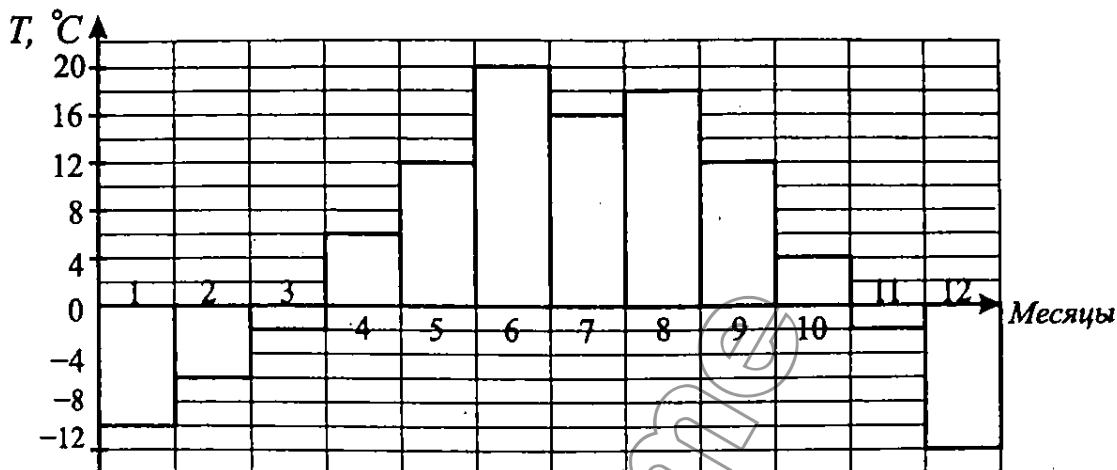


Рис. 15

134. На диаграмме (см. рис. 16) показана среднемесячная температура воздуха (в градусах Цельсия) в г. Челябинске. Найдите количество месяцев со среднемесячной температурой выше 10°C .



Рис. 16

135. На рисунке 17 (см. с. 35) жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Ростове-на-Дону с 3 по 15 февраля 1999 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах.

Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода выпадало более 2 мм осадков.

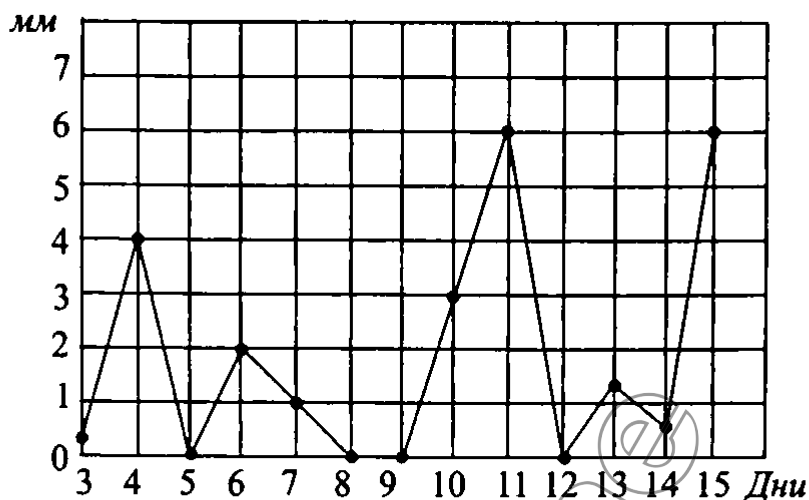


Рис. 17

136. На рисунке 18 жирными точками показано суточное количество осадков, выпавших в Ростове-на-Дону с 1 по 11 сентября 1902 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней за указанный период выпадало более 3 мм осадков.

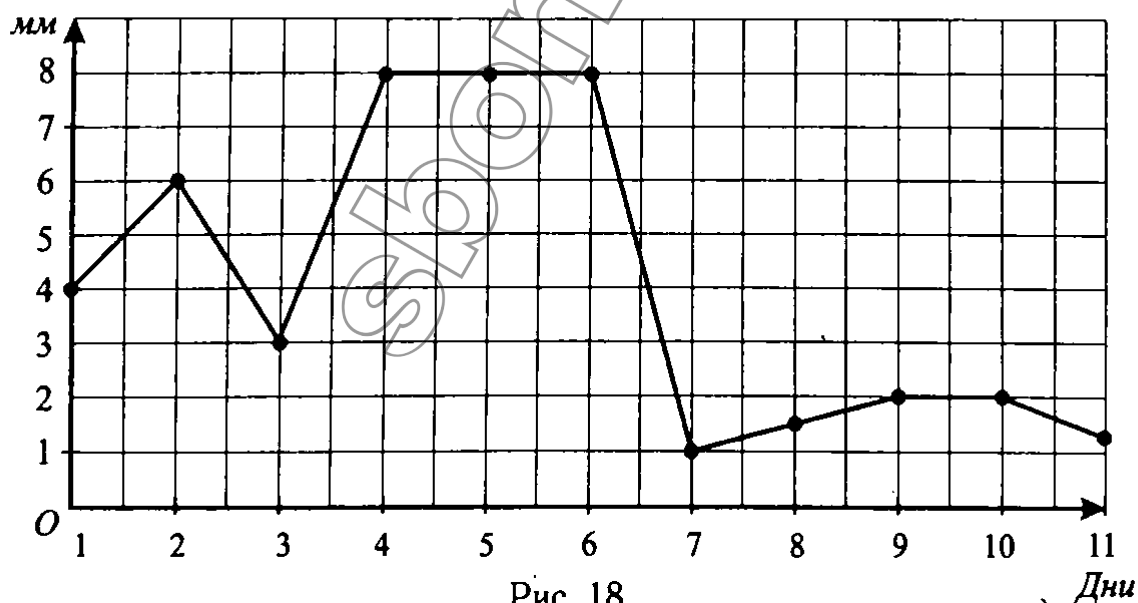


Рис. 18

3.2. Задачи на соответствие частей графика и характеристик

В заданиях базового экзамена по математике встречаются такие, в которых необходимо сопоставить отдельные фрагменты графика и соответствующие характеристики.

В некоторых заданиях вместо графика может быть представлена столбчатая диаграмма.

В этом параграфе рассмотрим подобные задания, решаемые без использования производной.

При их решении важно владеть понятиями возрастания и убывания функции, а также её наибольшего и наименьшего значений.

137. На графике (см. рис. 19) точками показано атмосферное давление в городе Z на протяжении трёх суток с 8 по 10 июля 1994 года. В течение суток давление замерялось 4 раза: в 00:00, 06:00, 12:00 и 18:00. По горизонтали указаны время и дата, по вертикали — давление в миллиметрах ртутного столба. Для наглядности точки соединены линиями.

P , мм рт. ст.

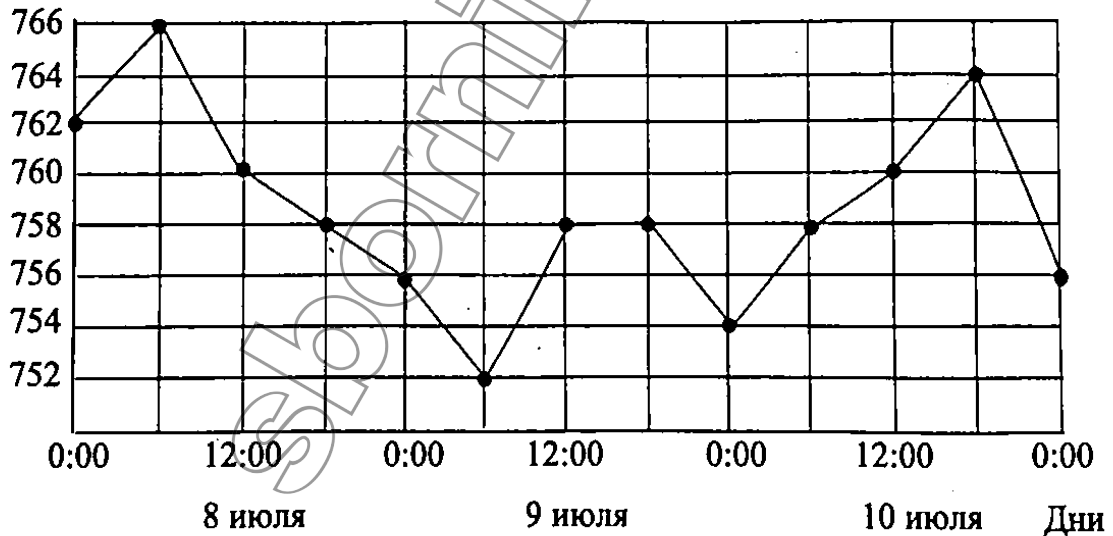


Рис. 19

Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику атмосферного давления в городе Z в течение этого периода.

Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода выпадало более 2 мм осадков.

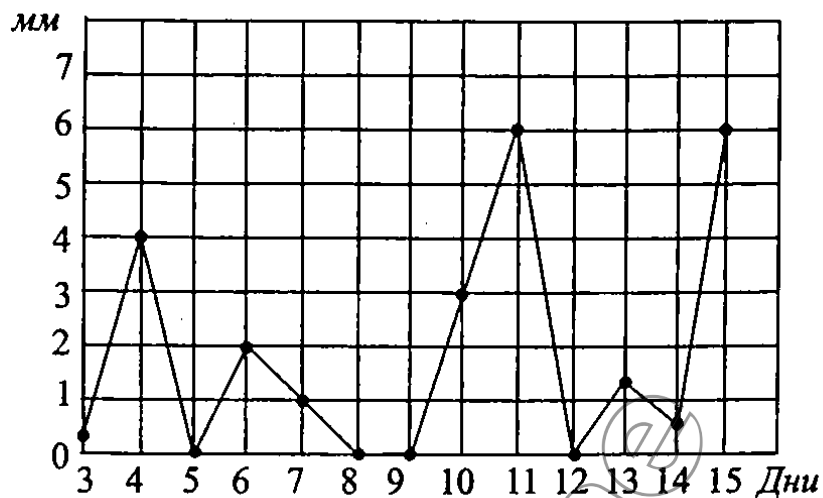


Рис. 17

136. На рисунке 18 жирными точками показано суточное количество осадков, выпавших в Ростове-на-Дону с 1 по 11 сентября 1902 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней за указанный период выпадало более 3 мм осадков.

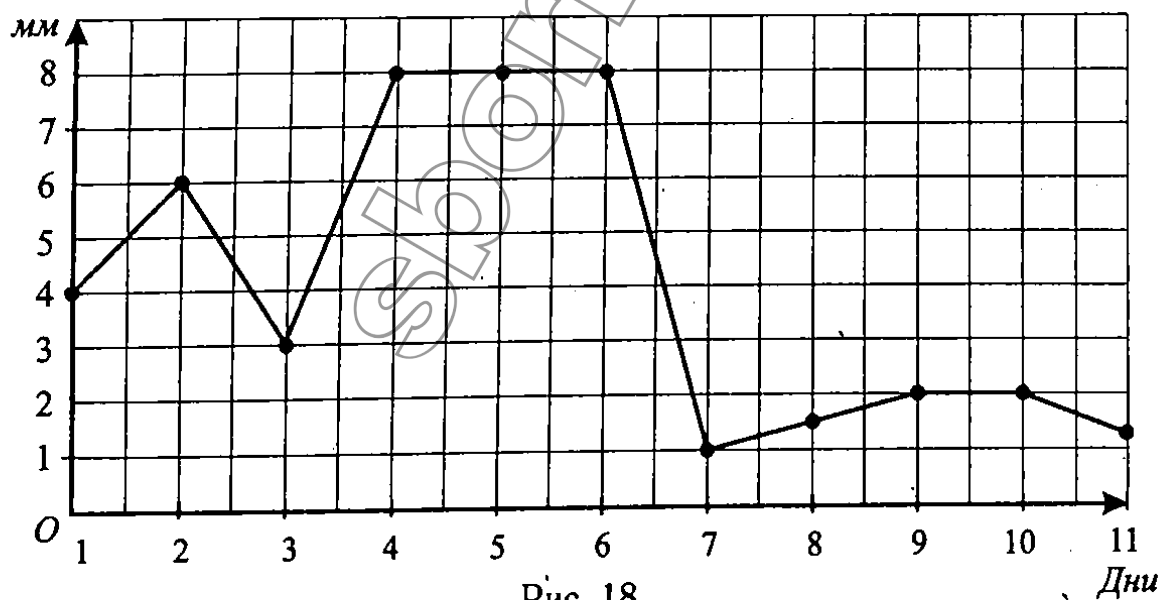


Рис. 18

ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ	ХАРАКТЕРИСТИКИ
А) ночь 8 июля (с 00:00 до 6:00)	1) давление возросло на 6 мм ртутного столба
Б) утро 9 июля (с 06:00 до 12:00)	2) давление упало на 8 мм ртутного столба
В) день 9 июля (с 12:00 до 18:00)	3) давление не изменилось
Г) вечер 10 июля (с 18:00 до 00:00)	4) показание давления было наибольшим

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

138. На графике (см. рис. 20) изображена зависимость крутящего момента двигателя от числа оборотов в минуту. На горизонтальной оси отмечено число оборотов в минуту, на вертикальной оси — крутящий момент в Н·м.

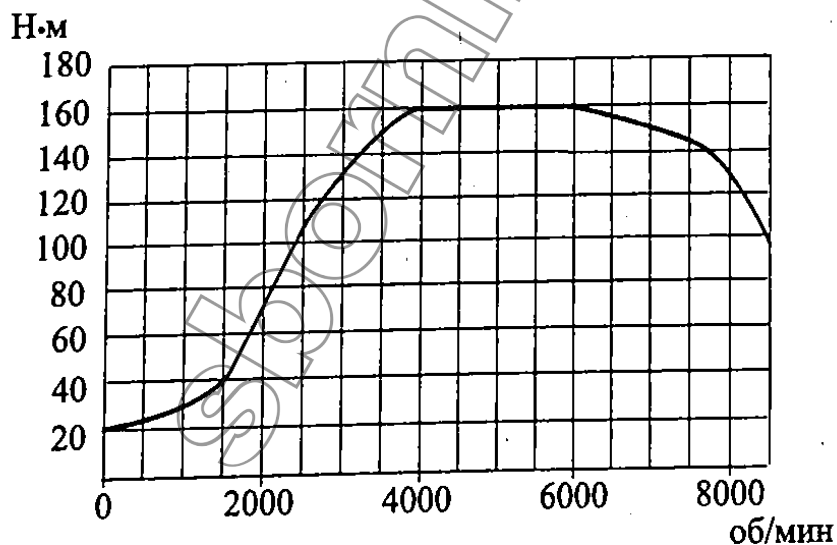


Рис. 20

Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу числа оборотов в минуту характеристику крутящего момента.

ЧИСЛО
ОБОРОТОВ
В МИНУТУ

ХАРАКТЕРИСТИКИ

- | | |
|--------------|--|
| А) 0–1500 | 1) при увеличении числа оборотов наблюдается самый быстрый рост крутящего момента |
| Б) 1500–3000 | 2) при увеличении числа оборотов крутящий момент уменьшается |
| В) 4500–6000 | 3) при увеличении числа оборотов крутящий момент не превышает 40 Н·м на всём рассматриваемом интервале |
| Г) 6500–8000 | 4) при увеличении числа оборотов крутящий момент не меняется |

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

139. На рисунке 21 точками показано атмосферное давление в городе *К* на протяжении трёх суток с 4 по 6 июня 1959 года. В течение суток давление замеряется 4 раза: в 00:00, 06:00, 12:00 и 18:00. По горизонтали указываются время и дата, по вертикали — давление в миллиметрах ртутного столба. Для наглядности точки соединены линиями.

P , мм рт. ст.

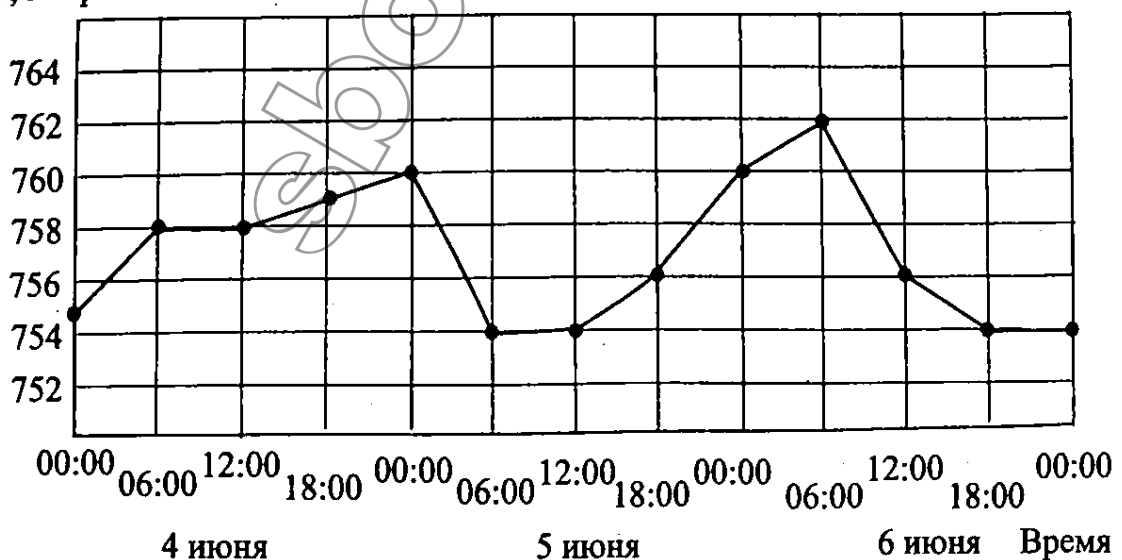


Рис. 21

Пользуясь рисунком, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику атмосферного давления в городе К в течение этого периода.

ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ

ХАРАКТЕРИСТИКИ

- | | |
|-----------------------------------|--|
| А) день 4 июня (с 12:00 до 18:00) | 1) давление возрастало вплоть до максимального значения за период 4–6 июня |
| Б) утро 5 июня (с 06:00 до 12:00) | 2) давление падало |
| В) ночь 6 июня (с 00:00 до 06:00) | 3) давление не изменялось |
| Г) день 6 июня (с 12:00 до 18:00) | 4) давление возрастало, но не превышало 760 мм ртутного столба |

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

140. На диаграмме (см. рис. 22) изображён среднемесячный курс акций компании «Город Плюс» в период с июня 2014 по май 2015 года. По горизонтали указываются месяц и год, по вертикали — цена акции в рублях.

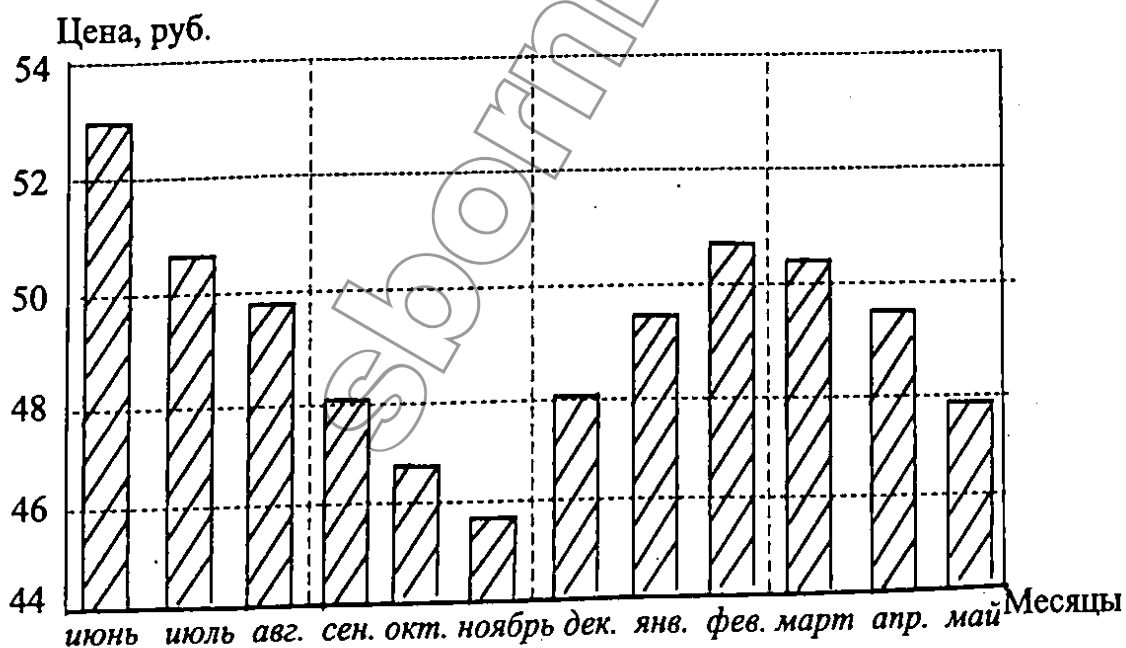


Рис. 22

Пользуясь диаграммой, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов характеристику курса акций.

ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ

ХАРАКТЕРИСТИКИ

- | | |
|--|--|
| А) июнь – август 2014 года | 1) содержит месяц с наименьшей ценой акции с июня 2014 года по май 2015 года |
| Б) сентябрь – ноябрь 2014 года | 2) содержит месяц с наибольшей ценой акции с июня 2014 года по май 2015 года |
| В) декабрь 2014 года – февраль 2015 года | 3) цена одной акции в первый месяц периода больше 50, но меньше 52 рублей |
| Г) март – май 2015 года | 4) цена акции росла все месяцы периода |

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

141. На графике (см. рис. 23) изображено изменение температуры воздуха в течение суток.

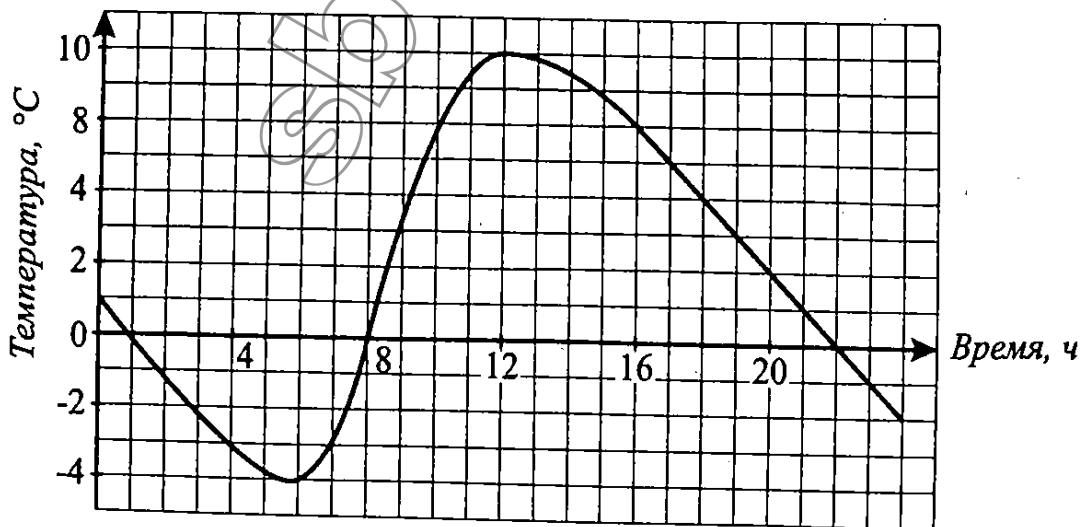


Рис. 23

Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику температуры в течение этого периода.

ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ	ХАРАКТЕРИСТИКИ
А) с 4 часов до 7 часов	1) температура поднималась от 0° до 10°C
Б) с 8 часов до 12 часов	2) температура опускалась от 10°C и была неотрицательной
В) с 12 часов до 22 часов	3) температура была не больше 0°C и не меньше $(-2)^{\circ}\text{C}$
Г) с 22 часов до 24 часов	4) температура была не больше $(-3)^{\circ}\text{C}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

142. На рисунке 24 изображён график изменения скорости движения автомобиля в зависимости от времени в течение 10 часов. На оси абсцисс отмечается время движения в часах, на оси ординат — скорость в километрах в час.

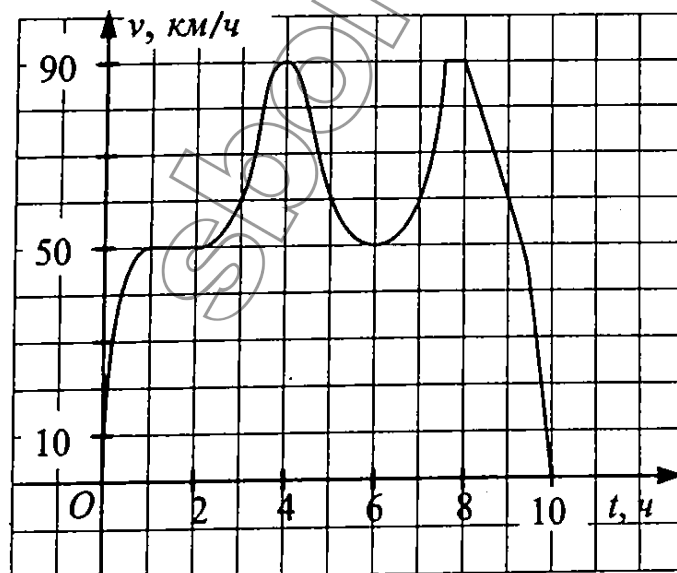


Рис. 24

Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу времени характеристику скорости.

ИНТЕРВАЛЫ ВРЕМЕНИ

ХАРАКТЕРИСТИКИ

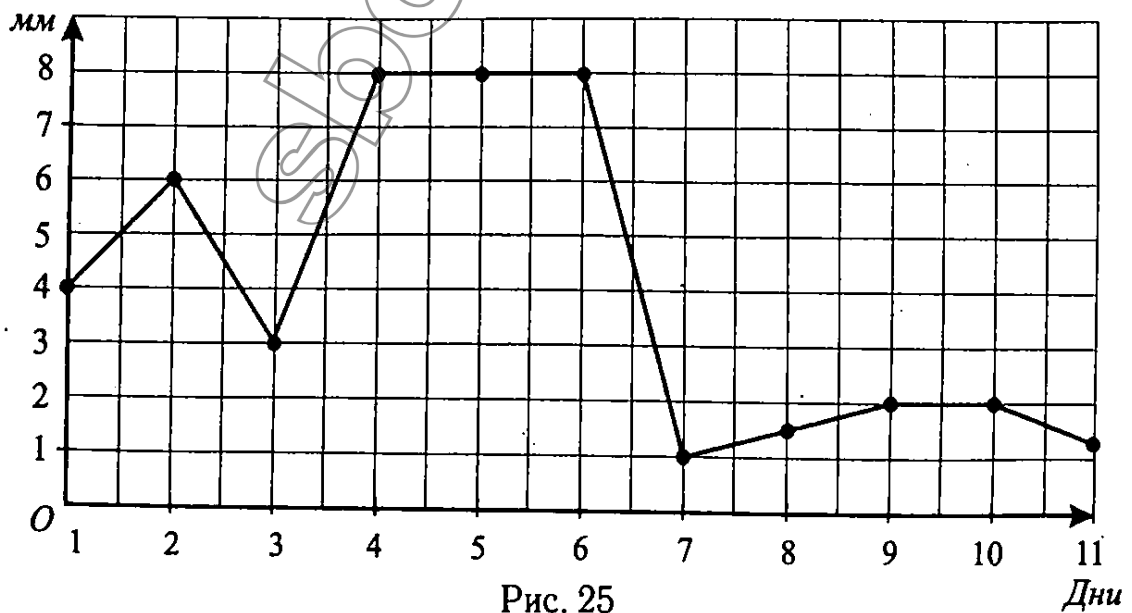
- | | |
|--|--|
| А) в течение 2-го часа движения | 1) скорость возрастала с 60 км/ч до 90 км/ч |
| Б) в течение 4-го часа движения | 2) скорость убывала с 90 км/ч до 50 км/ч |
| В) на протяжении 5-го и 6-го часов движения | 3) автомобиль ехал с постоянной скоростью |
| Г) на протяжении 9-го и 10-го часов движения | 4) скорость быстро убывала с 90 км/ч до 0 км/ч |

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

143. На рисунке 25 жирными точками показано суточное количество осадков, выпавших в Ростове-на-Дону с 1 по 11 сентября 1902 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией.



Пользуясь рисунком, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику атмосферного давления в городе *К.* в течение этого периода.

ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ

ХАРАКТЕРИСТИКИ

- | | |
|-------------------|--|
| А) 1–3 сентября | 1) выпадало одинаковое количество осадков |
| Б) 4–6 сентября | 2) в последний из указанных дней выпало на 1 мм осадков больше, чем в первый |
| В) 7–9 сентября | 3) во второй из указанных дней выпало осадков на 0,7 мм меньше по сравнению с первым |
| Г) 10–11 сентября | 4) за все дни выпало 13 мм осадков |

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

144. На диаграмме (см. рис. 26) показана среднемесячная температура воздуха в городе *М* за каждый месяц 1965 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия.

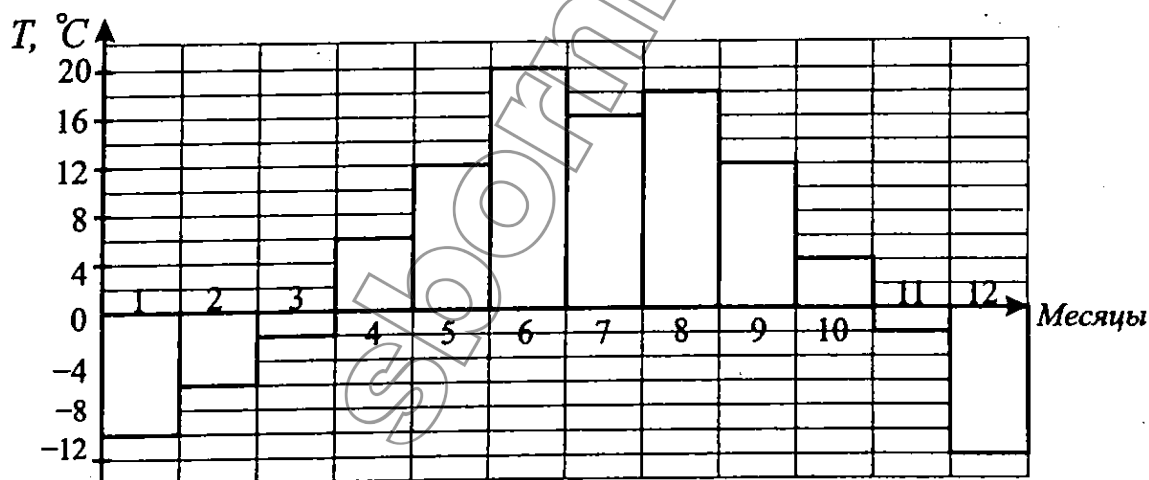


Рис. 26

Пользуясь диаграммой, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов характеристику температуры.

ПЕРИОДЫ	ХАРАКТЕРИСТИКИ
А) январь — март	1) сумма среднемесячных температур составляет 46°C
Б) апрель — июнь	2) на протяжении всех месяцев температура возрастала и была положительной
В) июль — сентябрь	3) на протяжении всех месяцев температура была отрицательной
Г) октябрь — декабрь	4) на протяжении этих месяцев температура менялась с положительной на отрицательную

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

Задания для контроля

Вариант 1

На рисунке 27 жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 27 мая по 24 июня 2006 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией.

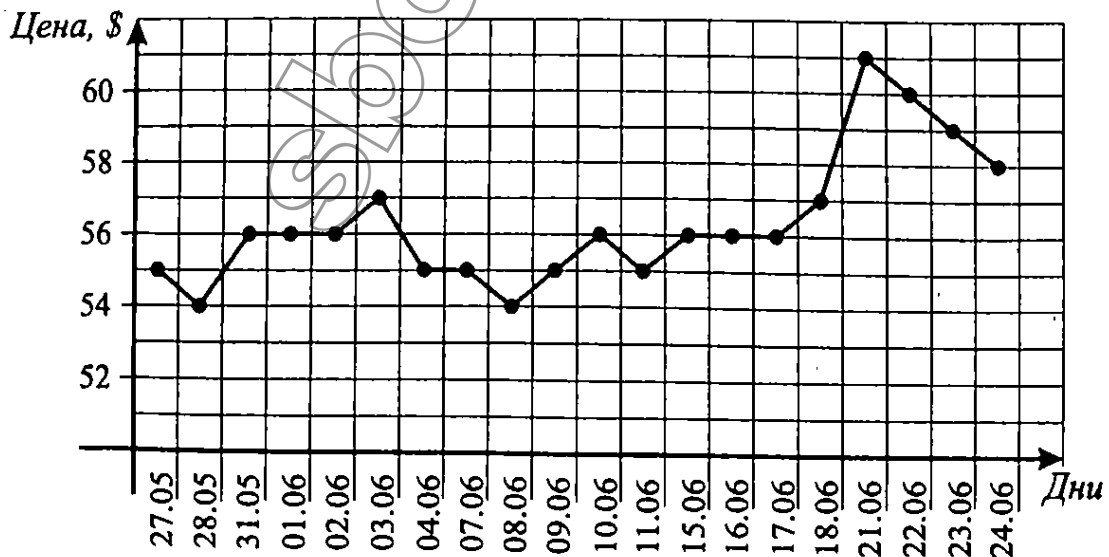


Рис. 27

1. Определите по рисунку 27 (см. с. 44) разность между наибольшей и наименьшей ценами на нефть на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за баррель).

2. Определите по рисунку 27 (см. с. 44), сколько дней цена барреля нефти на момент закрытия торгов за данный период была больше 56 долларов США за баррель.

3. В ходе химической реакции масса реагента, который ещё не вступил в реакцию, со временем постепенно уменьшается. На рисунке 28 эта зависимость представлена в виде графика. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента начала реакции, на оси ординат — масса оставшегося реагента, который ещё не вступил в реакцию (в граммах). Определите по графику, сколько граммов реагента вступило в реакцию за четыре минуты.

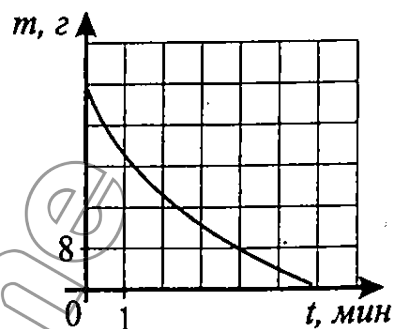


Рис. 28

4. На диаграмме (см. рис. 29) показано распределение выплавки стали в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2000 год. Среди представленных стран первое место по выплавке стали занимал Китай, десятое место — Тайвань. Какое место занимала Япония?

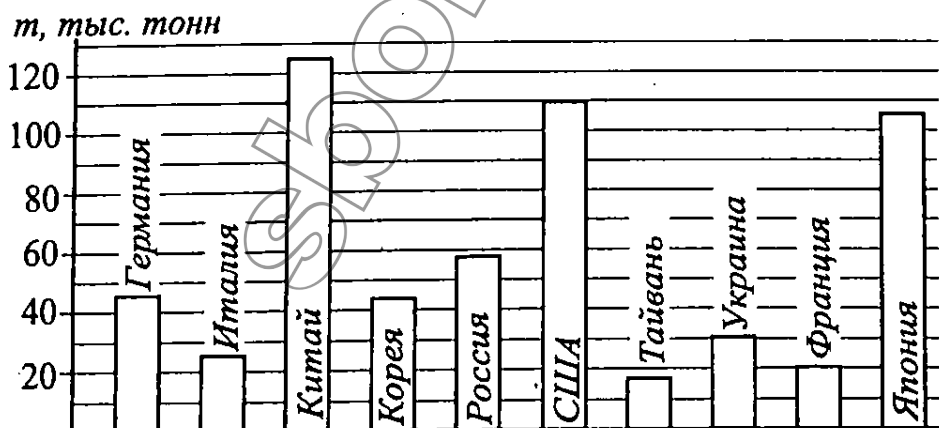


Рис. 29

5. На графике (см. рис. 30) изображена зависимость скорости движения электропоезда от времени. На вертикальной оси отчается скорость движения электропоезда в км/ч, на горизонтальной — время в минутах, прошедшее с начала движения.

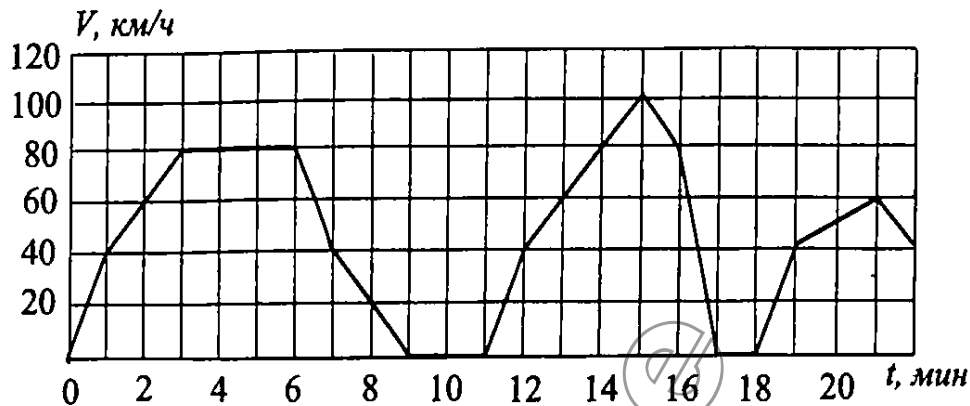


Рис. 30

Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу времени характеристику скорости движения на этом интервале.

ИНТЕРВАЛЫ ВРЕМЕНИ

ХАРАКТЕРИСТИКИ

А) 2–7 мин

1) скорость оставалась постоянной на протяжении 3 минут

Б) 7–11 мин

2) скорость возрастала, но не превышала 60 км/ч

В) 14–18 мин

3) была остановка длительностью ровно 2 минуты

Г) 18–21 мин

4) в какой-то момент времени скорость приняла наибольшее значение

Ответ:

А	Б	В	Г

Вариант 2

На рисунке 31 (см. с. 47) жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в городе N на каждый день с 15 по 28 апреля 2003 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали —

температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией.

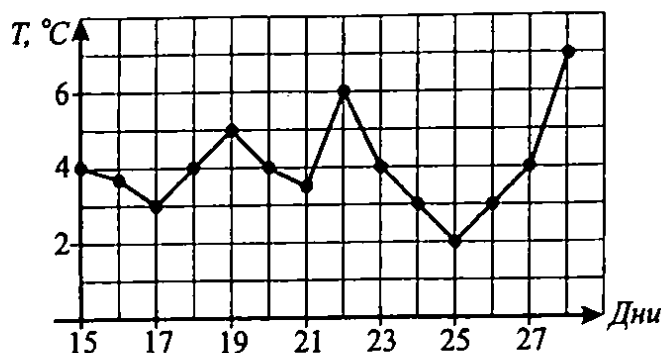


Рис. 31

1. Определите по рисунку 31, какой была разница между наибольшим и наименьшим значениями среднесуточной температуры в городе N за указанный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.
2. Определите по рисунку 31, какого числа была наименьшая среднесуточная температура за указанный период.
3. На рисунке 32 жирными точками показана биржевая стоимость акций Газпрома с 27 мая по 24 июня 2010 г. На горизонтальной оси указаны даты, а на вертикальной оси — цена одной акции в рублях. Определите по графику, в какой день биржевая стоимость акции Газпрома в первый раз превысила 161 рубль. Ответ дайте без указания месяца.

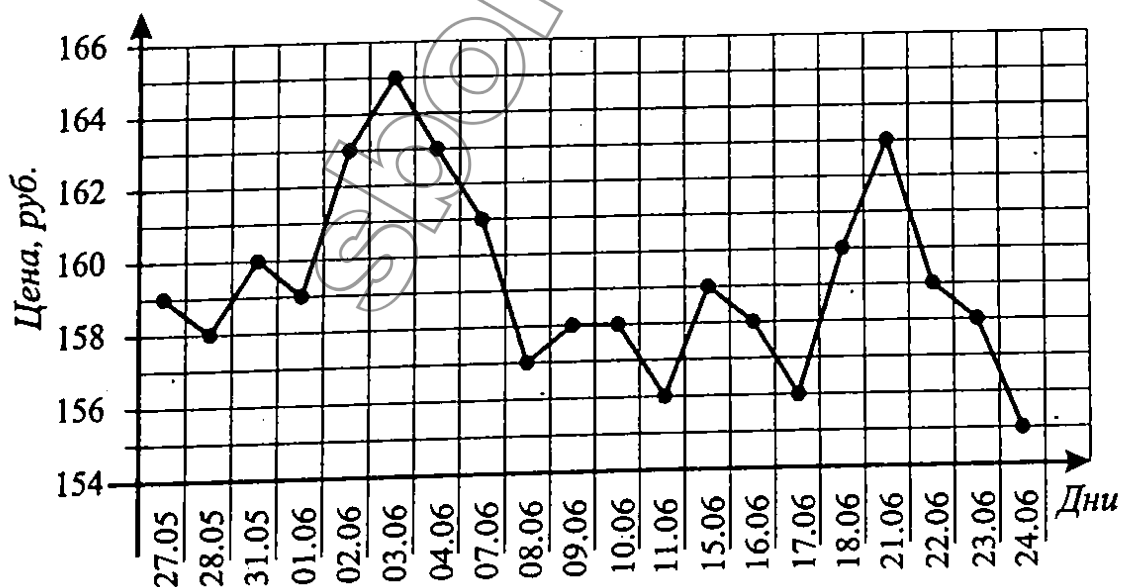


Рис. 32

4. На диаграмме (см. рис. 33) показано количество посетителей сайта «Грибная поляна» во все дни с 10 по 29 июля 2011 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, во сколько раз наибольшее количество посетителей за день больше, чем наименьшее количество посетителей.

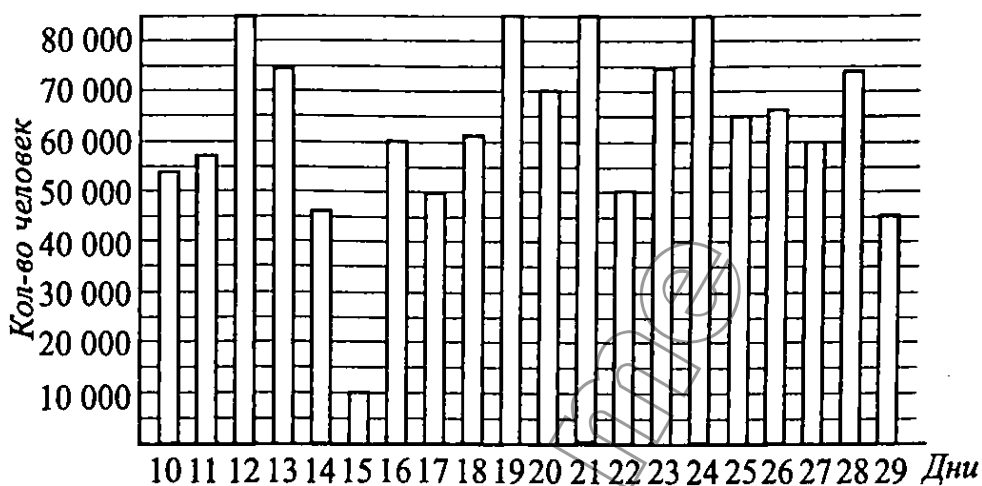


Рис. 33

5. На рисунке 34 точками показана среднесуточная температура в городе К в феврале 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — значения температуры в градусах Цельсия. Для наглядности точки соединены линией.

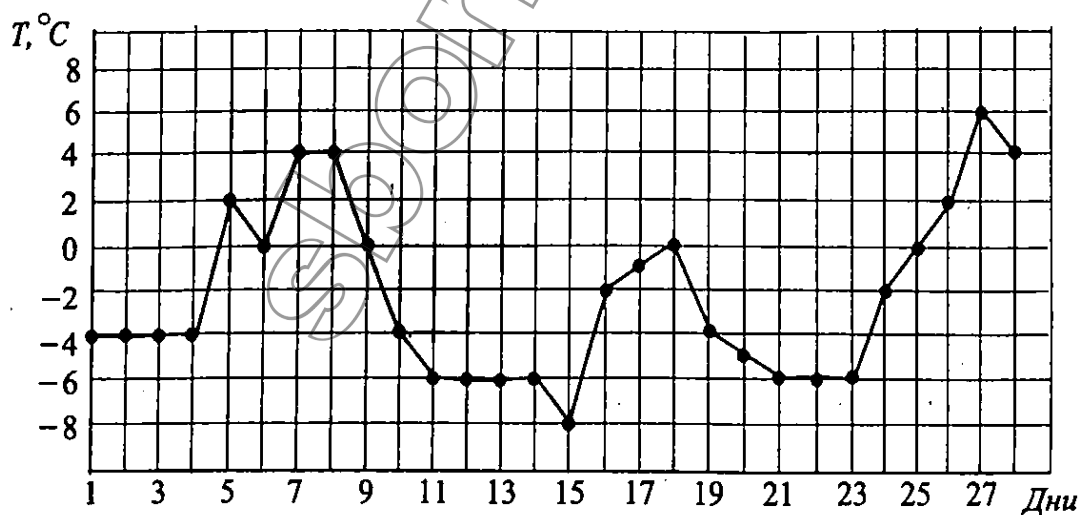


Рис. 34

Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику изменения температуры.

ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ

ХАРАКТЕРИСТИКИ

- | | |
|------------------|--|
| А) 1–7 февраля | 1) среднесуточная температура достигла месячного максимума |
| Б) 8–14 февраля | 2) среднесуточная температура достигла месячного минимума |
| В) 15–21 февраля | 3) в течение первой половины недели среднесуточная температура не изменялась |
| Г) 22–28 февраля | 4) среднесуточная температура не возрастала на протяжении всего периода |

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

Вариант 3

На рисунке 35 жирными точками показано суточное количество осадков, выпавших в городе N с 3 по 14 сентября 1980 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки соединены линией.



Рис. 35

1. Определите по рисунку 35, сколько дней из данного периода выпадало более 3 миллиметров осадков.
2. Определите по рисунку 35, какого числа выпало наибольшее количество осадков.
3. Определите по рисунку 35, сколько дней из данного периода вообще не было осадков.

4. На диаграмме (см. рис. 36) показано количество посетителей сайта «Навигация» во все дни с 10 по 29 мая 2013 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, в какой день количество посетителей сайта впервые приняло наибольшее значение.

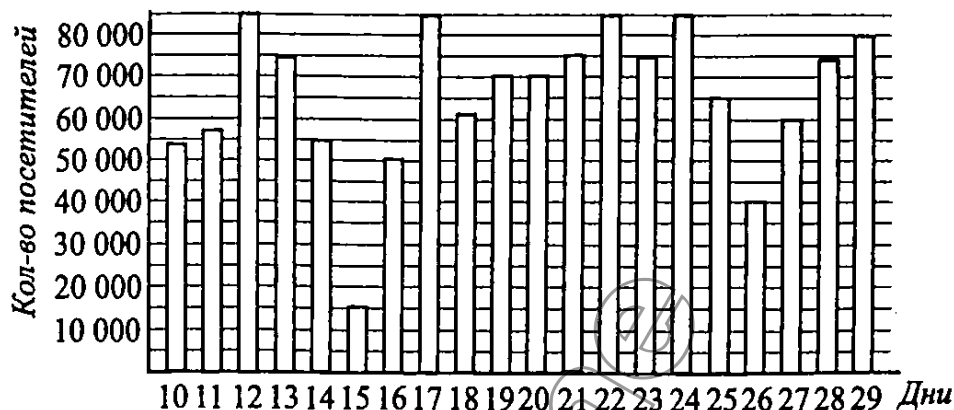


Рис. 36

5. На рисунке 37 изображена сравнительная ежемесячная рождаемость в городском роддоме в 2014 году. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество родившихся.

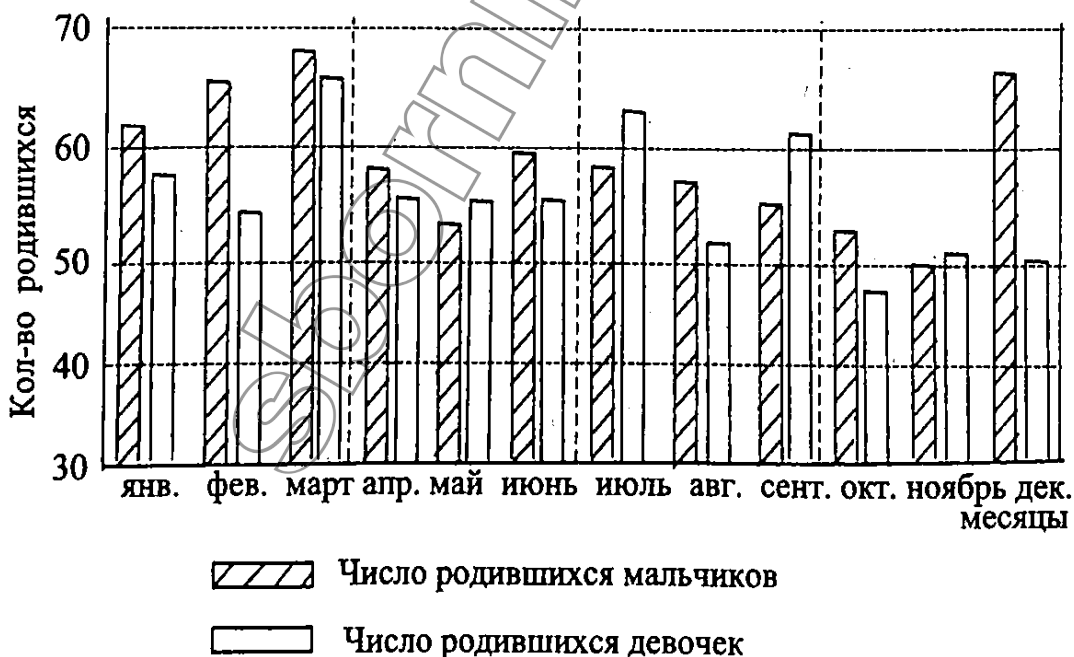


Рис. 37

Пользуясь диаграммой, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику рождаемости за этот период.

ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ

ХАРАКТЕРИСТИКИ
РОЖДАЕМОСТИ

А) 1-й квартал года

1) рождаемость девочек не изменялась в течение данного периода

Б) 2-й квартал года

2) ежемесячная рождаемость мальчиков монотонно снижалась в течение данного периода

В) 3-й квартал года

3) рождаемость девочек была наименьшей за весь год

Г) 4-й квартал года

4) в каждом месяце рождаемость мальчиков была больше рождаемости девочек

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

Вариант 4

1. На графике (см. рис. 38) показано изменение температуры воздуха в городе Долгопрудном на протяжении девяти суток, начиная с 0:00 часов 24 июня. На оси абсцисс отмечаются дни, на оси ординат — значения температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку, какой была наименьшая температура за указанный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.

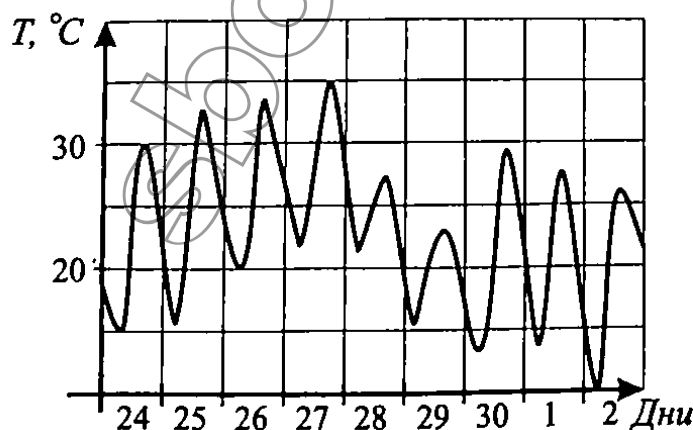


Рис. 38

2. На графике (см. рис. 39) показано изменение температуры воздуха в Архангельске на протяжении девяти суток, начиная с 0:00 часов 24 июня. На оси абсцисс отмечаются дни, на оси ординат — значения температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку, какой была разница между наибольшим и наименьшим значениями температуры за указанный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.

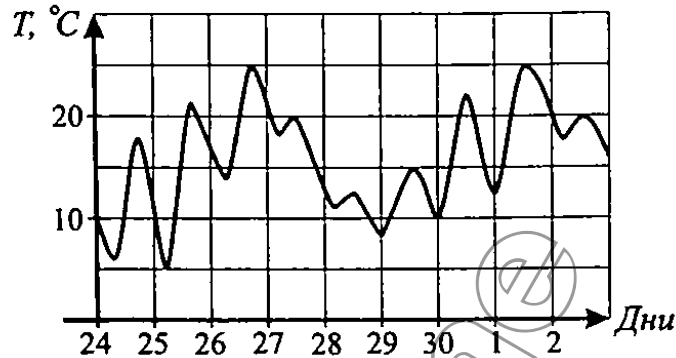


Рис. 39

3. На рисунке 40 жирными точками показана биржевая стоимость акций АвтоВАЗа с 26 мая по 25 июня 2010 года на момент закрытия биржи. На горизонтальной оси указаны даты, а на вертикальной оси — цена одной акции в рублях. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите, в какой день цена акции первый раз превысила 14 рублей. В ответе укажите число без названия месяца.

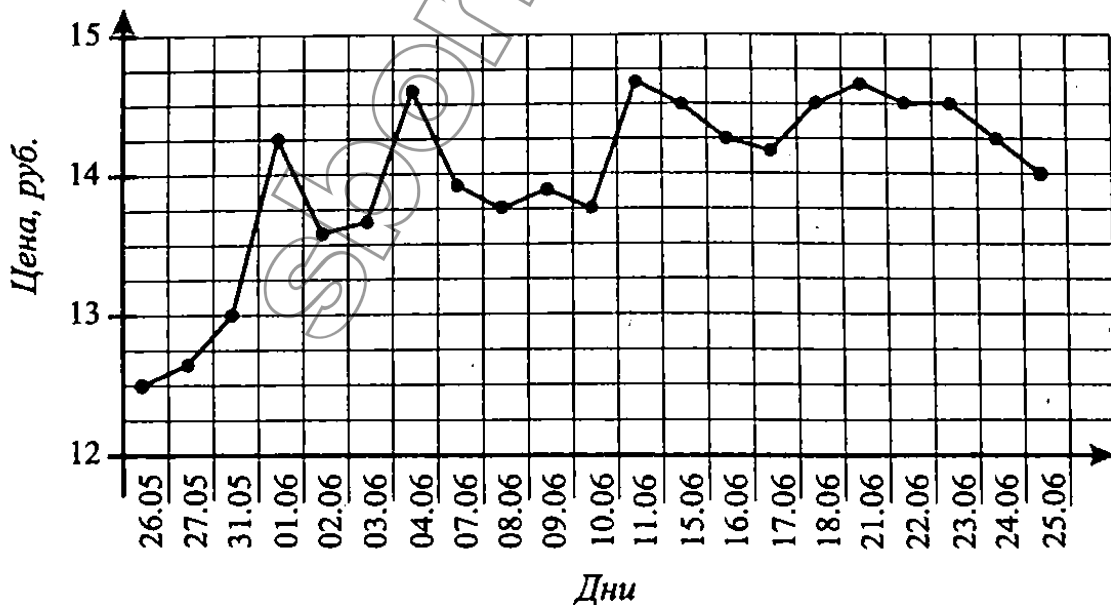


Рис. 40

4. На диаграмме (см. рис. 41) показано количество посетителей сайта «Сказки» во все дни с 10 по 28 января 2012 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, сколько раз количество посетителей сайта было более 7.

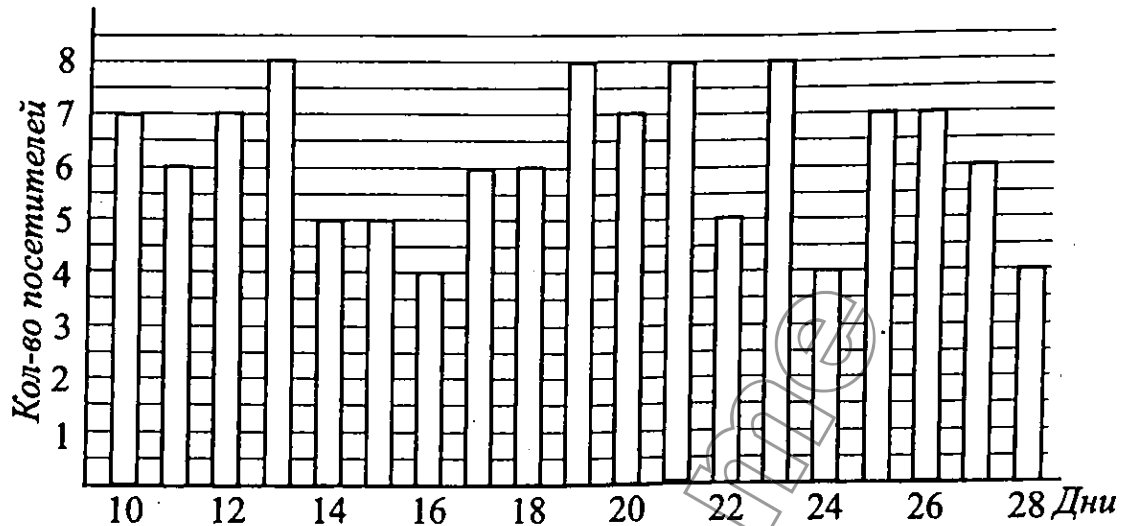


Рис. 41

5. На графике (см. рис. 42) показано изменение скорости движения автомобиля в зависимости от времени. На оси абсцисс отчается время движения в часах, на оси ординат — скорость в километрах в час.

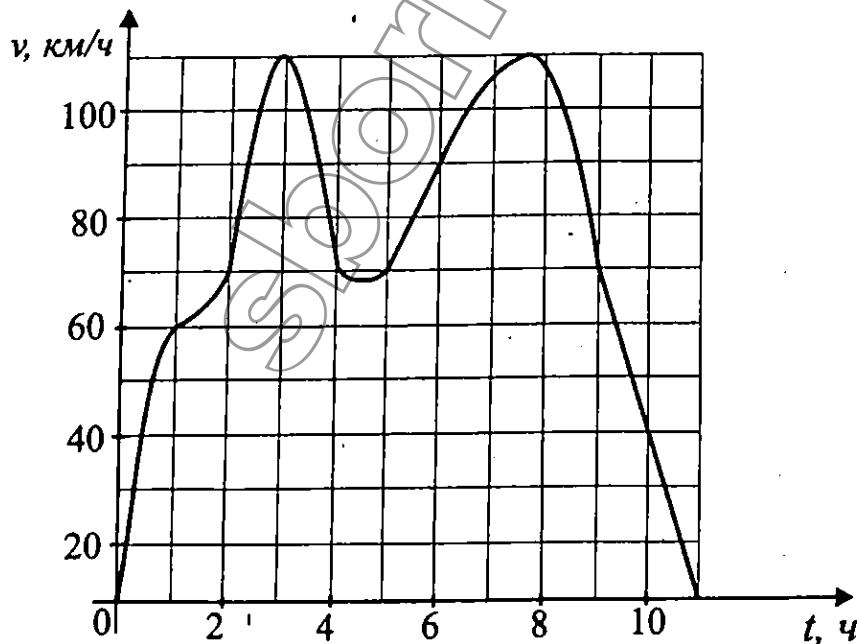


Рис. 42

Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу времени характеристику процесса на этом интервале.

ИНТЕРВАЛЫ ВРЕМЕНИ

ХАРАКТЕРИСТИКИ

А) 0–3 ч

1) скорость монотонно убывает

Б) 3–6 ч

2) скорость не меньше 90 км/ч

В) 6–8 ч

3) скорость монотонно возрастает

Г) 8–10 ч

4) в начале интервала скорость убывает, а затем возрастает

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

sbornik.me

§ 4. Выбор наилучшего варианта

Осуществление большинства проектов предполагает поиск различных вариантов их реализации и выбор наиболее оптимального из них. Например, при покупке автомобиля немаловажно предварительно изучить предложения от многих фирм и выбрать наиболее подходящие условия по цене и качеству.

145. Для остекления парника требуется заказать 20 одинаковых стёкол в одной из трёх фирм. Площадь каждого стекла $0,85 \text{ м}^2$. В таблице приведены цены на стекло и на резку стёкол.

Сколько рублей будет стоить самый дешёвый заказ?

Фирма	Цена стекла (руб. за 1 м^2)	Резка стекла (руб. за одно стекло)	Дополнительные условия
А	180	40	—
Б	200	35	—
В	220	25	При заказе на сумму больше 3500 руб. — резка бесплатно

146. Для остекления витрин требуется заказать 30 одинаковых стёкол в одной из трёх фирм. Площадь каждого стекла $0,4 \text{ м}^2$. В таблице приведены цены на стекло и на резку стёкол.

Сколько рублей будет стоить самый дешёвый заказ?

Фирма	Цена стекла (руб. за 1 м^2)	Резка стекла (руб. за одно стекло)	Дополнительные условия
А	280	21	—
Б	290	16	При заказе более 15 м^2 стекла резка — бесплатно
В	300	18	При заказе (без учёта резки) на сумму свыше 3500 руб. — резка бесплатно

147. Для того чтобы построить забор, надо приобрести 2 тонны кирпича в одной из трёх фирм. В таблице приведены цены на кирпич и доставку. Один кирпич весит 4 кг. Сколько рублей будет стоить самый дешёвый заказ?

Фирма	Цена за 1 кирпич (руб.)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
«Строитель»	17,5	1000	При покупке на сумму более 10 000 руб. — доставка бесплатно
«Атлант»	16	1500	При покупке более 400 кирпичей — доставка со скидкой 50%
«Титан»	15,5	1200	—

148. Для отделки цокольного этажа дома надо приобрести 700 кг плит в одной из трёх фирм. Одна плита весит 3,5 кг. В таблице приведены цены на плиту и доставку. Сколько рублей будет стоить самый дешёвый заказ?

Фирма	Цена за 1 плиту (руб.)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
«Строймаг»	375	2000	При покупке на сумму более 30 000 руб. — доставка бесплатно
«Леман»	365	1500	При покупке более 250 плит — доставка со скидкой 50%
«Кряж»	360	2600	—

149. Семья из трёх человек собирается ехать из Волгодонска в Москву. Можно ехать на автобусе, а можно на своей машине. Билет на автобус для одного человека стоит 1200 рублей. Автомобиль расходует 7 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 1100 км, а цена бензина равна 23,8 руб. за литр. Сколько рублей будет стоить самая дешёвая поездка для этой семьи?

150. Семья из трёх человек планирует поехать из Санкт-Петербурга в Красный Сулин. Можно ехать поездом, а можно на своей машине. Билет на поезд для одного человека стоит 1410 рублей. Автомобиль расходу-

ет 9 л бензина на 100 км, цена бензина — 27 рублей за литр, а расстояние по шоссе — 1700 км. Сколько рублей придётся заплатить за наиболее дешёвую поездку на троих?

151. Семья из трёх человек планирует поехать из Волгограда в Москву. Можно ехать поездом, а можно на своей машине. Билет на поезд для одного человека стоит 1320 рублей. Автомобиль расходует 8 л бензина на 100 км, расстояние по шоссе равно 900 км, а цена бензина — 29,5 рубля за литр. Сколько рублей придётся заплатить за наиболее дешёвую поездку на троих?

152. Индивидуальный предприниматель планирует поехать из Ростова-на-Дону в Хабаровск. Можно ехать поездом, а можно на своей машине. Билет на поезд в купе для одного человека стоит 23 100 рублей. Автомобиль расходует 8 л бензина на 100 км, цена бензина — 32 рубля за литр, а расстояние по шоссе — 8800 км. Сколько рублей придётся заплатить за наиболее дешёвую поездку?

153. Для строительства дачного домика можно использовать один из двух типов стен: кирпичные или стены из керамзитоблоков. Для возведения стен из керамзитоблоков необходимо 520 керамзитоблоков и 3 мешка цемента. Для кирпичных стен необходимо 2500 кирпичей и 7 мешков цемента. Один керамзитоблок стоит 40 рублей, кирпич стоит 8 рублей за штуку, а мешок цемента стоит 180 рублей. Сколько рублей будет стоить материал, если выбрать наиболее дешёвый вариант?

154. Для строительства гаража можно использовать один из двух типов фундамента: бетонный или фундамент из пеноблоков. Для фундамента из пеноблоков необходимо 4,5 кубометра пеноблоков и 2 мешка цемента. Для бетонного фундамента необходимо 3 тонны щебня и 30 мешков цемента. Кубометр пеноблока стоит 2100 рублей, щебень стоит 750 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 250 рублей. Сколько рублей будет стоить материал, если выбрать наиболее дешёвый вариант?

155. Для подготовки к школе ученику первого класса в первую очередь нужно приобрести комплект учебников с рабочими тетрадями, пенал с канцелярскими принадлежностями, портфель. В трёх торговых центрах маме предложили различные наборы (см. таблицу на с. 58), она выбрала самый дешёвый вариант. Какую сумму (в рублях) заплатила мама, чтобы приобрести портфель, пенал, учебники?

Торговый центр	Стоимость комплекта учебников (руб.)	Стоимость штрафа (руб.)	Стоимость портфеля (руб.)	Дополнительные условия
А	2150	45	850	—
Б	2300	60	650	—
В	2500	55	700	При покупке на сумму свыше 3000 рублей скидка 400 руб.

156. Для подготовки к школе ученику первого класса в первую очередь нужно приобрести комплект учебников с рабочими тетрадами, пенал с канцелярскими принадлежностями, портфель. В трёх торговых центрах маме предложили различные наборы (см. таблицу), она выбрала самый дешёвый вариант. Какую сумму (в рублях) заплатила мама, чтобы приобрести портфель, пенал, учебники?

Торговый центр	Стоимость комплекта учебников (руб.)	Стоимость штрафа (руб.)	Стоимость портфеля (руб.)	Дополнительные условия
А	2150	40	800	—
Б	2300	65	750	—
В	2500	60	740	При покупке на сумму свыше 3000 рублей скидка 350 руб.

157. Из пункта А в пункт С ведут три дороги. Через пункт D едет грузовик со средней скоростью 40 км/ч, через пункт В едет легковой автомобиль со средней скоростью 70 км/ч. Через пункт E движется автобус со средней скоростью 48 км/ч. На рисунке 43 показана схема дорог и указано расстояние между пунктами по дорогам. Все три автомобиля одновременно выехали из пункта А. Какой автомобиль добрался до пункта С позже других? В ответе укажите, сколько часов он находился в дороге.

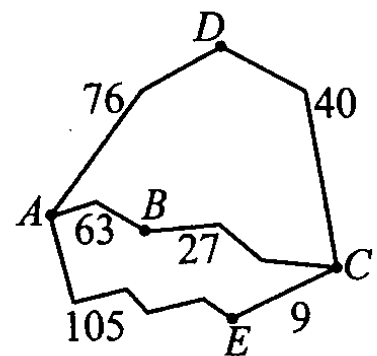


Рис. 43

158. Из пункта A в пункт B ведут три дороги (см. рис. 44), расстояния указаны в километрах. Через пункт C едет автобус со средней скоростью 65 км/ч, через пункт D едет грузовик со средней скоростью 60 км/ч, и по третьей дороге без промежуточных пунктов едет легковой автомобиль со средней скоростью 80 км/ч. Все три автомашины выехали из пункта A одновременно. Найдите время в пути (в часах) автомашины, пришедшей позже всех.

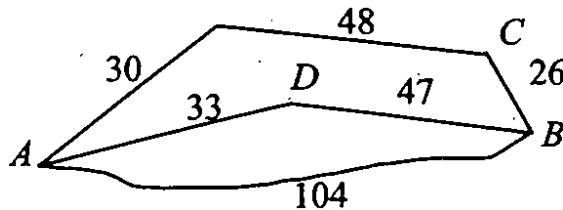


Рис. 44

159. Из пункта A в пункт D ведут три дороги. На рисунке 45 показана схема дорог и расстояние (в км) между пунктами по дорогам. Через пункт B идёт грузовик со средней скоростью 26 км/ч. Через пункт C идёт легковой автомобиль со средней скоростью 60 км/ч. Третья дорога не имеет промежуточных пунктов, и по ней движется автобус со средней скоростью 45 км/ч. Все три транспортных средства выехали из A одновременно. Какое из них доберётся до D позже других? В ответе укажите, сколько часов оно находилось в дороге.

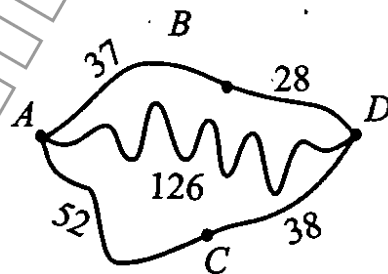


Рис. 45

160. Из пункта A в пункт B ведут три дороги (см. рис. 46), расстояния указаны в километрах. Через пункт C едет автобус со средней скоростью 50 км/ч, через пункт D едет грузовик со средней скоростью 60 км/ч, а по третьей дороге без промежуточных пунктов едет легковой автомобиль со средней скоростью 45 км/ч. Все три автомашины выехали из пункта A одновременно. Найдите время в пути (в часах) автомашины, пришедшей позже всех.

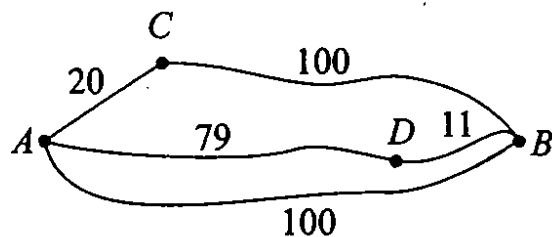


Рис. 46

161. Предполагается поездка длительностью 45 минут. В таблице приведены тарифы на услуги трёх фирм такси. Клиенту нужно выбрать фирму, в которой заказ будет стоить дешевле всего. Сколько рублей будет стоить этот заказ?

Фирма такси	Подача машины (в руб.)	Продолжительность и стоимость минимальной поездки	Стоимость 1 минуты сверх продолжительности минимальной поездки (в руб.)
А	50	Нет	3
В	30	20 мин — 50 руб.	6
С	Бесплатно	10 мин — 60 руб.	4

162. В таблице приведены тарифы на услуги трёх фирм такси. Предполагается поездка длительностью 45 минут. Нужно выбрать фирму, в которой заказ будет стоить дешевле всего. Сколько рублей будет стоить этот заказ?

Фирма такси	Подача машины (в руб.)	Продолжительность и стоимость минимальной поездки	Стоимость 1 минуты сверх продолжительности минимальной поездки (в руб.)
А	50	15 мин — 150 руб.	17
В	70	Нет	15
С	Бесплатно	10 мин — 120 руб.	18

163. В таблице приведены тарифы на услуги трёх фирм такси. Предполагается поездка длительностью 50 минут. Нужно выбрать фирму, в которой заказ будет стоить дешевле всего. Сколько рублей будет стоить этот заказ?

Фирма такси	Подача машины (в руб.)	Продолжительность и стоимость минимальной поездки	Стоимость 1 минуты сверх продолжительности минимальной поездки (в руб.)
«Рассвет»	60	Нет	4
«Сказка»	40	20 мин — 60 руб.	5
«Корсар»	Бесплатно	15 мин — 50 руб.	6

164. В таблице приведены тарифы на услуги трёх фирм такси. Предполагается поездка длительностью 55 минут. Нужно выбрать фирму, в которой заказ будет стоить дешевле всего. Сколько рублей будет стоить этот заказ?

Фирма такси	Подача машины (в руб.)	Продолжительность и стоимость минимальной поездки	Стоимость 1 минуты сверх продолжительности минимальной поездки (в руб.)
«Пуля»	80	20 мин — 100 руб.	9
«Вихрь»	Бесплатно	20 мин — 300 руб.	13
«Форсаж»	90	Нет	9

165. Своему клиенту компания сотовой связи решила предоставить на выбор одну из скидок: либо скидку 30% на звонки абонентам других сотовых компаний в своём регионе, либо скидку 15% на звонки абонентам стационарных телефонов, либо 25% на услуги мобильного Интернета. Клиент посмотрел распечатку своих звонков и выяснил, что за месяц он потратил 200 рублей на звонки абонентам других компаний в своём регионе, 300 рублей на звонки абонентам стационарных телефонов и 260 рублей на мобильный Интернет. Клиент предполагает, что в следующем месяце затраты будут такими же, и, исходя из этого, выбирает наиболее выгодную для себя скидку. Какую скидку выгоднее выбрать? В ответе укажите, сколько рублей составит эта скидка.

166. Своему постоянному клиенту компания сотовой связи решила предоставить на выбор одну из скидок: либо скидку 20% на звонки абонентам других сотовых компаний в своём регионе, либо скидку 10% на звонки в другие регионы, либо 30% на услуги мобильного Интернета. Клиент посмотрел распечатку расходов за прошлый месяц и выяснил, что он потратил 190 рублей на звонки абонентам других компаний в своём регионе, 160 рублей на звонки в другие регионы и 120 рублей на мобильный Интернет. Клиент предполагает, что в следующем месяце затраты будут такими же (без учёта скидки), и, исходя из этого, выбирает наиболее выгодную для себя скидку. Какую скидку следует выбрать? В ответе укажите, сколько рублей составит эта скидка, если клиент будет пользоваться всеми услугами в том же объёме.

167. Своему постоянному клиенту компания сотовой связи решила предоставить на выбор одну из скидок: либо скидку 30% на звонки абонентам других сотовых компаний в своём регионе, либо скидку 10% на звонки

в другие регионы, либо скидку 20% на услуги мобильного Интернета. Клиент проанализировал распечатку своих звонков и выяснил, что за месяц он потратил 400 рублей на звонки абонентам других компаний в своём регионе, 600 рублей на звонки в другие регионы и 500 рублей на мобильный Интернет. Клиент предполагает, что в следующем месяце затраты будут такими же, и, исходя из этого, выбирает наиболее выгодную для себя скидку. Сколько рублей составит эта скидка, если звонки и пользование Интернетом сохранятся в прежнем объёме?

168. Своему постоянному клиенту компания сотовой связи решила предоставить на выбор одну из скидок: либо скидку 30% на звонки абонентам других сотовых компаний в своём регионе, либо скидку 20% на звонки в другие регионы, либо скидку 35% на услуги мобильного Интернета. Клиент проанализировал распечатку своих звонков и выяснил, что за месяц он потратил 300 рублей на звонки абонентам других компаний в своём регионе, 400 рублей на звонки в другие регионы и 300 рублей на мобильный Интернет. Клиент предполагает, что в следующем месяце затраты будут такими же, и, исходя из этого, выбирает наиболее выгодную для себя скидку. Сколько рублей составит эта скидка, если звонки и пользование Интернетом сохранятся в прежнем объёме?

169. Независимое агентство каждый месяц определяет рейтинги R новостных сайтов на основе показателей информативности In , оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый отдельный показатель оценивается целыми числами от -4 до 4 . Итоговый рейтинг вычисляется по формуле $R = \left(\frac{2In + 2Op + 4Tr}{12} + 2 \right) \cdot 25$. В таблице даны оценки каждого показателя для нескольких новостных сайтов. Найдите наибольший рейтинг среди сайтов, представленных в таблице. Ответ округлите до целого числа.

Сайт	Информативность	Оперативность	Объективность
myvrem.ru	-4	4	-4
roveru.com	0	-1	3
ogol23.ru	1	1	1
gorod17.ru	-2	4	0

170. Независимое агентство каждый месяц определяет рейтинг новостных сайтов на основе показателей информативности In , оперативности Op и объективности Tr публикаций. Рейтинг вычисляется по формуле

$$R = 25 \left(\frac{2In + Op + 3Tr}{6} + 2 \right).$$

В таблице даны показатели четырёх новостных сайтов. Найдите наивысший рейтинг новостного сайта из представленных в таблице.

Сайт	Информативность	Оперативность	Объективность
А	1	-2	0
Б	-2	1	1
В	2	1	0
Г	1	1	1

171. Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного $0,005$ средней цены P , показателей функциональности F , качества Q и дизайна D . Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 6 . Итоговый рейтинг вычисляется по формуле $R = 2(2F + 3Q + 2D) - 0,005P$. В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей кухонных воздухоочистителей. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице кухонных воздухоочистителей.

Модель воздухоочистителя	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	5200	3	4	4
Б	5400	3	3	6
В	8800	6	6	3
Г	6000	3	3	4

172. Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного $0,01$ средней цены P (в рублях), а также показателей функциональности F , качества Q и дизайна D . Рейтинг вычисляется по формуле $R = 4(2F + 2Q + D) - 0,01P$.

В таблице даны цены и показатели четырёх моделей пароварок. Найдите наивысший рейтинг пароварки из представленных в таблице моделей.

Модель пароварки	Цена пароварки (руб. за шт.)	Функциональность	Качество	Дизайн
А	890	2	1	1
Б	1469	4	3	2
В	1789	4	4	4
Г	1564	2	1	4

173. В таблице приведены условия банковского вклада в трёх различных банках. Предполагается, что клиент кладёт на счёт 10 000 рублей на срок 1 год. В каком банке к концу года вклад окажется наибольшим? В ответе укажите сумму этого вклада в рублях.

Банк	Обслуживание счёта*	Процентная ставка (% годовых)**
А	120 руб. в год	8
В	15 руб. в месяц	8,5
С	Бесплатно	7,5

* В начале года или месяца со счёта снимается указанная сумма в уплату за ведение счёта.

** В конце года вклад увеличивается на указанное количество процентов.

174. В таблице даны условия банковского вклада в трёх различных банках.

Банк	Обслуживание счёта*	Процентная ставка (% годовых)**
А	400 руб. в год	4
Б	20 руб. в месяц	3,5
В	Бесплатно	2

* В начале года или месяца со счёта снимается указанная сумма в уплату за ведение счёта.

** В конце года вклад увеличивается на указанное количество процентов.

Предполагается, что клиент кладёт на счёт 20 000 рублей сроком на 1 год. В каком банке к концу года вклад окажется наибольшим? В ответе укажите сумму этого вклада в рублях.

175. В таблице даны условия банковского вклада в трёх различных банках. Предполагается, что клиент кладёт на счёт 20 000 рублей на срок 1 год. В каком банке к концу года вклад окажется наибольшим? В ответе укажите сумму этого вклада в рублях.

Банк	Обслуживание счёта*	Процентная ставка (% годовых)**
А	100 руб. в год	3
Б	15 руб. в месяц	5
В	Бесплатно	2

* В начале года или месяца со счёта снимается указанная сумма в уплату за ведение счёта.

** В конце года вклад увеличивается на указанное количество процентов.

176. В таблице даны условия банковского вклада в трёх различных банках. Предполагается, что клиент кладёт на счёт 200 000 рублей на срок 1 год. В каком банке к концу года вклад окажется наибольшим? В ответе укажите сумму этого вклада в рублях.

Банк	Обслуживание счёта*	Процентная ставка (% годовых)**
А	7000 руб. в год	6
Б	700 руб. в месяц	7
В	Бесплатно	2,6

* В начале года или месяца со счёта снимается указанная сумма в уплату за ведение счёта.

** В конце года вклад увеличивается на указанное количество процентов.

177. В среднем Иван Семёнович в дневное время расходует 110 кВт·ч электроэнергии в месяц, а в ночное время — 135 кВт·ч электроэнергии. Раньше у Ивана Семёновича в квартире был установлен одностарифный счётчик, и всю электроэнергию он оплачивал по тарифу 3,23 руб. за кВт·ч. Год назад Иван Семёнович установил двухтарифный счётчик, при этом дневной расход электроэнергии оплачивается по тарифу 3,43 руб. за кВт·ч, а ночной расход оплачивается по тарифу 2,68 руб. за кВт·ч. В течение 12 месяцев режим потребления и тарифы оплаты электроэнергии не менялись. Насколько больше заплатил бы Иван Семёнович за этот период, если бы не поменял счётчик? Ответ дайте в рублях.

178. В среднем Дмитрий Юрьевич в дневное время расходует 150 кВт·ч электроэнергии в месяц, а в ночное время — 70 кВт·ч. Раньше у Дмитрия Юрьевича в квартире был установлен одностарифный счётчик, и всю электроэнергию он оплачивал по тарифу 2,80 руб. за кВт·ч. Год назад Дмитрий Юрьевич установил двухтарифный счётчик, при этом дневной расход электроэнергии оплачивается по тарифу 2,80 руб. за кВт·ч, а ночной расход оплачивается по тарифу 1,10 руб. за кВт·ч. В течение 12 месяцев режим потребления и тарифы оплаты электроэнергии не менялись. Насколько больше заплатил бы Дмитрий Юрьевич за этот период, если бы не поменял счётчик? Ответ дайте в рублях.

179. В позапрошлом году Сергей пользовался горячей водой без счётчика учёта её потребления и платил 420 рублей ежемесячно. В прошлом году он решил поставить счётчик и результаты учёта в м³ записывал в таблицу.

Месяцы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Расход воды(м ³)	4	3	3	2	2	1	1	2	2	3	3	4

Сколько рублей за прошлый год сэкономил Сергей, если стоимость 1 м³ горячей воды равна 140 рублей?

180. В позапрошлом году Артём пользовался тёплой водой без счётчика учёта её потребления и платил 380 рублей ежемесячно. В прошлом году он решил поставить счётчик и результаты учёта в м³ записывал в таблицу.

Месяцы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Расход воды(м ³)	3	3	3	2	2	1	1	2	2	3	3	3

Сколько рублей за прошлый год сэкономил Артём, если стоимость 1 м³ тёплой воды равна 125 рублей?

181. В таблице даны результаты олимпиад по физике и химии, прошедших в 9 «В» классе.

Номер учащегося	Балл по физике	Балл по химии
1	58	63
2	74	48
3	42	88
4	58	68
5	62	84
6	41	54
7	46	70
8	62	63
9	93	19

Похвальные грамоты дают тем школьникам, у кого суммарный балл по двум олимпиадам больше 125 или хотя бы по одному предмету набрано не меньше 70 баллов.

Какие учащиеся 9 «В» не набрали 70 баллов по химии и получили похвальные грамоты? Укажите соответствующие номера без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

182. В таблице даны результаты олимпиад по истории и граждановедению, прошедших в 7 «Е» классе.

Номер учащегося	Балл по истории	Балл по граждановедению
1	61	68
2	71	59
3	51	89
4	70	63
5	64	65
6	59	67
7	68	58
8	48	77
9	65	74

Похвальные грамоты дают тем школьникам, у кого суммарный балл по двум олимпиадам больше 130 или хотя бы по одному предмету набрано не меньше 69 баллов.

Какие учащиеся 7 «Е» не набрали 69 баллов по истории и получили похвальные грамоты? Укажите соответствующие номера без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

183. Расписание поездов «Ростов-на-Дону — Волгоград» и стоимость билетов представлены в таблице.

Номер поезда	Время отправления	Время прибытия (на следующие сутки)	Стоимость билета (в рублях)
1	19:00	05:40	1240
2	19:20	05:45	1200
3	19:25	05:35	1320
4	19:43	07:32	1200
5	20:58	07:40	1350
6	21:10	07:35	1200
7	22:05	08:12	1400
8	23:10	09:15	1250

Георгию Климовичу нужно добраться из Ростова-на-Дону в Волгоград поездом. При этом ему необходимо приехать в Волгоград не раньше

07:30, в пути провести не более 11 часов и заплатить за билет не больше 1300 рублей.

В ответе укажите какой-нибудь один подходящий номер поезда.

184. Расписание поездов «Ростов-на-Дону — Адлер» и стоимость билетов представлены в таблице.

Номер поезда	Время отправления	Время прибытия (на следующие сутки)	Стоимость билета (в рублях)
1	18:00	06:40	1050
2	19:30	07:10	1290
3	20:15	07:50	1310
4	22:10	08:15	1250
5	22:30	08:50	1270
6	22:50	09:30	1200
7	23:05	10:00	1310
8	23:44	10:42	1200

Игорю Ивановичу нужно добраться из Ростова-на-Дону в Адлер поездом. При этом ему необходимо приехать в Адлер не позже 09:00, в пути провести не более 10 часов 50 минут и заплатить за билет не больше 1300 рублей.

В ответе укажите какой-нибудь один подходящий номер поезда.

185. В таблице представлены сведения о шести видах натурального мультифруктового сока, продающегося в специализированном магазине.

Номер сока	Состав	Тип	Стоимость (в рублях)
1	Апельсин, лимон, манго, банан	Импортный	310
2	Апельсин, манго, киви	Импортный	180
3	Виноград, яблоко, лимон	Отечественный	230
4	Яблоко, слива, абрикос	Отечественный	120
5	Апельсин, гуава, киви, лайм	Импортный	200
6	Апельсин, манго, гуава	Импортный	380

Алевтине нужно купить три разные упаковки сока так, чтобы среди них была хотя бы одна упаковка с отечественным соком, хотя бы одна с импортным, хотя бы одна содержала лимон. Какие соки должна купить Алевтина, если она рассчитывает потратить на всё не более 600 рублей?

В ответе укажите какой-то один набор номеров соков без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

186. В городе Новокамьшовске имеется пять музеев: архитектурный, литературный, краеведческий, музей изобразительных искусств и музей естественных наук. В кассах продаётся шесть видов билетов, каждый из которых позволяет посетить один или два музея. Сведения о стоимости билетов представлены в таблице.

Номер билета	Музеи для посещения	Стоимость (в рублях)
1	Архитектурный	120
2	Литературный	90
3	Краеведческий и естественных наук	170
4	Архитектурный и изобразительных искусств	250
5	Изобразительных искусств и литературный	200
6	Краеведческий и архитектурный	190

Какие билеты должна купить Анастасия Филипповна, чтобы посетить все пять музеев и затратить наименьшую сумму? В ответе укажите какой-то один набор номеров билетов без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

187. В кинотеатре показывают пять кинофильмов, при этом проводится необычная акция: в кассах продаётся шесть видов билетов, каждый из которых позволяет посетить один или два фильма. Сведения о стоимости билетов представлены в таблице.

Вид билета	Кинофильмы	Стоимость (в рублях)
1	Фильм А	220
2	Фильм В	190
3	Фильм А и фильм D	400
4	Фильм В и фильм С	420
5	Фильм С и фильм D	490
6	Фильм В и фильм E	500

Какие билеты должна купить Маша, чтобы посетить все пять фильмов и потратить наименьшую сумму?

В ответе укажите какой-то один набор номеров билетов без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

188. В кинотеатре показывают пять кинофильмов, при этом проводится необычная акция: в кассах продаётся шесть видов билетов, каждый из которых позволяет посетить один или два фильма. Сведения о стоимости билетов представлены в таблице.

Вид билета	Кинофильмы	Стоимость (в рублях)
1	Фильм I	200
2	Фильм II	180
3	Фильм I и фильм IV	420
4	Фильм II и фильм III	410
5	Фильм III и фильм IV	480
6	Фильм II и фильм V	500

Какие билеты должна купить Даша, чтобы посетить все пять фильмов и потратить наименьшую сумму?

В ответе укажите какой-то один набор номеров билетов без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Задания для контроля

Вариант 1

1. Для проведения детского праздника нужно заказать 72 одинаковых подарка с конфетами в одной из трёх фирм. В каждом подарке 2 кг конфет. В таблице приведены цены на конфеты, а также на подарочные упаковки. Сколько рублей будет стоить самый дешёвый заказ?

Фирма	Цена конфет (руб. за 1 кг)	Цена упаковки (руб. за один подарок)
А	150	45
Б	155	30
В	165	20

2. Чтобы перевезти 70 легковых автомобилей на 1100 км, можно воспользоваться услугами одной из трёх транспортных компаний. Стоимость перевозки и вместимость грузовиков для каждой компании указаны в таблице. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую перевозку?

Компания	Стоимость перевозки одним грузовиком (руб. на 50 км)	Количество автомобилей в одном грузовике
А	833	6
Б	1630	12
В	2380	18

3. Оператор сотовой связи предлагает три тарифных плана. В таблице для каждого тарифного плана указаны месячная абонентская плата, включённое в тариф время разговора и цена каждой минуты сверх включённого времени.

Тарифный план	Абонентская плата	Цена каждой минуты сверх включённого времени
Тариф «200»	300 руб. за 200 мин в месяц	2 руб. за 1 мин сверх 200 мин
Тариф «400»	550 руб. за 400 мин в месяц	1,5 руб. за 1 мин сверх 400 мин
Тариф «600»	850 руб. за 600 мин в месяц	1 руб. за 1 мин сверх 600 мин

Абонент предполагает, что его телефонные разговоры составят 500 минут в месяц и исходя из этого выбирает наиболее дешёвый тарифный план. Сколько рублей заплатит пользователь за месяц, выбрав самый дешёвый тарифный план?

4. В качестве новогоднего подарка оператор сотовой связи предлагает своим пользователям на выбор одну из трёх скидок: 35% на звонки внутри сети, 25% на звонки абонентам других компаний или 30% на отправку текстовых сообщений. Клиент тратит в месяц 150 рублей на звонки внутри сети, 250 рублей на звонки абонентам других компаний и 200 рублей на отправку текстовых сообщений. Какую скидку нужно выбрать клиенту, чтобы получить наибольшую выгоду? В ответе запишите, сколько рублей составит эта скидка.

5. Расписание поездов «Город N — Город K» и стоимость билетов представлены в таблице.

Номер поезда	Время отправления	Время прибытия (на следующие сутки)	Стоимость билета (в рублях)
1	21:00	03:20	1120
2	21:30	04:55	980
3	21:50	05:20	2350
4	22:20	05:35	860
5	23:00	05:50	1210
6	23:20	06:15	1150
7	23:35	06:20	1000
8	23:50	07:00	950

Наталье Анатольевне нужно добраться из города N в город K поездом. При этом ей необходимо приехать в город K не раньше 05:30, в пути провести не более 7 часов и заплатить за билет не больше 1100 рублей.

В ответе укажите какой-нибудь один подходящий номер поезда.

Вариант 2

1. Клиент кладёт на банковский счёт 30 000 рублей на срок 1 год. Какой вклад он должен выбрать, чтобы к концу этого срока получить на счету наибольшую сумму? В ответе укажите сумму этого вклада в рублях.

Вклад	Обслуживание счёта*	Процентная ставка (% годовых)**
А	400 руб. в год	3
Б	80 руб. в месяц	4,5
В	Бесплатно	2

* В начале года или месяца со счёта снимается указанная сумма в уплату за ведение счёта.

** В конце года вклад увеличивается на указанное количество процентов.

2. Спортивный центр предлагает своим посетителям три программы занятий.

Программа	Плата в месяц	Стоимость дополнительных занятий
«Первая»	нет	400 руб. за занятие
«Вторая»	4300 руб. в месяц за 12 занятий	400 руб. за каждое занятие сверх 12
«Третья»	7900 руб. в месяц за 24 занятия	400 руб. за каждое занятие сверх 24

Клиент желает посетить в спортивном центре 16 занятий в месяц и исходя из этого выбирает наиболее дешёвую программу. Сколько рублей заплатит клиент за месяц?

3. Для съёмок исторического фильма нужно заказать 26 комплектов кожаной брони в одной из трёх фирм. На каждый комплект расходуется $2,5 \text{ м}^2$ кожи. В таблице приведена цена кожи, а также пошива брони. Сколько рублей будет стоить самый дешёвый заказ?

Фирма	Цена кожи (руб. за 1 м^2)	Цена пошива (руб. за один комплект)
А	300	3200
Б	320	3000
В	350	2800

4. Чтобы перевезти 315 человек на 250 км, можно воспользоваться предложением одной из трёх туристических фирм. Стоимость перевозки и количество мест в автобусах для каждой фирмы указаны в таблице. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую перевозку?

Фирма	Стоимость перевозки одним автобусом (руб. на 100 км)	Количество мест
А	1280	43
Б	2030	68
В	2050	73

5. Покупатель планирует приобрести необходимые предметы посуды в магазине. Сведения о ценах на некоторые товары представлены в таблице.

Номер товара	Товар	Стоимость (рублей)
1	Тарелка	50
2	Миска	70
3	Миска, чашка	120
4	Тарелка, миска	110
5	Ложка	30
6	Тарелка, чашка	95

Пользуясь таблицей, подберите комплект покупок так, чтобы покупатель купил четыре предмета: тарелку, миску, чашку и ложку, а суммарная стоимость была меньше 200 рублей. В ответе для собранного комплекта укажите номера товаров без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Вариант 3

1. Для кровельных работ можно использовать один из двух видов материалов: металлочерепицу или мягкую черепицу. Для первого вида работ понадобится 60 м^2 металлочерепицы и 10 кг крепежа. Для второго — 40 м^2 мягкой черепицы и 7 кг крепежа. Квадратный метр металлочерепицы стоит 220 рублей, квадратный метр мягкой черепицы стоит 380 рублей, 1 кг крепежа стоит 40 рублей. Сколько рублей нужно будет затратить на приобретение материалов, если выбрать наиболее дешёвый вариант?

2. Для отделки фонтана управление по благоустройству города должно заказать 60 мраморных плит одной из трёх фирм. Площадь каждой плиты составляет $0,35 \text{ м}^2$. Цена материала, а также стоимость резки указаны в таблице. Сколько будет стоить заказ, если выбрать самый дешёвый вариант?

Фирма	Цена мрамора (руб. за 1 м^2)	Резка мрамора (руб. за одну плиту)	Дополнительные условия
А	4200	150	—
Б	4700	120	—
В	5200	80	При заказе на сумму более 100 000 руб. резка бесплатно

3. Компания из четырёх человек едет из Москвы в Новосибирск. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Один билет на поезд стоит 1300 рублей. Автомобиль расходует 9 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 3200 км, а цена бензина равна 19 руб. за литр. Сколько рублей будет стоить самая дешёвая поездка для этой компании?

4. Строительной фирме нужно приобрести 2650 килограммов листовой стали у одного из трёх поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой?

Поставщик	Стоимость стали (руб. за тонну)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	25 600	3400	—
Б	23 700	6500	При заказе на сумму более 75 000 руб. доставка бесплатно
В	24 600	4500	При заказе более 2,5 тонн доставка бесплатно

5. В таблице представлены сведения о видах пиццы в интернет-магазине.

Номер пиццы	Состав пиццы	Вид	Стоимость (в рублях)
1	Зелень, оливки, сыр	Вегетарианская	280
2	Говядина, свинина, сыр	Мясная	560
3	Сыр, свинина, оливки	Мясная	380
4	Сыр, овощи	Вегетарианская	390
5	Курица, грибы, перец	Мясная	400
6	Ветчина, сыр	Мясная	520

Игорю нужно купить три разные пиццы так, чтобы среди них была хотя бы одна с грибами, хотя бы одна вегетарианская и хотя бы одна мясная. Какие пиццы может купить Игорь, если он рассчитывает потратить на всё не более 1100 рублей? В ответе укажите какой-то один набор номеров пиццы без пробелов и дополнительных символов.

Вариант 4

1. Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного $0,02$ средней цены C , показателей функциональности P , качества K и дизайна D . Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле $R = 3(3P + 4K + 2D) - 0,02C$.

В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей электрических чайников. Определите наивысший рейтинг среди представленных в таблице моделей электрических чайников.

Модель чайника	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	2900	2	1	2
Б	4500	3	3	4
В	3100	4	2	4
Г	3200	2	4	3

2. Для перевозки 65 тонн груза на 1800 км можно использовать одну из трёх компаний. Стоимость перевозки и грузоподъёмность автомобилей для каждой компании указаны в таблице. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую перевозку?

Компания	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 100 км)	Грузоподъёмность одного автомобиля (тонн)
А	4200	4
Б	6100	6
В	11 600	12

3. В магазине одежды объявлена акция: если покупатель приобретает товар на сумму свыше 15 000 руб., он получает скидку на следующую покупку в размере 5%. Если покупатель участвует в акции, он теряет право возвратить товар в магазин. Покупатель Н. хочет приобрести кондиционер ценой 9900 руб., соковыжималку ценой 5800 руб. и кулер ценой 5200 руб.

В каком случае Н. заплатит за покупку меньше всего?

- 1) Н. купит все три товара сразу.
- 2) Н. купит сначала кондиционер и соковыжималку, а потом кулер со скидкой.
- 3) Н. купит сначала кондиционер и кулер, а потом соковыжималку со скидкой.

В ответе укажите, сколько рублей заплатит Н. за покупку в этом случае.

4. В таблице указаны средние цены (в рублях) на некоторые основные продукты питания в трёх магазинах Москвы (по данным на февраль 2013 года).

Наименование продукта	А	В	С
Сахар (1 кг)	50	26	72
Молоко (1 литр)	50	44	94
Картофель (1 кг)	22	13	74
Яйца (1 десяток)	99	44	92
Мясо (говядина)	459	487	890
Подсолнечное масло (1 литр)	90	72	99

Определите, в каком из этих магазинов окажется самым дешёвым следующий набор продуктов: 2 л молока, 3 кг картофеля, 2 кг говядины, 1 л подсолнечного масла. В ответе укажите стоимость данного набора продуктов в этом магазине (в рублях).

5. Маша решила посетить парк аттракционов. Сведения о билетах на аттракционы представлены в таблице. Некоторые билеты позволяют посетить сразу два аттракциона.

Номер билета	Аттракционы	Стоимость (в руб.)
1	Колесо обозрения	320
2	Комната смеха	130
3	Гидродром	390
4	Комната смеха, гидродром	450
5	Тир, гидродром	530
6	Колесо обозрения, комната смеха	390

Пользуясь таблицей, выберите билеты так, чтобы Маша посетила все четыре аттракциона: колесо обозрения, комнату смеха, тир и гидродром, а суммарная стоимость билетов не превысила 950 рублей.

В ответе укажите какой-нибудь один набор номеров билетов без пробелов, запятых и каких-либо других дополнительных символов.

§ 5. Текстовые задачи

5.1. Движение

Чтобы решать задачи на движение, достаточно знать формулу пути при равномерном движении (то есть движении с постоянной скоростью) и её следствия для вычисления времени или скорости:

$$s = vt; \quad v = \frac{s}{t}; \quad t = \frac{s}{v}.$$

Здесь s — путь, t — время, v — скорость.

В задачах на движение по течению или против течения реки нужно к тому же понимать, что при движении по течению (иногда говорят «вниз по реке») скорость реки прибавляется, а против течения («вверх по реке») — вычитается из собственной скорости транспорта (лодки, катера, теплохода). Скорость плота (бревна) совпадает со скоростью течения реки. На озере вода считается стоячей (скорость течения нулевая).

Чтобы составить уравнение, данные из условия и их следствия лучше всего занести в таблицу.

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
A	s_1	v_1	t_1
B	s_2	v_2	t_2

189. Из одного города в другой выехали одновременно двое байкеров. Первый проехал весь путь с постоянной скоростью. Второй проехал первую половину пути со скоростью 80 км/ч, а вторую — со скоростью на 24 км/ч больше, чем скорость первого байкера. Определите скорость первого байкера, если в другой город они приехали одновременно. Ответ дайте в км/ч.

190. Из одного пункта в другой одновременно выехали два велосипедиста. Первый велосипедист проехал весь путь с постоянной скоростью. Второй велосипедист проехал первую половину пути со скоростью 15 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью на 4,5 км/ч большей скорости первого велосипедиста, в результате чего прибыл в другой пункт одновременно с первым велосипедистом. Найдите скорость первого велосипедиста (в км/ч).

191. От пристани A к пристани B , расстояние между которыми 150 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 2 ч 30 мин после этого вслед за ним со скоростью, на 10 км/ч большей, отправился

второй. Найдите скорость второго теплохода, если в пункт B он прибыл одновременно с первым. Ответ дайте в км/ч.

192. От пристани A к пристани B , расстояние между которыми 180 км по морю, отправился катер. Через 8 часов после этого следом за ним отправился второй катер со скоростью на 6 км/ч больше. Найдите скорость второго катера, если в пункт B он прибыл одновременно с первым катером. Ответ дайте в км/ч.

193. Рыбнадзорный катер патрулирует участок реки длиной 180 км. Против течения реки он проплывает этот участок за время, на 1 час большее, чем по течению реки. Определите скорость катера в стоячей воде, если скорость течения реки равна 1 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

194. Весной катер идёт против течения реки в 2 раза медленнее, чем по течению. Летом течение становится на 2 км/ч медленнее, поэтому катер летом идёт против течения в $1\frac{2}{5}$ раза медленнее, чем по течению. Найдите собственную скорость катера (в км/ч).

195. Моторная лодка в 9:00 вышла из пункта A в пункт B , расположенный в 15 км от A . Пробыв в пункте B 1 час 20 минут, лодка отправилась назад и вернулась в пункт A в 13:00 того же дня. Определите (в км/ч) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость лодки равна 12 км/ч.

196. Моторная лодка в 4:00 вышла из пункта A в пункт B , расположенный в 126 км от A . Пробыв в пункте B 2 часа, лодка отправилась назад и вернулась в пункт A в 22:00. Определите (в км/ч) собственную скорость лодки, если известно, что скорость течения реки 2 км/ч.

197. Экипаж дальнобойщиков проехал из города на побережье расстояние 6800 км с некоторой постоянной скоростью и без остановок. На обратном пути он увеличил скорость на 5 км/ч, что позволило ему сделать остановку длительностью 5 часов и тем не менее затратить столько же времени, сколько он затратил на дорогу из города на побережье. Найдите скорость при движении экипажа без остановок. Ответ дайте в км/ч.

198. Экскурсионный теплоход регулярно перемещается из пункта A в пункт B , расстояние между которыми составляет 570 км. Теплоход отправился с постоянной скоростью из пункта A в пункт B . После прибытия он отправился обратно со скоростью на 8 км/ч больше прежней, сделав по пути остановку на отдых на 4 часа. В результате теплоход затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь от пункта A до пункта B .

Найдите скорость теплохода на пути из пункта A в пункт B . Ответ дайте в км/ч.

199. Путь в $158\frac{2}{3}$ км первый велосипедист преодолевает на 2 часа быстрее, чем второй велосипедист. Какова скорость первого велосипедиста, если известно, что он в час проезжает на 3 км больше, чем второй велосипедист? Ответ укажите в км/ч.

200. Путь в 160 км мотоциклист преодолевает на $2\frac{2}{3}$ часа быстрее, чем велосипедист. Какова скорость велосипедиста, если известно, что он в час проезжает на 16 км меньше, чем мотоциклист? Ответ укажите в км/ч.

201. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 75 км/ч, проезжает мимо платформы, длина которой равна 150 м, за 24 с. Найдите длину поезда в метрах.

202. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 70 км/ч, проходит мимо неподвижно стоящего на платформе человека за 1 минуту 12 секунд. Определите длину поезда в метрах.

203. Электropоезд-экспресс, двигаясь равномерно со скоростью 180 км/ч, проезжает мимо семафора за 4 с. Найдите длину экспресса (в метрах).

204. По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют пассажирский и товарный поезда, скорости которых соответственно равны 85 км/ч и 45 км/ч. Длина товарного поезда равна 600 метрам. Найдите длину пассажирского поезда, если время, за которое он проходит мимо товарного поезда, равно 1,2 минутам. Ответ дайте в метрах.

205. Первые два часа автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, следующий час — со скоростью 110 км/ч, а затем два часа — со скоростью 85 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

206. Первые четыре часа автомобиль ехал со скоростью 65 км/ч, следующие два часа — со скоростью 90 км/ч, а затем два часа — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

207. Автомобиль ехал 1,5 часа со скоростью 40 км/ч, 2,5 часа — со скоростью 60 км/ч, оставшуюся часть пути — со скоростью 75 км/ч. Определите среднюю скорость автомобиля, если автомобиль двигался на протяжении 5 часов. Ответ укажите в км/ч.

208. Автомобиль ехал 1,7 часа со скоростью 60 км/ч, 2,3 часа — со скоростью 50 км/ч, оставшуюся часть пути — со скоростью 85 км/ч. Определите среднюю скорость автомобиля, если автомобиль двигался на протяжении 8 часов. Ответ укажите в км/ч.

5.2. Работа, производительность

При решении задач на работу и производительность можно применять ту же модель, что и при решении задач на движение, отождествляя проделанную работу с пройденным путём, а производительность со скоростью.

- 209.** На сбор 2400 бонусов первый геймер тратит времени на 20 минут меньше, чем второй. Сколько бонусов в минуту собирает второй геймер, если первый собирает в минуту на 20 бонусов больше?
210. Оля и Дима читают одну и ту же книгу. Оля прочитывает за час 50 страниц, а Дима только 30. Они начали читать книгу одновременно и не прерывались, при этом Оля закончила читать на 36 минут раньше. Сколько страниц текста содержит книга?
211. Галя и Люда выполняют работу по параллельному набору одного и того же текста. За один час Галя набирает 12 страниц текста, а Люда — 15. Они начали работать одновременно, и Галя закончила работу на 45 минут позже Люды. Найдите, сколько страниц содержал этот текст.
212. На школьных соревнованиях ученик 9-го класса Геннадий и ученик 7-го класса Вячеслав стартовали в одном забеге. Геннадий пробегает 8 м за секунду, а Вячеслав — 5,5 м за секунду. К финишу Геннадий прибежал на $18\frac{3}{4}$ с раньше Вячеслава. Какова длина дистанции (в метрах), которую пробежали эти ученики?
- 213.** Бак летнего душа объёмом 600 литров можно заполнить одним из двух насосов. Первый насос закачивает на 5 литров в минуту больше, чем второй, и поэтому на заполнение всего бака тратит на 6 минут меньше второго насоса. Определите, сколько литров в минуту закачивает второй насос.
214. Первая труба пропускает на 15 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 300 литров она заполнит на 18 минут быстрее, чем первая труба?
215. В помощь садовому насосу, перекачивающему 6 литров воды за 4 минуты, подключили второй насос, перекачивающий тот же объём воды за

2 минуты. Сколько минут эти два насоса должны работать совместно, чтобы перекачать 27 литров воды?

216. Вторая труба пропускает в минуту на 6 л воды меньше, чем первая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 140 л она заполнит на 5 минут быстрее, чем вторая труба заполняет резервуар объёмом 100 л?

217. Винни-Пух и Пятачок могут полить огород за 35 минут. Пятачок и Кролик могут вместе полить этот же огород за 63 минуты. Кролик и Винни-Пух вместе поливают огород за 45 минут. За сколько минут польют огород Винни-Пух, Пятачок и Кролик, работая вместе?

218. Ремонт одной и той же квартиры Виктор и Алексей делают за 8 дней, как и Андрей вместе с Виктором, при этом Алексей с Андреем могут выполнить этот ремонт за 12 дней. Сколько дней будет длиться ремонт, если все 3 мастера будут работать одновременно?

219. Один токарь может выполнить заказ за 12 часов, второй — за 15 часов, а третий — за 20 часов. За сколько часов три токаря выполнят заказ, работая совместно?

220. Каменщики Антон и Пётр выкладывают один кирпичный забор за 8 часов, Пётр и Дмитрий выполняют эту же работу за 12 часов, а Антон и Дмитрий — за 9,6 часа. Найдите, за сколько часов каменщики выполнят эту работу, если будут работать втроём.

5.3. Проценты, сплавы, смеси

Вспомним, что $p\%$ от числа A — это $\frac{p \cdot A}{100}$.

Поэтому если в водном растворе массой A кг содержится $p\%$ чистого вещества, то масса этого вещества в растворе будет $\frac{p \cdot A}{100}$ (кг).

Наоборот, если в водном растворе массой A кг содержится B кг чистого вещества, то процентное содержание (концентрация) в растворе чистого вещества находится из пропорции

$$A \text{ кг} — 100\%$$

$$B \text{ кг} — x\%.$$

$$\text{Отсюда } x = \frac{B \cdot 100}{A} (\%).$$

Например, в 15%-ном растворе соли массой 40 кг содержится $\frac{15 \cdot 40}{100} = 6$ (кг) соли. Наоборот, если в 35 кг водного раствора соли

содержится 7 кг другого вещества, то процентное содержание (концентрация) соли в растворе $\frac{7 \cdot 100}{35} = 20 (\%)$.

Иногда проценты берутся не от массы, а от объёма раствора.

Соответствующие рассуждения подходят для любых растворов и сплавов.

221. В ёмкость, содержащую 12 кг 8%-ного раствора вещества, добавили 4 кг воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

222. Инжир содержит 70% воды, а сушёный инжир — 3,4%. Сколько килограммов инжира потребуется для получения 10 кг сушёного инжира?

223. Смешали 2 кг 15%-ного водного раствора некоторого вещества с 8 кг 10%-ного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

224. Смешали некоторое количество 31%-ного раствора с таким же количеством 23%-ного раствора. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

225. Имеется два сосуда. Первый содержит 75 кг, а второй — 50 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 42% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 50% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

226. В результате смешивания 25%-ного и 15%-ного растворов серной кислоты получили 750 г 20%-ного раствора. Сколько граммов 15%-ного раствора было взято?

227. Смешав 25%-ный и 75%-ный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 50%-ный раствор той же кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 5 кг 15%-ного раствора, то получили бы 55%-ный раствор кислоты. Сколько килограммов 75%-ного раствора использовали для получения смеси?

228. Первый сплав содержит 15% железа, а второй — 30%. Масса первого сплава на 2 кг меньше массы второго сплава. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 25% железа. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

229. Семья состоит из мужа, жены и их сына-студента. Если бы зарплата жены увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 37,5%. Если бы зарплата мужа уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы

на 39%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет стипендия сына?

230. Семья состоит из мужа, жены и их сына-студента. Если бы стипендия сына увеличилась в шесть раз, то общий доход семьи вырос бы на 100%. Если бы зарплата мужа уменьшилась вдвое, общий доход семьи уменьшился бы на 20%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

231. В понедельник акции компании подешевели на некоторое число процентов, а во вторник — подорожали на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 9% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подешевели акции компании в понедельник?

232. Бизнесмен Яблоков получил в 2009 году прибыль в размере 100 000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 150% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Яблоков за 2012 год?

Задания для контроля

Вариант 1

1. Двое байкеров выехали одновременно из одного города в другой. Первый проехал весь путь со скоростью 96 км/ч. Второй проехал первую половину пути со скоростью 80 км/ч. С какой скоростью пришлось ехать второму байкеру вторую половину пути, если в другой город они приехали одновременно? Ответ дайте в км/ч.
2. Катер проплыл по течению реки от пристани *A* до пристани *B* расстояние в 437 км. Против течения реки он проплыл то же самое расстояние, но потратил на 4 часа больше, чем при перемещении по течению. Найдите скорость катера в стоячей воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.
3. Катя и Таня вместе могут вымыть окно за 15 минут. Таня и Настя могут вымыть это же окно за 21 минуту. Настя и Катя вымоют это окно за 35 минут. За сколько минут могут вымыть окно Катя, Таня и Настя, если будут мыть его вместе?
4. Бассейн объёмом 18 000 л первый насос наполняет на 10 минут медленнее, чем второй насос. Сколько литров в минуту закачивает первый насос, если второй закачивает в минуту на 300 л больше?

5. Смешали 5 л 27%-ного водного раствора некоторого вещества с 8 л 40%-ного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Вариант 2

1. Экипаж дальнобойщиков проехал расстояние 6375 км с определённой скоростью без остановок. На обратном пути водители планируют сделать остановку на 10 часов для отдыха. Для этого на обратном пути им необходимо увеличить скорость на 10 км/ч по сравнению с прямым маршрутом. Найдите (в км/ч) значение первоначальной скорости, если на путь в обоих направлениях затрачено одинаковое количество времени.
2. Малыш и Карлсон вместе съедают торт за 20 минут. Карлсон и Фрекен Бок съедают вместе этот же торт за 30 минут. Фрекен Бок и Малыш съедают этот же торт за 24 минуты. За сколько минут съедят этот торт Малыш, Карлсон и Фрекен Бок, если будут есть его все вместе?
3. Бак летнего душа объёмом 800 л первый насос заполняет за 24 минуты медленнее, чем второй насос. Сколько литров в минуту закачивает первый насос, если второй закачивает на 30 л в минуту больше?
4. Первые три часа волк бежал со скоростью 20 км/ч, следующий час — со скоростью 45 км/ч, а затем два часа — со скоростью 15 км/ч. Найдите среднюю скорость волка на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.
5. Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 54 килограммов изюма, если виноград содержит 90% воды, а изюм содержит 5% воды?

Вариант 3

1. На сбор 3000 бонусов первый геймер тратит времени на 50 минут меньше, чем второй на сбор 5500 бонусов. Сколько бонусов в минуту собирает второй геймер, если первый собирает на 5 бонусов в минуту больше?
2. Скорость катера береговой охраны в стоячей воде равна 20 км/ч. Путь длиной 396 км по течению реки он проплывает на 4 ч быстрее, чем против течения реки. Найдите скорость течения реки (в км/ч).
3. Сестра вышла из дома на 1 мин 40 с раньше брата. Тем не менее в школу, находящуюся на расстоянии 300 м от дома, они пришли одновременно. Определите время движения сестры (в мин), если скорость брата на 0,5 м/с больше скорости сестры.
4. Первый рабочий изготавливает 200 деталей за 10 минут. Вместе со вторым рабочим они изготавливают 760 деталей за столько же минут, за

сколько второй, работая один, изготавливает 360 деталей. Сколько деталей в минуту изготавливает второй рабочий?

5. Клиент А. сделал вклад в банке в размере 8800 рублей. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Ровно через год на тех же условиях такой же вклад в том же банке сделал клиент Б. Ещё ровно через год клиенты А. и Б. закрыли вклады и забрали все накопившиеся деньги. При этом клиент А. получил на 968 рублей больше клиента Б. Какой процент годовых начислял банк по этим вкладам?

Вариант 4

1. На сбор 4000 бонусов первый геймер тратит времени столько же, сколько второй на сбор 3600 бонусов. Сколько бонусов в минуту собирает второй геймер, если первый собирает на 4 бонуса в минуту больше?

2. Катер береговой охраны патрулирует участок реки длиной 396 км. Скорость течения реки равна 2 км/ч. Найдите скорость катера в стоячей воде (в км/ч), если против течения катер проплывает патрулируемый участок на 4 часа медленнее, чем по течению.

3. Расстояние от дома до школы, равное 480 м, брат проходит на 2 мин 40 с быстрее, чем сестра. Определите скорость брата (в м/с), если скорость сестры на 0,5 м/с меньше, чем его скорость.

4. Первый и второй рабочий, работая вместе, изготавливают 38 деталей в минуту. 200 таких же деталей первый рабочий изготавливает за то же время, за которое второй изготавливает 180 таких же деталей. Сколько деталей в минуту изготавливает первый рабочий самостоятельно?

5. Имеется два сплава. Первый содержит 15% золота, второй — 2% золота. Масса первого сплава 3 кг, масса второго — 7 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав. Найдите процентное содержание золота в полученном сплаве.

§ 6. Теория вероятностей

6.1. Классическое определение вероятности

Пусть при проведении испытания (бросании монеты или кубика, вытягивании экзаменационного билета и т. д.) наступает один из n равновероятных исходов. Например, при подбрасывании монеты число всех исходов n равно 2, так как кроме выпадения решки или орла других исходов быть не может. При броске игрального кубика наступает один из 6 исходов, так как на верхней грани кубика равновероятно появление любого из чисел от 1 до 6. Пусть также некоторому событию A благоприятствуют m исходов.

Вероятностью события A называется отношение числа благоприятных для этого события исходов к общему числу равновероятных исходов. Пишем $P(A) = \frac{m}{n}$.

Например, пусть событие A состоит в выпадении нечётного числа очков при бросании кубика. Всего возможны 6 исходов: выпадение на верхней грани кубика 1, 2, 3, 4, 5, 6. При этом благоприятными для события A являются исходы с выпадением 1, 3, 5. Таким образом,

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0,5.$$

Заметим, что всегда выполняется двойное неравенство $0 \leq m \leq n$, поэтому вероятность любого события A лежит на отрезке $[0; 1]$, то есть $0 \leq P(A) \leq 1$.

233. Карточки с цифрами от 1 до 4 наудачу извлекают из мешка и кладут по порядку. Какова вероятность того, что карточку с цифрой 3 извлекут последней?

234. Пятеро друзей-автолюбителей взяли автомобиль в аренду для путешествия. С помощью жребия они выбирают двоих, которые в первый день будут поочерёдно водителями. Какова вероятность того, что М., входящий в состав группы, будет водителем в первый день путешествия?

235. В сборнике билетов по физике всего 30 билетов, в 6 из них встречается вопрос по механике. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по механике.

236. В партии 1050 деталей, из них 630 — типа А, а остальные — типа Б. Какова вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется деталью типа Б?

237. В урне 14 красных, 9 жёлтых и 7 зелёных шаров. Из урны наугад достают один шар. Какова вероятность того, что этот шар окажется жёлтым?

238. На книжной полке Максима 25 книг: 12 детективов, 4 учебника по математике и 9 книг в жанре фэнтези. Найдите вероятность того, что наудачу взятая с этой полки книга окажется учебником по математике.

239. В классе 20 человек, из них четыре Светы и пять Дим. Директор вызвал наугад одного из учеников. Какова вероятность, что вызванного ученика зовут Света или Дима?

240. В зрительном зале кинотеатра 60 человек, из них 15 россиян и 9 казахстанцев. Какова вероятность того, что по окончании сеанса первым из зала будет выходить россиянин или казахстанец?

241. В чемпионате мира участвуют 24 команды, в том числе команда из России. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по шесть команд в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп:

1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4.

Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется в третьей группе?

242. В чемпионате мира участвуют 24 команды, в том числе команда из России. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по шесть команд в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп:

1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4.

Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда из России окажется во второй группе?

243. На международных соревнованиях 20 спортсменов из различных стран разделили на 4 группы по 5 человек случайным образом. Одним из участников соревнований является спортсмен из России. Какова вероятность того, что он окажется в третьей группе?

244. На международных соревнованиях 28 спортсменов из различных стран разделили на 4 группы по 7 человек случайным образом. Одним из участников соревнований является спортсмен из России. Какова вероятность того, что он окажется в четвёртой группе?

245. Из 20 билетов, предлагаемых на экзамене, школьник может ответить только на 17. Какова вероятность того, что школьник не сможет ответить на выбранный наугад билет?

246. Из семидесяти пяти замков, которые поступили в продажу, шесть неисправны. Какова вероятность того, что наудачу купленный замок исправен?

247. В книге 400 страниц, из них на 36 есть картинки. Школьник открывает книгу на выбранной наугад странице. Какова вероятность того, что на открытой странице не будет картинки?

248. В подъезде сорок восемь квартир. В тридцати из них ранним утром среды никого не будет. Пришедший в это время почтальон наберёт на панели домофона наудачу номер одной из квартир. Какова вероятность того, что ему ответят?

249. В чемпионате по художественной гимнастике участвуют 20 спортсменов: 6 из России, 5 из Германии, остальные — из Франции. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая седьмой, окажется из Франции.

250. В соревнованиях по фигурному катанию участвуют 75 спортсменов, среди них 12 — из России, 8 — из Китая. Порядок выступлений определяется жребием. Найдите вероятность того, что 13-м будет выступать спортсмен из России.

251. В соревнованиях по метанию копья участвуют 4 спортсмена из Германии, 6 спортсменов из Дании, 11 спортсменов из Швеции и 9 — из Греции. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Дании.

252. В соревнованиях по поднятию тяжестей участвуют 4 спортсмена из России, 5 спортсменов из Дании, 6 спортсменов из Швеции и 9 — из Греции. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Греции.

253. Научная конференция проводится в течение 5 дней. Всего запланировано 50 докладов: первые три дня — по 12 докладов, остальные распределены поровну между четвёртым и пятым днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что доклад профессора Н. окажется запланированным на последний день конференции?

254. Научная конференция проводится в течение 4 дней. Всего запланировано 50 докладов: первые три дня — по 14 докладов, остальные в четвёртый день. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова ве-

роятность того, что доклад профессора Н. окажется запланированным на последний день конференции?

255. На экзамене участников рассаживают по семи аудиториям. В первых шести — по 15 человек, оставшихся проводят в запасную аудиторию на другом этаже. При подсчёте выяснилось, что всего было 100 участников. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал экзаменационную работу в запасной аудитории.

256. На экзамене участников рассаживают по шести аудиториям. В первых пяти — по 21 человеку, оставшихся проводят в запасную аудиторию на другом этаже. При подсчёте выяснилось, что всего было 120 участников. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал экзаменационную работу в запасной аудитории.

257. Завод производит холодильники. В среднем на 100 качественных холодильников приходится 15 холодильников со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленный холодильник окажется качественным. Результат округлите до сотых.

258. Фабрика выпускает рюкзаки. В среднем на 100 качественных рюкзаков приходится восемнадцать рюкзаков со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленный рюкзак окажется качественным. Результат округлите до сотых.

259. Из 1000 собранных на заводе кофемолок 7 штук бракованных. Эксперт проверяет одну наугад выбранную кофемолку из этой 1000. Найдите вероятность того, что проверяемая кофемолка окажется бракованной.

260. В сборнике билетов по истории всего 20 билетов, в 7 из них встречается вопрос, относящийся к событиям XVII века. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос, относящийся к событиям XVII века.

261. Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 16 теннисистов, среди которых 7 участников из России, в том числе Максим Зайцев. Найдите вероятность того, что в первом туре Максим Зайцев будет играть с каким-либо теннисистом из России.

262. Перед началом первого тура чемпионата по шахматам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвуют 76 шахматистов, среди которых 19 участников из России, в том числе Леонид Петров. Найдите вероятность того, что

в первом туре Леонид Петров будет играть с каким-либо шахматистом из России.

263. Перед началом первого тура чемпионата по фехтованию участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате соревнуются 36 спортсменов, среди которых 8 участников из России, в том числе Дмитрий Хало. Найдите вероятность того, что в первом туре Дмитрий Хало будет фехтовать с каким-либо спортсменом из России.

264. Перед началом первого тура чемпионата по восточным единоборствам участников одной весовой категории разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего таких участников 36, среди них 29 участников из России, в том числе Владислав Зарубин. Найдите вероятность того, что в первом туре Владислав Зарубин будет бороться с каким-либо спортсменом из России.

265. Футбольную секцию посещают 33 человека, среди них два брата — Фёдор и Сергей. Посещающих секцию случайным образом делят на три команды по 11 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Фёдор и Сергей окажутся в одной команде.

266. Спортивную секцию посещают 16 человек, среди них два брата — Антон и Дмитрий. Посещающих секцию случайным образом делят на четыре команды по 4 человека в каждой. Найдите вероятность того, что Антон и Дмитрий окажутся в одной команде.

267. В группе 51 человек, среди них две сестры — Маша и Даша. Группу случайным образом делят на три звена по 17 человек в каждом. Найдите вероятность того, что Маша и Даша окажутся в одном звене.

268. В группе 49 человек, среди них два брата — Роман и Даниил. Группу случайным образом делят на семь подгрупп по 7 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Роман и Даниил окажутся в одной подгруппе.

269. Симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно один раз.

270. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно 1 раз.

271. В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что в первый раз выпадет орёл, во второй и третий — решка.

272. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет все четыре раза.

- 273.** Игральный кубик бросают дважды. Сколько элементарных исходов опыта благоприятствует событию $A = \text{«сумма очков равна 8»}$?
274. Игральный кубик бросают дважды. Сколько элементарных исходов опыта благоприятствует событию $A = \text{«сумма очков равна 6»}$?
275. Юра дважды бросал кубик. Найдите вероятность того, что при втором броске у него выпало столько же очков, сколько и при первом. Ответ округлите до сотых.
276. Юра дважды бросал кубик. Найдите вероятность того, что при втором броске у него выпало в два раза меньше очков, чем при первом. Ответ округлите до сотых.
- 277.** Одновременно бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 4 очка. Результат округлите до сотых.
278. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет не менее 11 очков. Ответ округлите до сотых.
279. В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 12 очков. Ответ округлите до сотых.
280. В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет не менее 16 очков. Ответ округлите до сотых.
- 281.** На детском утреннике за круглый стол на 17 стульев в случайном порядке рассаживаются 15 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки будут сидеть рядом.
282. На детском утреннике за круглый стол на 26 стульев в случайном порядке рассаживаются 24 мальчика и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки будут сидеть рядом.
283. В группе 8 человек, среди них — Егор и Владимир. Для проведения соревнования группу случайным образом делят на четыре пары. Найдите вероятность того, что Егор и Владимир окажутся в одной паре. Ответ округлите до сотых.
284. В группе 21 человек, среди них — Марина и Ольга. Для проведения соревнования группу случайным образом делят на семь равных по численности команд. Найдите вероятность того, что Марина и Ольга окажутся в одной команде.

- 285.** Артём в салоне сотовой связи выбирает наугад номер мобильного телефона. Какова вероятность, что его последние две цифры различны?
- 286.** Сергей в салоне сотовой связи выбирает наугад номер мобильного телефона. Какова вероятность, что среди трёх последних цифр нет одинаковых?
- 287.** Максим в салоне сотовой связи выбирает наугад номер мобильного телефона. Какова вероятность, что среди трёх последних цифр хотя бы две одинаковых?
- 288.** Ярослав в салоне сотовой связи выбирает наугад номер мобильного телефона. Какова вероятность, что три его последние цифры одинаковы?

6.2. Основные теоремы теории вероятностей

События A и B называются **противоположными** друг другу, если любой исход благоприятен ровно для одного из них. Событие, противоположное событию A , обозначают \bar{A} . Из определения противоположных событий следует

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1, \text{ значит, } P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Два события A и B называют **несовместными**, если отсутствуют исходы, благоприятствующие одновременно как событию A , так и событию B .

Пусть событие C означает, что произошло хотя бы одно из событий A и B . Тогда C называют **объединением событий** A и B , пишут $C = A \cup B$. Также объединение событий иногда называют **суммой событий** и обозначают $A + B$.

Если события A и B несовместны, то вероятность их объединения равна сумме вероятностей событий A и B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Два события A и B называют **независимыми**, если вероятность каждого из них не зависит от появления или не появления другого события.

Пусть событие C означает, что произошло как событие A , так и событие B . Тогда C называют **пересечением событий** A и B , пишут $C = A \cap B$. Также пересечение событий иногда называют **произведением событий** и обозначают $A \cdot B$.

Если события A и B независимы, то вероятность их пересечения равна произведению вероятностей событий A и B :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Частотой события A называют отношение $\frac{m}{n}$, где n — общее число испытаний, m — число появлений события A . Например, пусть мы подбросили монету 100 раз, орёл выпал 47 раз. Тогда частота выпадения орла в нашем эксперименте равна $\frac{47}{100} = 0,47$.

В общем случае вероятности пересечения и объединения событий A и B связаны следующей формулой:
$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B).$$

289. Если гроссмейстер A играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера H с вероятностью 0,45. Если A играет чёрными, то A выигрывает у H с вероятностью 0,4. Гроссмейстеры A и H играют две шахматные партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что A выиграет оба раза.

290. Если футбольная команда A играет на домашнем стадионе, то она выигрывает у футбольной команды B с вероятностью 0,4. Если команда A играет в гостях (на домашнем стадионе команды B), то команда A выигрывает у команды B с вероятностью 0,3. Команды A и B играют два матча, по одному разу на домашнем стадионе каждой из них. Найдите вероятность того, что команда A выиграет оба матча.

291. Вероятность того, что в течение дня охотник встретит зайца, равна 0,35, а вероятность того, что встретит лису, — 0,6. Считая, что указанные два события независимы, найдите вероятность того, что в течение дня охотник встретит и зайца, и лису.

292. Вероятность того, что в течение дня рыболов поймает щуку, равна 0,45, а вероятность того, что поймает сазана, — 0,5. Считая, что указанные два события независимы, найдите вероятность того, что в течение дня рыболов поймает и щуку, и сазана.

293. По отзывам покупателей Пётр Петрович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина A , равна 0,85. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина B , равна 0,96. Пётр Петрович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

294. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,1. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

295. Рядом находятся два автомата для продажи кофе. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,2 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один из этих автоматов исправен.

296. В загородном доме установлены две видеокамеры. Неисправность одной из них не зависит от неисправности другой. Вероятность неисправности первой равна 0,3, а вероятность неисправности второй — 0,2. Найдите вероятность того, что хотя бы одна из видеокамер исправна.

297. Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что биатлонист первые два раза попал в мишени, а последние три — промахнулся. Результат округлите до сотых.

298. Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что биатлонист первые четыре раза попал в мишени, а последний раз промахнулся. Результат округлите до сотых.

299. Ракета поражает цель с вероятностью 0,9. Какова вероятность того, что цель не окажется поражённой после 4 запусков ракеты?

300. Ракета не поражает цель с вероятностью 0,1. Какова вероятность того, что цель будет поражена при каждом из первых трёх запусков ракеты и не поражённой при четвёртом?

301. На рисунке 47 (см. с. 97) изображён лабиринт. Мышка заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и идти назад мышка не может, поэтому на каждом разветвлении мышка выбирает один из путей, по которому ещё не шла. Считая, что выбор дальнейшего пути совершенно случаен, определите, с какой вероятностью мышка придёт к выходу В.

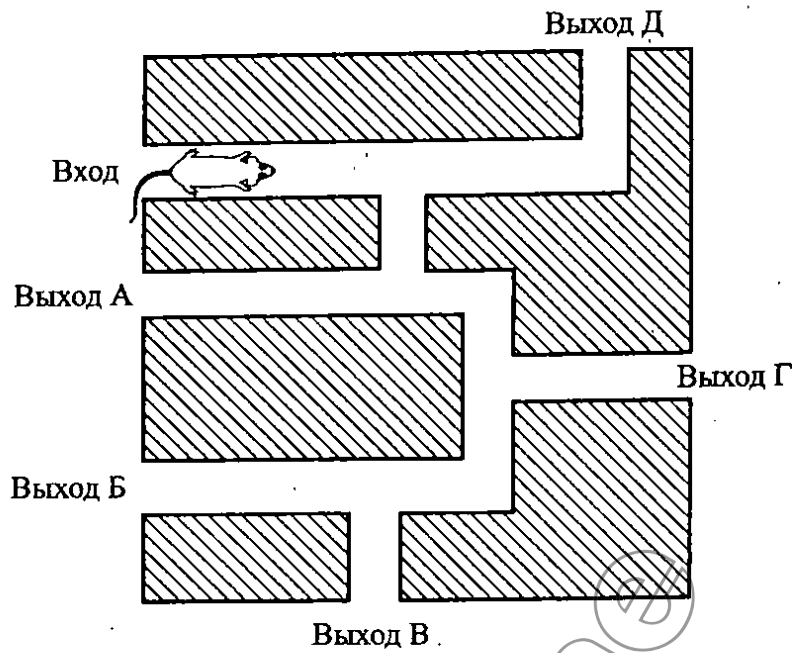


Рис. 47

302. На рисунке 48 изображён лабиринт. Крыса заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и идти назад крыса не может, поэтому на каждом разветвлении крыса выбирает один из путей, по которому ещё не шла. Считая, что выбор дальнейшего пути совершенно случаен, определите, с какой вероятностью крыса придёт к выходу А.

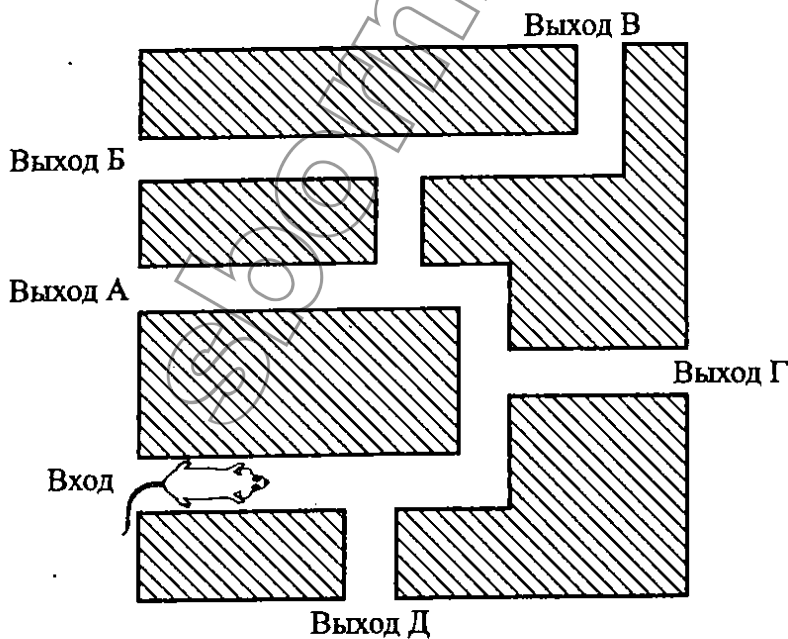


Рис. 48

303. Иван Петрович совершает прогулку из точки A по дорожкам парка. На каждой развилке он наугад выбирает следующую дорожку, не возвращаясь обратно. Схема дорожек показана на рисунке 49. Найдите вероятность того, что Иван Петрович попадёт в точку E .

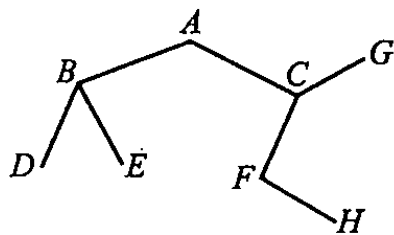


Рис. 49

304. Денис совершает прогулку из точки A по дорожкам парка. На каждой развилке он наугад выбирает следующую дорожку, не возвращаясь обратно. Схема дорожек показана на рисунке 50. Найдите вероятность того, что Денис попадёт в точку H .

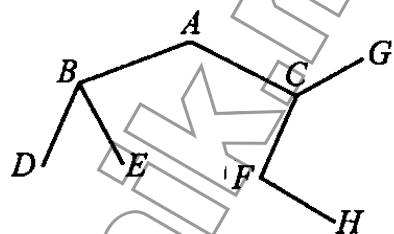


Рис. 50

305. В классе 16 мальчиков и 9 девочек. Для подготовки классной комнаты к занятиям случайным образом выбирают двоих дежурных. Найдите вероятность того, что дежурить будут два мальчика.

306. В классе 16 мальчиков и 9 девочек. Среди учащихся класса случайным образом выбирают двоих дежурных. Найдите вероятность того, что дежурить будут две девочки.

307. В классе 10 мальчиков и 15 девочек. Среди учащихся класса случайным образом выбирают двоих дежурных. Найдите вероятность того, что дежурить будут два мальчика.

308. В классе 10 мальчиков и 15 девочек. Среди учащихся класса случайным образом выбирают двоих дежурных. Найдите вероятность того, что дежурить будут две девочки.

309. Вероятность того, что новая кофемолка прослужит больше года, равна 0,93. Вероятность того, что она прослужит больше двух лет, равна 0,81. Найдите вероятность того, что кофемолка прослужит меньше двух лет, но больше года.

310. Вероятность того, что новый мобильный телефон прослужит больше года, равна 0,94. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,78. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

311. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в среду в автобусе окажется меньше 40 пассажиров, равна 0,89. Вероятность того, что окажется меньше 28 пассажиров, равна 0,37. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 28 до 39.

312. Жители одного провинциального города ежедневно могут посещать открытый плавательный бассейн. Вероятность того, что в воскресенье будет меньше 150 посетителей, равна 0,85, а вероятность того, что их будет меньше 100, равна 0,35. Найдите вероятность того, что число посетителей будет от 100 до 149.

313. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,3.

314. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,2.

315. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, шахматисту нужно набрать хотя бы 1,5 очка по итогам двух игр. Если шахматист выигрывает, он получает 1 очко, в случае ничьей — 0,5 очка, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что шахматисту удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятность выигрыша и проигрыша одинакова и равна 0,3.

316. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, шахматисту нужно набрать хотя бы 1,5 очка по итогам двух игр. Если шахматист выигрывает, он получает 1 очко, в случае ничьей — 0,5 очка, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что шахматисту удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятность выигрыша и проигрыша одинакова и равна 0,25.

317. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,4. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,22. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

318. В торговом центре два одинаковых автомата продают шоколадки. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончатся шоколадки, равна 0,4. Вероятность того, что шоколадки закончатся в обоих автоматах, равна 0,35. Найдите вероятность того, что к концу дня шоколадки останутся в обоих автоматах.

319. На втором и третьем этажах в корпусе механико-математического факультета университета для студентов установлены два одинаковых ксерокса. Вероятность того, что к концу дня в ксероксе закончится бумага, равна 0,4. Вероятность того, что бумага закончится в обоих ксероксах, равна 0,23. Найдите вероятность того, что к концу дня бумага останется в обоих ксероксах.

320. В двух корпусах университета для студентов установлены два одинаковых принтера. Вероятность того, что к концу дня в принтере закончится бумага, равна 0,3. Вероятность того, что бумага закончится в обоих принтерах, равна 0,18. Найдите вероятность того, что к концу дня бумага останется в обоих принтерах.

321. Чтобы поступить в институт на специальность «архитектура», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 60 баллов по каждому из трёх предметов — математике, русскому языку и истории. Чтобы поступить на специальность «живопись», нужно набрать не менее 60 баллов по каждому из трёх предметов — русскому языку, истории и литературе. Вероятность того, что абитуриент Н. получит не менее 60 баллов по истории, равна 0,8, по русскому языку — 0,5, по литературе — 0,6 и по математике — 0,9. Найдите вероятность того, что Н. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

322. Чтобы поступить в институт на специальность «архитектура», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 75 баллов по каждому из трёх предметов — математике, русскому языку и истории. Чтобы поступить на специальность «телевидение», нужно набрать не менее 75 баллов по каждому из трёх предметов — русскому языку, литературе и истории. Вероятность того, что абитуриент К. получит не менее 75 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку — 0,8, по истории — 0,5 и по литературе — 0,7. Найдите вероятность того, что К. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

323. Чтобы поступить в институт на специальность «туризм», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 55 баллов по каждому из трёх предметов — математике, русскому языку и обществознанию. Чтобы поступить на специальность «механизмы», нужно набрать не менее 55 баллов по каждому из трёх предметов — математике, русскому языку и физике. Вероятность того, что абитуриент А. получит не менее 55 баллов по математике, равна 0,5, по русскому языку — 0,7, по физике — 0,4 и по обществознанию — 0,6. Найдите вероятность того, что А. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

324. Чтобы поступить в институт на специальность «экономика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 65 баллов по каждому из трёх предметов — математике, русскому языку и обществознанию. Чтобы поступить на специальность «право», нужно набрать не менее 65 баллов по каждому из трёх предметов — математике, русскому языку и истории. Вероятность того, что абитуриент А. получит не менее 65 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку — 0,5, по истории — 0,8 и по обществознанию — 0,7. Найдите вероятность того, что А. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

Задания для контроля

Вариант 1

1. В некоторой школе 500 учащихся, среди них 257 мальчиков. Найдите вероятность того, что выбранный наугад учащийся этой школы окажется девочкой.
2. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что в первый раз выпадет орёл, во второй — решка.

3. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью $0,08$ независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.
4. Вероятность того, что новый мобильный телефон прослужит больше двух лет, равна $0,62$. Вероятность того, что он прослужит больше пяти лет, равна $0,43$. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше пяти лет, но больше двух.
5. Чтобы поступить в институт на специальность «автоматизация», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 60 баллов по каждому из трёх предметов — математике, русскому языку и физике. Чтобы поступить на специальность «мехатроника», нужно набрать не менее 60 баллов по каждому из трёх предметов — математике, русскому языку и информатике. Вероятность того, что абитуриент $У$. получит не менее 60 баллов по математике, равна $0,4$, по русскому языку — $0,5$, по физике — $0,3$ и по информатике — $0,2$. Найдите вероятность того, что $У$. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

Вариант 2

1. В сборнике заданий по математике всего 280 заданий, в 21 из них встречается вопрос по процентам. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на уроке задании школьнику не достанется вопроса по процентам.
2. Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвуют 76 теннисистов, среди которых 13 участников из России, в том числе Роман Исаев. Найдите вероятность того, что в первом туре Роман Исаев будет играть с каким-либо теннисистом из России.
3. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 19 пассажиров, равна $0,26$. Вероятность того, что окажется меньше 6 пассажиров, равна $0,009$. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 6 до 18 .

4. На рисунке 51 изображён лабиринт. Жук заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и ползти назад жук не может, поэтому на каждом разветвлении жук выбирает один из путей, по которому ещё не полз. Считая, что выбор дальнейшего пути совершенно случаен, определите, с какой вероятностью жук придёт к выходу Е.

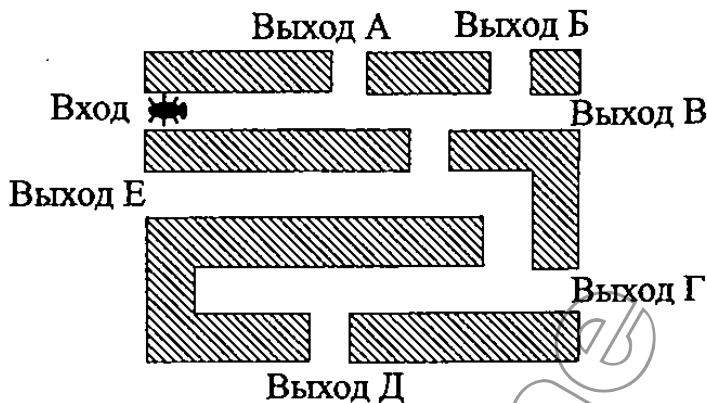


Рис. 51

5. Чтобы поступить в институт на специальность «биотехника», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 80 баллов по каждому из трёх предметов — математике, русскому языку и химии. Чтобы поступить на специальность «управление», нужно набрать не менее 80 баллов по каждому из трёх предметов — математике, русскому языку и обществознанию. Вероятность того, что абитуриент З. получит не менее 80 баллов по математике, равна 0,3, по русскому языку — 0,4, по химии — 0,7 и по обществознанию — 0,6. Найдите вероятность того, что З. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

Вариант 3

1. Маша, Даша, Света, Оля и Наташа бросили жребий — кому первой петь песню. Найдите вероятность того, что первой петь песню будет не Маша.
2. Перед началом волейбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру. Команда «Тигры» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх команда «Тигры» выиграет жребий ровно два раза.
3. Вероятность того, что новый фен прослужит больше трёх лет, равна 0,71. Вероятность того, что он прослужит больше десяти лет, равна 0,24. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше десяти лет, но больше трёх.

4. Профессиональный игрок в шашки А., играя белыми, выигрывает у профессионального игрока Б. с вероятностью 0,42. Если же он играет чёрными, то выигрывает с вероятностью 0,2. А. и Б. играют две партии, меняя при этом цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет обе партии.

5. В торговом центре два одинаковых автомата продают шоколадки. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится шоколад, равна 0,8. Вероятность того, что шоколад закончится в обоих автоматах, равна 0,62. Найдите вероятность того, что к концу дня шоколад останется в обоих автоматах.

Вариант 4

1. На полке лежит 180 тетрадей, из них 63 в линейку, а остальные — в клетку. Найдите вероятность того, что случайно выбранная тетрадь будет в клетку.

2. Перед началом партии в шашки Вася бросает монетку, чтобы определить, кто из игроков начнёт игру. Вася играет четыре партии с разными игроками. Найдите вероятность того, что в этих партиях Вася выиграет жребий ровно один раз.

3. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 43 пассажиров, равна 0,91, а вероятность того, что пассажиров будет меньше 16, равна 0,12. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 16 до 42.

4. На детском утреннике за круглый стол на 39 стульев в случайном порядке рассаживаются 37 девочек и 2 мальчика. Найдите вероятность того, что оба мальчика будут сидеть рядом. Результат округлите до сотых.

5. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,7. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,56. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

§ 7. Схема Бернулли. Условная и полная вероятности

7.1. Сочетания, размещения, перестановки. Схема Бернулли

Факториалом натурального числа n называется результат произведения $n \cdot (n - 1) \dots 2 \cdot 1$. Факториал числа n обозначается как $n!$.

Например, $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Заметим, $\frac{(n+1)!}{n!} = n+1$.

Перестановкой n элементов называется любой способ расставить их в определённом порядке. Количество перестановок длины n равно $n!$.

Размещением из n элементов по k называют любой выбор k элементов, взятых в определённом порядке из n элементов. Число размещений из n элементов по k обозначают A_n^k . Справедлива формула:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Сочетанием из n элементов по k называют любой выбор k элементов, взятых из n элементов (без учёта порядка). Число сочетаний из n элементов по k обозначают C_n^k . Справедлива формула:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Схема Бернулли. Предположим, проводится серия из n идентичных независимых экспериментов. В каждом из них вероятность наступления случайного события A равна p . Тогда вероятность того, что в указанной серии экспериментов событие A наступит ровно k раз ($k \leq n$), вычисляется по формуле $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

325. В ящике лежат гелевые ручки: 8 синих, 6 красных и 2 зелёных. Надя достаёт случайным образом две ручки. Какова вероятность, что она достанет одну синюю и одну красную ручки?

326. В ящике лежат гелевые ручки: 7 синих, 8 красных и 6 зелёных. Настя достаёт случайным образом две ручки. Какова вероятность, что она достанет одну синюю и одну зелёную ручки?

327. В ящике лежат гелевые ручки: 15 синих, 21 красных и 14 зелёных. Юлия достаёт случайным образом две ручки. Какова вероятность, что она достанет одну красную и одну зелёную ручки?

328. В ящике лежат гелевые ручки: 12 синих, 10 жёлтых и 11 зелёных. Ольга достаёт случайным образом две ручки. Какова вероятность, что она достанет одну синюю и одну зелёную ручки?

329. Петя бросает симметричную монету 26 раз. Во сколько раз вероятность события «решка выпадет ровно 7 раз» превосходит вероятность события «решка выпадет ровно 5 раз»?

330. Марина бросает симметричную монету 13 раз. Найдите отношение вероятности «решка выпадет ровно 8 раз» к вероятности события «решка выпадет ровно 7 раз».

331. Алёна бросает симметричную монету 15 раз. Найдите отношение вероятности «решка выпадет ровно 5 раз» к вероятности события «решка выпадет ровно 6 раз».

332. Максим бросает симметричную монету 24 раза. Во сколько раз вероятность события «решка выпадет ровно 9 раз» меньше вероятности события «решка выпадет ровно 10 раз»?

333. Стрелок Алексей стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень даётся не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,6. Во сколько раз вероятность события «Алексей поразит ровно четыре мишени» больше вероятности события «Алексей поразит ровно три мишени»?

334. Стрелок Валерий стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень даётся не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,2. Найдите отношение вероятности события «Валерий поразит ровно три мишени» к вероятности события «Валерий поразит ровно две мишени».

335. Стрелок Пётр стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень даётся не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,5. Во сколько раз вероятность события «Пётр поразит ровно две мишени» меньше вероятности события «Пётр поразит ровно четыре мишени»?

336. Стрелок Семён стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень даётся не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна $\frac{2}{3}$. Во сколько раз вероятность события «Семён поразит ровно четыре мишени» меньше вероятности события «Семён поразит ровно пять мишеней»?

7.2. Условная и полная вероятности. Формула Байеса

Пусть в результате некоторого эксперимента возможно наступление событий A и B , причём $P(B) \neq 0$.

Вероятностью события A при условии события B (обозначают $P(A|B)$) называют отношение $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. На практике эту вероятность часто можно найти как вероятность события A , посчитанную при предположении, что событие B наступило.

Если события A и B независимые, то $P(A|B) = P(A)$.

Предположим, что в результате эксперимента обязательно наступит ровно одно из событий H_1, H_2, \dots, H_m , причём вероятность каждого из них не равна 0 (между собой они могут различаться). Тогда для произвольного события A справедлива формула

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + \dots + P(A|H_m)P(H_m).$$

Эту формулу называют **формулой полной вероятности**. События H_1, H_2, \dots, H_m называют гипотезами.

Предположим, известно, что событие A наступило, и необходимо найти вероятность наступления одной из гипотез (H_k). Для этого применяется **формула Байеса**: $P(H_k|A) = \frac{P(A|H_k)P(H_k)}{P(A)}$, где $P(A) \neq 0$.

Приведём пример. Магазин закупает флешки у двух производителей: A и B , причём у производителя A в среднем 0,05 бракованных флешек, а у производителя B в среднем 0,1 бракованных флешек. 80% всех закупленных флешек изготовлены производителем A , 20% — производителем B . Тогда вероятность того, что наудачу купленная в этом магазине флешка бракованная, равна $0,05 \cdot 0,8 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,06$.

Если купленная флешка бракованная, то вероятность того, что она изготовлена производителем A , равна $\frac{0,05 \cdot 0,8}{0,06} = \frac{2}{3}$.

337. На рисунке 52 (см. с. 108) изображено множество M , состоящее из 15 точек, обозначающих все исходы некоторого случайного эксперимента. Его подмножества A и B задают случайные события. Найдите $P(B|A)$ — условную вероятность B при условии A .

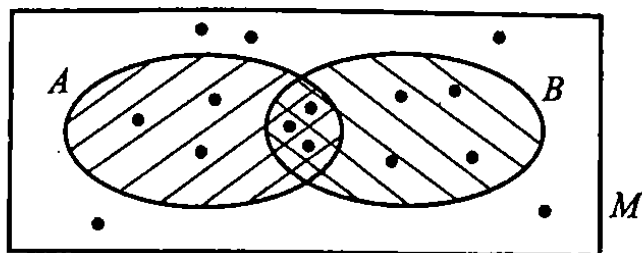


Рис. 52

338. На рисунке 53 изображено множество M , состоящее из 10 точек, обозначающих все исходы некоторого случайного эксперимента. Его подмножества A и B задают случайные события. Найдите $P(B|A)$ — условную вероятность B при условии A .

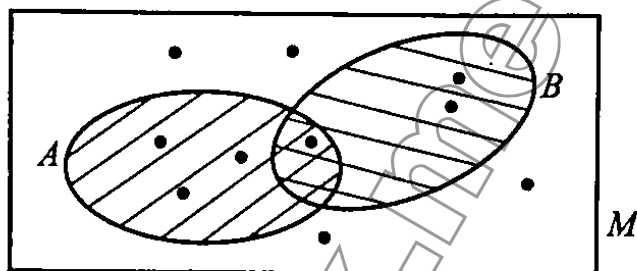


Рис. 53

339. На рисунке 54 изображено множество M , состоящее из 8 точек, обозначающих все исходы некоторого случайного эксперимента. Его подмножества A и B задают случайные события. Найдите $P(B|A)$ — условную вероятность B при условии A .

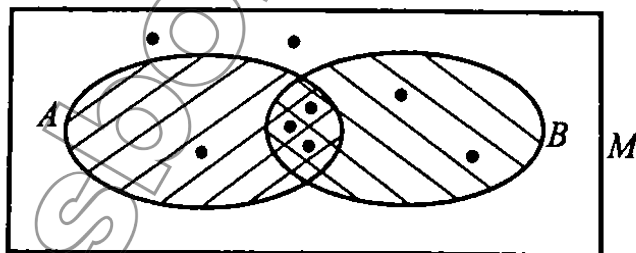


Рис. 54

340. На рисунке 55 (см. с. 109) изображено множество M , состоящее из 8 точек, обозначающих все исходы некоторого случайного эксперимента. Его подмножества A и B задают случайные события. Найдите $P(B|A)$ — условную вероятность B при условии A .

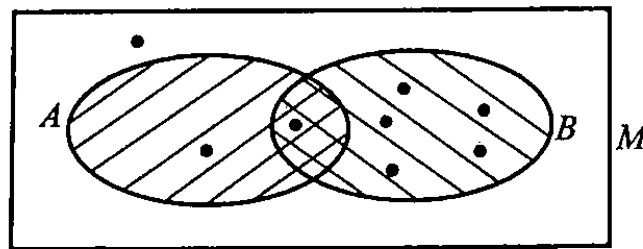


Рис. 55

341. Телефон передаёт SMS-сообщение. В случае неудачи он делает следующую попытку. Вероятность того, что SMS-сообщение удастся передать без ошибок, в каждой отдельной попытке равна 0,9. Найдите вероятность того, что для передачи сообщения потребуется не больше двух попыток.

342. Телефон передаёт SMS-сообщение. В случае неудачи он делает следующую попытку. Вероятность того, что SMS-сообщение удастся передать без ошибок, в каждой отдельной попытке равна 0,3. Найдите вероятность того, что для передачи сообщения потребуется не больше двух попыток.

343. Телефон передаёт SMS-сообщение. В случае неудачи он делает следующую попытку. Вероятность того, что SMS-сообщение удастся передать без ошибок, в каждой отдельной попытке равна 0,8. Найдите вероятность того, что для передачи сообщения потребуется не больше трёх попыток.

344. Телефон передаёт SMS-сообщение. В случае неудачи он делает следующую попытку. Вероятность того, что SMS-сообщение удастся передать без ошибок, в каждой отдельной попытке равна 0,7. Найдите вероятность того, что для передачи сообщения потребуется больше трёх попыток.

345. Ковбой Билл попадает в муху на стене с вероятностью 0,8, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Билл стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,25. На столе лежит 5 револьверов, из них только 2 пристрелянных. Ковбой Билл видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Билл попадёт в муху.

346. Ковбой Джо попадает в муху на стене с вероятностью 0,72, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джо стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,16. На столе лежит 12 револьверов, из них только 3 пристрелянных. Ковбой Джо видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джо промахнётся.
347. Васе нужно забить в дубовую доску гвоздь. Если гвоздь стальной, то он согнётся с вероятностью 0,1, а если гвоздь медный, то он согнётся с вероятностью 0,3. На столе вперемешку лежат 6 стальных и 4 медных гвоздя. Вася берёт первый попавшийся гвоздь со стола и пытается забить его в доску. Найдите вероятность того, что этот гвоздь согнётся.
348. Андрею нужно забить в дубовую доску гвоздь. Если гвоздь стальной, то он не согнётся с вероятностью 0,9, а если гвоздь алюминиевый, то он не согнётся с вероятностью 0,2. На столе вперемешку лежат 6 стальных и 4 алюминиевых гвоздя. Андрей берёт первый попавшийся гвоздь со стола и пытается забить его в доску. Найдите вероятность того, что этот гвоздь согнётся.
- 349.** Маша подбросила игральную кость 3 раза. Известно, что в сумме выпало 7 очков. Какова вероятность события «хотя бы один раз выпало три очка»?
350. Лена подбросила игральную кость 3 раза. Известно, что в сумме выпало 8 очков. Какова вероятность события «ровно два раза выпало два очка»? Ответ округлите до сотых.
351. Петя подбросил игральную кость 2 раза. Известно, что в сумме выпало 9 очков. Какова вероятность события «при первом броске выпало 4»?
352. Игорь подбросил игральную кость 2 раза. Известно, что в сумме выпало 8 очков. Какова вероятность события «при втором броске выпало 6»? Ответ округлите до сотых.

353. На рисунке 56 показано дерево случайного эксперимента. Событию A благоприятствуют исходы a, b, c, d , а событию B благоприятствуют исходы c, d, e . Найдите $P(A|B)$ — условную вероятность A при условии B .

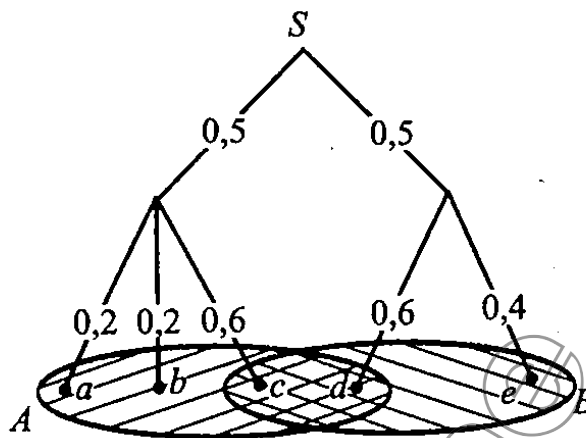


Рис. 56

354. На рисунке 57 показано дерево случайного эксперимента. Событию A благоприятствуют исходы m, n, p , а событию B благоприятствуют исходы n, p, q . Найдите $P(A|B)$ — условную вероятность A при условии B .

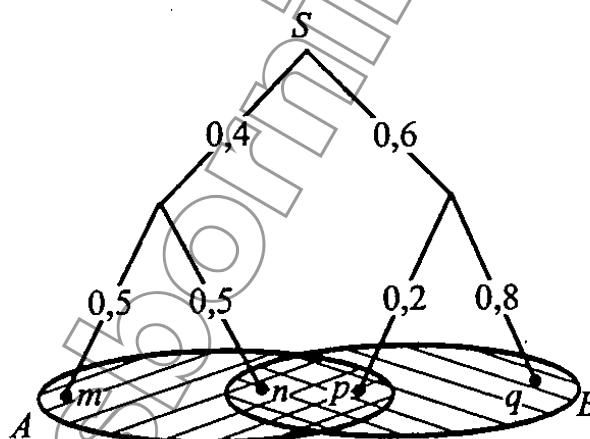


Рис. 57

355. В городе 51% взрослого населения — женщины. Работающие составляют 79,8% взрослого населения. При этом доля работающих среди взрослых мужчин составляет 90%. Для проведения исследования выбрали взрослую женщину случайным образом. Какая вероятность того, что выбранная женщина окажется работающей?

356. В городе 45% взрослого населения — мужчины. Студенты составляют 14,2% взрослого населения. При этом доля студентов среди взрослых

женщин составляет 16%. Для проведения исследования выбрали взрослого мужчину случайным образом. Какова вероятность того, что выбранный мужчина окажется студентом?

357. В ресторане «Костя» администратор предлагает гостям сыграть в следующую игру: гость бросает одновременно две игральные кости. Если он бросит комбинацию 3 и 6 очков хотя бы один раз из двух попыток, то получит комплимент от повара: мини-пиццу. Какова вероятность получить комплимент от повара? Ответ округлите до сотых.

358. В ресторане «Констанция» администратор предлагает гостям сыграть в следующую игру: гость бросает одновременно две игральные кости. Если он бросит комбинацию из одинакового числа очков на обоих кубиках хотя бы один раз из двух попыток, то получит комплимент от повара: мини-пиццу. Какова вероятность получить комплимент от повара? Ответ округлите до сотых.

359. В ресторане «Граф» администратор предлагает гостям сыграть в следующую игру: гость бросает одновременно две игральные кости. Если на обоих кубиках будет чётное число хотя бы один раз из двух попыток, то гость получит комплимент от повара в виде мороженого. Какова вероятность получить комплимент от повара? Ответ округлите до сотых.

360. В ресторане «Граф» администратор предлагает гостям сыграть в следующую игру: гость бросает одновременно две игральные кости. Если сумма очков на обоих кубиках равна 4 хотя бы один раз из двух попыток, то гость получит комплимент от повара в виде пирожного. Какова вероятность получить комплимент от повара? Ответ округлите до сотых.

361. Артём бросил одновременно две игральных кости, ни на одной из них не выпало шесть. Какова вероятность при этом условии, что в сумме выпало 9 очков?

362. Марина бросила одновременно две игральных кости, ни на одной из них не выпало три очка. Какова вероятность при этом условии, что в сумме выпало 10 очков?

363. Вика бросила игральный кубик дважды, при этом ни разу не выпало два очка. Какова вероятность при этом условии, что в сумме выпало 3 очка?

364. Света бросила игральный кубик дважды, при этом ни разу не выпало число очков, кратное трём. Какова вероятность при этом условии, что в сумме выпало 7 очков?

- 365.** Игорь бросал игральную кость до тех пор, пока сумма очков не превысила число 4. Найдите вероятность того, что потребовалось ровно 2 броска.
- 366.** Павел бросал игральную кость до тех пор, пока сумма очков не превысила число 8. Найдите вероятность того, что потребовалось ровно 2 броска. Ответ округлите до сотых.
- 367.** Егор бросал игральную кость до тех пор, пока сумма очков не превысила число 4. Найдите вероятность того, что потребовалось ровно 3 броска. Ответ округлите до сотых.
- 368.** Андрей бросал игральную кость до тех пор, пока сумма очков не превысила число 16. Найдите вероятность того, что потребовалось ровно 3 броска. Ответ округлите до сотых.
- 369.** В ящике 8 фломастеров: 5 красных и 3 зелёных. Катя вытаскивает фломастеры по очереди. Какова вероятность, что в первый раз зелёный фломастер она вытащит четвёртым по счёту? Ответ округлите до сотых.
- 370.** В ящике 27 фломастеров: 15 красных и 12 синих. Миша вытаскивает фломастеры по очереди. Какова вероятность, что в первый раз синий фломастер он вытащит четвёртым по счёту? Ответ округлите до сотых.
- 371.** В ящике 26 цветных карандашей: 12 красных и 14 фиолетовых. Гриша вытаскивает цветные карандаши по очереди. Какова вероятность, что в первый раз красный карандаш он вытащит третьим по счёту?
- 372.** В ящике 50 цветных карандашей: 21 синий и 29 оранжевых. Ксюша вытаскивает цветные карандаши по очереди. Какова вероятность, что в первый раз синий карандаш она вытащит третьим по счёту?
- 373.** У Вадима есть два игральных кубика. Первый из них обычный, а на гранях второго кубика числа 2 и 4 встречаются по три раза. В остальном кубики одинаковые. Вадим наудачу выбрал один из двух кубиков и бросил его два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 2 и 4 очка. Какова вероятность того, что он бросил второй кубик?
- 374.** У Петра есть два игральных кубика. Первый из них обычный, а на гранях второго кубика числа 1, 3 и 6 встречаются по два раза. В остальном кубики одинаковые. Пётр наудачу выбрал один из двух кубиков и бросил его два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 1 и 6 очков. Какова вероятность того, что он бросил первый кубик?
- 375.** У Олеси есть два игральных кубика. Первый из них обычный, а на гранях второго кубика числа 1, 2 и 4 встречаются по два раза. В остальном кубики одинаковые. Олеся наудачу выбрала один из двух кубиков и

бросила его два раза. Известно, что оба раза выпало два очка. Какова вероятность того, что она бросила второй кубик? Ответ округлите до сотых.

376. У Алисы есть два игральных кубика. Первый из них обычный, а на гранях второго кубика числа 1 и 3 встречаются по три раза. В остальных кубики одинаковые. Алиса наудачу выбрала один из двух кубиков и бросила его два раза. Известно, что оба раза выпало 1 очко. Какова вероятность того, что она бросила первый кубик?

377. При подозрении на наличие некоторого заболевания пациента отправляют на ПЦР-тест. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 88% случаев. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в среднем в 92% случаев. Известно, что в среднем тест оказывается положительным у 11% пациентов некоторой поликлиники, направленных на тестирование. При обследовании пациента А. врач направил его на ПЦР-тест, который оказался положительным. Какова вероятность того, что пациент А. действительно имеет это заболевание?

378. При подозрении на наличие некоторого заболевания пациента отправляют на ПЦР-тест. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 89% случаев. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в среднем в 91% случаев. Известно, что в среднем тест оказывается положительным у 15% пациентов некоторой поликлиники, направленных на тестирование. При обследовании пациента В. врач направил его на ПЦР-тест, который оказался положительным. Какова вероятность того, что пациент В. действительно имеет это заболевание?

379. При подозрении на наличие некоторого заболевания пациента отправляют на ПЦР-тест. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 82% случаев. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в среднем в 90% случаев. Известно, что в среднем тест оказывается положительным у 40% пациентов некоторой поликлиники, направленных на тестирование. При обследовании пациента У. врач направил его на ПЦР-тест, который оказался отрицательным. Какова вероятность того, что пациент У. действительно не имеет этого заболевания?

380. При подозрении на наличие некоторого заболевания пациента отправляют на ПЦР-тест. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 85% случаев. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в среднем в 95% случаев. Известно, что в среднем тест оказывается отрицательным у 38% пациентов некоторой поликлиники, направленных на тестирование. При обследовании пациента С. врач направил его на ПЦР-тест, который оказался отрицательным. Какова ве-

роятность того, что пациент С. действительно не имеет этого заболевания? Ответ округлите до сотых.

381. Турнир по футболу проводится по олимпийской системе в несколько туров: если в туре участвует чётное число команд, то они разбиваются на случайные игровые пары. Если число команд нечётно, то с помощью жребия выбираются случайные игровые пары, а одна команда остаётся без пары и не участвует в туре. Проигравшая в каждой паре команда (в случае ничьей проводятся серии пенальти до победы одного из участников) выбывает из турнира, а победители и команда без пары, если она есть, выходят в следующий тур, который проводится по таким же правилам. Так продолжается до тех пор, пока не останутся две команды, которые играют между собой финальный тур, то есть последний матч, который выявляет победителя турнира. Всего в турнире участвует 20 команд, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждого игрока равна 0,5. Среди игроков две команды из Ставрополя «Факел» и «Пламя». Определите вероятность того, что в каком-то туре им придётся сыграть друг с другом.

382. Турнир по бадминтону проводится по олимпийской системе в несколько туров: если в туре участвует чётное число игроков, то они разбиваются на случайные игровые пары. Если число игроков нечётно, то с помощью жребия выбираются случайные игровые пары, а один игрок остаётся без пары и не участвует в туре. Проигравший в каждой паре (ничья невозможна) выбывает из турнира, а победители и игрок без пары, если он есть, выходят в следующий тур, который проводится по таким же правилам. Так продолжается до тех пор, пока не останутся двое, которые играют между собой финальный тур, то есть последнюю партию, которая выявляет победителя турнира. Всего в турнире участвует 25 игроков, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждого игрока равна 0,5. Среди игроков две подруги — Виолетта и Анжелика. Определите вероятность того, что им в каком-то туре придётся сыграть друг с другом.

383. Турнир по теннису проводится по олимпийской системе в несколько туров: если в туре участвует чётное число игроков, то они разбиваются на случайные игровые пары. Проигравший в каждой паре (ничья невозможна) выбывает из турнира, а победители выходят в следующий тур, который проводится по таким же правилам. Так продолжается до тех пор, пока не останутся двое, которые играют между собой финальный тур, то есть последнюю партию, которая выявляет победителя турнира. Всего в турнире

участвует 16 игроков, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждого игрока равна $\frac{1}{2}$. Среди игроков два брата — Николай и Юрий. Определите вероятность того, что им в каком-то туре придётся сыграть друг с другом.

384. Турнир по волейболу проводится по олимпийской системе в несколько туров: если в туре участвует чётное число команд, то они разбиваются на случайные игровые пары. Если число команд нечётно, то с помощью жребия выбираются случайные игровые пары, а одна остаётся без пары и не участвует в туре. Проигравшая в каждой паре (ничья невозможна) команда выбывает из турнира, а победители и команда без пары, если она есть, выходят в следующий тур, который проводится по таким же правилам. Так продолжается до тех пор, пока не останутся две команды, которые играют между собой финальный тур, то есть последнюю партию, которая выявляет победителя турнира. Всего в турнире участвует 125 команд, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждого игрока равна $\frac{1}{2}$. Среди них есть ровно две команды из Красноярска. Определите вероятность того, что им в каком-то туре придётся сыграть друг с другом.

385. В некотором турнире участвуют 8 команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из турнира, а победившая команда играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых трёх играх победила команда «Игрек». Какова вероятность того, что эта команда выигрывает четвёртый раунд?

386. В некоторой викторине участвуют 7 команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из викторины, а победившая команда играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых двух играх победила команда «Зет». Какова вероятность того, что эта команда выигрывает третий раунд?

387. В некоторой викторине участвуют 35 команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из викторины, а победившая команда

играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых двадцати трёх раундах победила команда «Омега». Какова вероятность того, что эта команда выиграет двадцать четвёртый раунд?

388. В некоторой викторине участвуют 14 команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из викторины, а победившая команда играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых шести раундах победила команда «Дельта». Какова вероятность того, что эта команда выиграет седьмой раунд?

389. Владимир в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,3 при каждом отдельном выстреле. Какое наименьшее число патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не менее 0,75?

390. Юрий в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,5 при каждом отдельном выстреле. Сколько патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не менее 0,95?

391. Павел в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,2 при каждом отдельном выстреле. Сколько патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не менее 0,5?

392. Себастьян в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,7 при каждом отдельном выстреле. Сколько патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не менее 0,93?

7.3. Математическое ожидание

Пусть в результате эксперимента обязательно наступает ровно одно из событий A_1, A_2, \dots, A_m . При этом $P(A_1) = p_1, P(A_2) = p_2, \dots, P(A_m) = p_m$ ($p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$).

Тогда случайной величиной F называется всякая функция, которая каждому событию A_i ставит в соответствие некоторое число x_i , то есть $F(A_1) = x_1, F(A_2) = x_2, \dots, F(A_m) = x_m$. Для задания случайной величины удобно воспользоваться таблицей:

Значения событий	x_1	x_2	...	x_m
Вероятности событий	p_1	p_2	...	p_m

Математическим ожиданием случайной величины F называется число $E(F)$, которое выражается формулой:

$$E(F) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_m x_m.$$

Часто вместо буквы F для обозначения случайной величины используют другие обозначения, например X или ξ . При этом скобки после буквы E часто опускают, то есть записи $E(X)$ и EX обозначают одно и то же — математическое ожидание случайной величины X .

Пример. 1 Магазин «Price» закупил 1500 художественных календарей: 120 штук по 200 рублей, 480 штук по 120, 900 штук по 90 рублей. Было принято решение все календари продавать по одной цене — 140 рублей за один календарь. Владимир случайно купил один календарь. Найдите на сколько рублей математическое ожидание стоимости одного календаря оказалось меньше стоимости одного календаря, установленной в магазине.

Решение. Понятно, что случайной величиной X является стоимость купленного календаря. Поэтому случайная величина принимает три значения — 200; 120; 90. Найдём вероятности покупки одного календаря каждого вида соответственно:

$$\frac{120}{1500} = 0,08, \quad \frac{480}{1500} = 0,32, \quad \frac{900}{1500} = 0,6.$$

Получаем следующую таблицу распределения случайной величины X .

Значения X	200	120	90
Вероятности	0,08	0,32	0,6

$$E(X) = 200 \cdot 0,08 + 120 \cdot 0,32 + 90 \cdot 0,6 = 108,4.$$

Искомая разность равна $140 - 108,4 = 31,6$.

Ответ: 31,6.

Принято говорить, что математическое ожидание характеризует, какое значение «в среднем» принимает случайная величина.

Известно, что $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Рассмотрим ещё два примера нахождение математического ожидания некоторых случайных величин при бросках симметричной монеты.

При любом броске с вероятностью $\frac{1}{2}$ выпадает «орёл» или «решка», которые обозначают соответственно O или P .

Пример. 2 Симметричную монету бросают до тех пор, пока не выпадет «орёл». Найдём математическое ожидание числа бросков.

Решение. Обозначим искомое математическое ожидание символом E_O . При первом броске выпадает O или P .

Если выпадает O , то полагаем $x_1 = 1$ и $p_1 = \frac{1}{2}$. Если же выпадает P , то математическое ожидание выпадения O после первого броска естественно считать на единицу больше E_O (см. рис. 58).

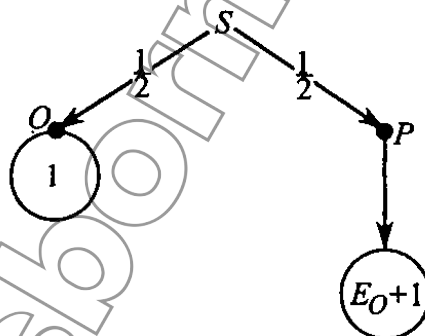


Рис. 58

Поэтому $E_O = 1 \cdot \frac{1}{2} + (E_O + 1) \cdot \frac{1}{2}$, откуда $E_O = 2$.

Ответ: 2.

Замечание. Математическое ожидание E_P бросания монеты до тех пор, пока не выпадет «решка», находится аналогично и равно 2.

Пример. 3 Симметричную монету бросают до тех пор, пока не выпадет «орёл» и «решка» по одному разу. Найдём математическое ожидание числа бросков.

Решение. Обозначим искомое математическое ожидание символом E_{OP} . При первом броске выпадает O или P .

Если выпадает O , то математическое ожидание выпадения P после этого равно $2 + 1 = 3$, так как в предыдущем примере мы установили, что $E_P = 2$.

Если же выпадает P , то математическое ожидание выпадения O после этого равно $2 + 1 = 3$, так как в предыдущем примере мы установили, что $E_O = 2$ (см. рис. 59)

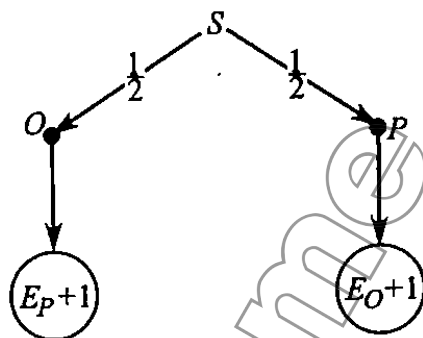


Рис. 59

Отсюда получаем, что $E_{OP} = 3 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 3$

Ответ: 3.

Аналогично предыдущему можно доказать, что $E_{OO} = E_{PP} = 4$, $E_{OOO} = E_{PPP} = 6$, $E_{OOPP} = 5,5$, где нижний индекс у буквы E показывает до какого числа выпадения «орлов» и «решек» надо бросать монету.

393. Найдите математическое ожидание количества выпавших «орлов» при двадцати семи бросаниях симметричной монеты.

394. Найдите математическое ожидание количества выпавших «решек» при семи бросаниях симметричной монеты.

395. Найдите математическое ожидание случайной величины X , функция распределения которой задана таблицей:

Значения X	0	1	2	3	4
Вероятности	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

396. Найдите математическое ожидание случайной величины X , функция распределения которой задана таблицей:

Значения X	0	-1	-2	3
Вероятности	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

- 397.** Симметричную монету бросают до тех пор, пока не выпадет два «орла» и «решка». Найдите математическое ожидание числа бросков.
- 398.** Симметричную монету бросают до тех пор, пока не выпадет три «орла» и «решка». Найдите математическое ожидание числа бросков.
- 399.** Магазин «Price» закупил 1800 художественных открыток: 180 штук по 150 рублей, 540 штук по 120 рублей, 1080 штук по 75 рублей. Директор магазина принял решение продавать каждую открытку по одной цене, равной математическому ожиданию стоимости одной открытки при случайной её покупке. Найдите стоимость одной открытки, установленной директором магазина.
- 400.** В таблице показано количество билетов и возможные выигрыши беспроигрышной лотереи (в рублях). Цена одного билета лотереи равна 400 рублей. Всего выпущено 1600 билетов. Горислав покупает один случайный билет. На сколько рублей цена купленного билета превышает математическое ожидание выигрыша?

Выигрыш	100	200	500	8 000
Количество	960	480	144	16

Задания для контроля

Вариант 1

- В ящике лежат цветные шарики: 7 жёлтых, 9 оранжевых и 20 зелёных. Маргарита достаёт случайным образом два шарика. Какова вероятность, что она достанет один жёлтый и один оранжевый шарик?
- Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,85, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,34. На столе лежит 17 револьверов, из них только 7 пристрелянных. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватается первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.
- Турнир по настольному теннису проводится по олимпийской системе в несколько туров: если в туре участвует чётное число игроков, то они разбиваются на случайные игровые пары. Если число игроков нечётно, то

с помощью жребия выбираются случайные игровые пары, а один игрок остаётся без пары и не участвует в туре. Проигравший в каждой паре (ничья невозможна) выбывает из турнира, а победители и игрок без пары, если он есть, выходят в следующий тур, который проводится по таким же правилам. Так продолжается до тех пор, пока не останутся двое, которые играют между собой финальный тур, то есть последнюю партию, которая выявляет победителя турнира. Всего в турнире участвует 80 игроков, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждого игрока равна 0,5. Среди игроков два друга — Максим и Олег. Определите вероятность того, что этим двоим в каком-то туре придётся сыграть друг с другом.

4. В таблице показано количество билетов и возможные выигрыши беспроигрышной лотереи (в рублях). Цена одного билета лотереи равна 400 рублей. Всего выпущено 2000 билетов. Леонид покупает один случайный билет. На сколько рублей цена купленного билета превышает математическое ожидание выигрыша?

Выигрыш	75	200	500	25 000
Количество	800	720	476	4

5. В ящике 25 фломастеров: 23 фиолетовых и 2 красных. Виктор вытаскивает фломастеры по очереди. Какова вероятность, что в первый раз красный фломастер он вытащит четвёртым по счёту?

Вариант 2

1. На рисунке 60 изображено множество M , состоящее из 12 точек, обозначающих все исходы некоторого случайного эксперимента. Его подмножества A и B задают случайные события. Найдите $P(B|A)$ — условную вероятность B при условии A .

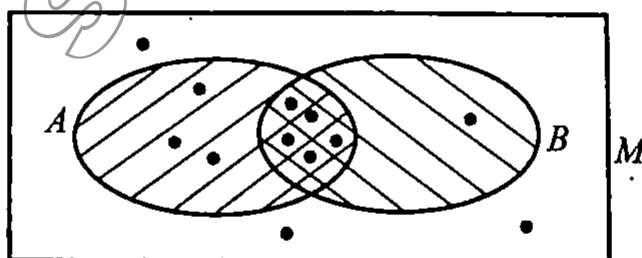


Рис. 60

2. Найдите математическое ожидание количества выпавших «орлов» при 19 бросках симметричной монеты.

3. Турнир по бадминтону проводится по олимпийской системе в несколько туров: если в туре участвует чётное число игроков, то они разбиваются на случайные игровые пары. Если число игроков нечётно, то с помощью жребия выбираются случайные игровые пары, а один игрок остаётся без пары и не участвует в туре. Проигравший в каждой паре (ничья невозможна) выбывает из турнира, а победители и игрок без пары, если он есть, выходят в следующий тур, который проводится по таким же правилам. Так продолжается до тех пор, пока не останутся двое, которые играют между собой финальный тур, то есть последнюю партию, которая выявляет победителя турнира. Всего в турнире участвует 160 игроков, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждого игрока равна $\frac{1}{2}$. Среди игроков две подруги — Стелла и Алина. Определите вероятность того, что этим двоим в каком-то туре придётся сыграть друг с другом.

4. У Оксаны есть два игральных кубика. Первый из них обычный, а на гранях второго кубика числа 2, 3 и 4 встречаются по два раза. В остальном кубики одинаковые. Оксана наудачу выбрала один из двух кубиков и бросила его два раза. Известно, что оба раза не выпадало ни одно из чисел, кроме 2, 3 и 4 (выпавшие числа могли повторяться). Какова вероятность того, что она бросила второй кубик?

5. На рисунке 61 показано дерево случайного эксперимента. Событию A благоприятствуют исходы x, y, z, t , а событию B благоприятствуют исходы z, t, p . Найдите $P(A|B)$ — условную вероятность A при условии B .

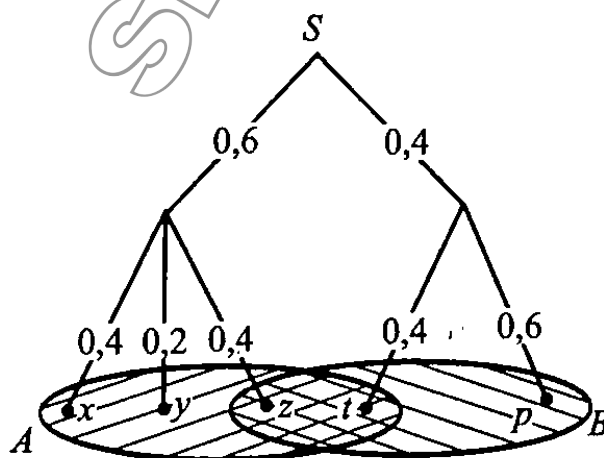


Рис. 61

Вариант 3

1. На рисунке 62 изображено множество M , состоящее из 12 точек, обозначающих все исходы некоторого случайного эксперимента. Его подмножества A и B задают случайные события. Найдите $P(B|A)$ — условную вероятность B при условии A .

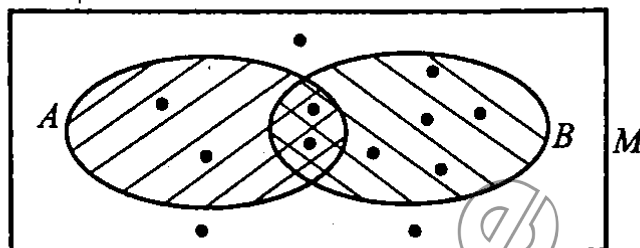


Рис. 62

2. В некоторой викторине участвуют 57 команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из викторины, а победившая команда играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых тридцати восьми раундах победила команда «Олимп-Икс». Какова вероятность того, что эта команда выиграет тридцать девятый раунд?

3. Алевтина бросила одновременно две игральных кости, ни на одной из них не выпало нечётное число очков. Какова вероятность при этом условии, что в сумме выпало 8 очков? Результат округлите до сотых.

4. При подозрении на наличие некоторого заболевания пациента отправляют на специальный тест. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 92% случаев. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в среднем в 88% случаев. Известно, что в среднем тест оказывается положительным у 23% пациентов некоторой поликлиники, направленных на тестирование. При обследовании пациента К. врач направил его на специальный тест, который оказался положительным. Какова вероятность того, что пациент К. действительно имеет это заболевание?

5. В Тридесятом царстве бывает два типа погоды: хорошая и чудесная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,6 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 9 марта, погода в Тридесятом царстве хорошая. Найдите вероятность того, что 12 марта в Тридесятом царстве будет тоже хорошая погода.

Вариант 4

1. Дмитрий бросает симметричную монету 23 раза. Найдите отношение вероятности события «орёл выпадет ровно 8 раз» к вероятности события «орёл выпадет ровно 14 раз».
2. В некоторой викторине участвуют 57 команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из викторины, а победившая команда играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых сорока восьми раундах победила команда «Виват-А». Какова вероятность того, что эта команда выиграет сорок девятый раунд?
3. Симметричную монету подбрасывают до тех пор, пока не выпадут три «орла» и две «решки». Найдите математическое ожидание числа подбрасываний.
4. При подозрении на наличие некоторого заболевания пациента отправляют на специальный тест. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 82% случаев. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в среднем в 90% случаев. Известно, что в среднем тест оказывается положительным у 25% пациентов некоторой поликлиники, направленных на тестирование. При обследовании пациента F. врач направил его на специальный тест, который оказался отрицательным. Какова вероятность того, что пациент F. не имеет этого заболевания?

5. На рисунке 63 показано дерево случайного эксперимента. Событию A благоприятствуют исходы u, v, w , а событию B благоприятствуют исходы v, w, f . Найдите $P(A|B)$ — условную вероятность A при условии B .

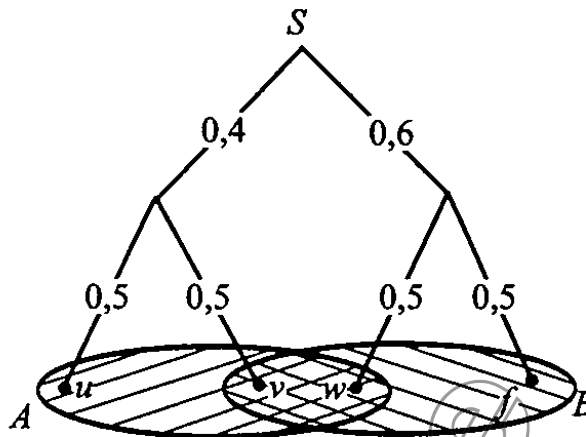


Рис. 63

§ 8. Нахождение величины из формулы

Всякая формула представляет собой уравнение, содержащее переменные. Выражение одних переменных через другие осуществляется с помощью равносильных преобразований этого уравнения.

Вспомним равносильные преобразования.

1. При переносе слагаемого из одной части уравнения в другую его знак меняется на противоположный.

2. Обе части уравнения можно умножить (или разделить) на одно и то же ненулевое число.

Также важно понимать, что многие физические и экономические величины по своей природе всегда неотрицательны (или даже строго положительны).

401. Кинетическая энергия тела (в джоулях) вычисляется по формуле

$$E = \frac{mv^2}{2},$$
 где m — масса тела (в килограммах), а v — его скорость

(в м/с). Пользуясь этой формулой, найдите E (в джоулях), если $v = 6$ м/с, $m = 15$ кг.

402. Мощность постоянного тока (в ваттах) вычисляется по формуле $P = I^2R$, где I — сила тока в амперах, R — сопротивление (в омах).

Пользуясь этой формулой, найдите P (в ваттах), если $R = 8$ Ом и $I = 4,5$ А.

403. Второй закон Ньютона можно записать в виде $f = ma$, где f — сила (в ньютонах), действующая на тело, m — его масса (в килограммах), a — ускорение, с которым движется тело (в м/с²). Найдите m (в килограммах), если $f = 222$ (Н) и $a = 37$ (м/с²).

404. Закон Гука можно записать в виде $f = kx$, где f — сила (в ньютонах), с которой сжимают пружину, x — абсолютное удлинение (сжатие) пружины (в метрах), а k — коэффициент упругости. Пользуясь этой формулой, найдите x (в метрах), если $f = 42$ Н и $k = 6 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$.

405. Радиус окружности, описанной около треугольника, можно вычис-

лить по формуле $R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$, где a — сторона, а α — противолежащий

ей угол треугольника. Пользуясь этой формулой, найдите R , если $a = 4$

и $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.

406. Радиус окружности, описанной около треугольника, можно вычислить по формуле $R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$, где a — сторона, α — противолежащий ей угол треугольника. Пользуясь этой формулой, найдите a , если $R = 16$ и $\sin \alpha = \frac{3}{8}$.

407. Теорему синусов можно записать в виде $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$, где a и b — две стороны треугольника, α и β — углы треугольника, лежащие против них, соответственно. Пользуясь этой формулой, найдите a , если $b = 8$, $\sin \alpha = \frac{1}{6}$ и $\sin \beta = \frac{1}{3}$.

408. Теорему синусов можно записать в виде $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$, где a и b — две стороны треугольника, α и β — углы треугольника, лежащие против них, соответственно. Пользуясь этой формулой, найдите величину $\sin \alpha$, если $a = 17$, $b = 5$, $\sin \beta = \frac{1}{34}$.

409. Площадь треугольника со сторонами a , b и c можно найти по формуле $S = \frac{1}{2}r(a + b + c)$, где r — радиус окружности, вписанной в этот треугольник. Найдите c , если его стороны a и b соответственно равны 5 и 12, $S = 30$ и $r = 2$.

410. Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности вычисляется по формуле $r = \frac{a + b - c}{2}$, где a и b — катеты, а c — гипотенуза. Пользуясь этой формулой, найдите c , если $a = 8$, $b = 15$, $r = 3$.

411. Площадь треугольника вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$, где b и c — две стороны треугольника, а α — угол между ними. Пользуясь этой формулой, найдите площадь S , если $b = 15$, $c = 8$, $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.

412. Площадь четырёхугольника можно вычислить по формуле $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin \alpha$, где d_1 и d_2 — длины диагоналей четырёхугольни-

ка, α — угол между диагоналями. Пользуясь этой формулой, найдите площадь S , если $d_1 = 6$, $d_2 = 11$, $\sin \alpha = \frac{3}{11}$.

413. Диагональ прямоугольного параллелепипеда вычисляется по формуле $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, где a , b и c — длины трёх его рёбер, выходящих из одной вершины. Пользуясь этой формулой, найдите c (в метрах), если d , a и b равны соответственно 25, 12 и 9 (метров).

414. Диагональ прямоугольного параллелепипеда вычисляется по формуле $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, где a , b и c — длины трёх его рёбер, выходящих из одной вершины. Пользуясь этой формулой, найдите b (в метрах), если d , a и c равны соответственно 25, 16 и 15 (метров).

415. Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда с рёбрами a , b и c вычисляется по формуле $S = 2ab + 2ac + 2bc$. Найдите площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, если его рёбра, выходящие из одной вершины, имеют длины $\sqrt{2}$, $\sqrt{4,5}$, $\sqrt{4,5}$.

416. Длина медианы m_c , проведённой к стороне c треугольника со сторонами a , b и c , вычисляется по формуле $m_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$. Найдите медиану m_c , если $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{7}$, $c = \sqrt{15}$.

417. В фирме «Сквозь пробки» стоимость поездки на такси длительностью меньше 5 минут составляет 120 рублей. Если поездка длится 5 минут или более, то её стоимость (в рублях) рассчитывается по формуле $C = 120 + 9(t - 5)$, где t — длительность поездки, выраженная в минутах ($t \geq 5$). Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость 25-минутной поездки. Ответ дайте в рублях.

418. Зная длину своего шага, человек может приближённо подсчитать пройденное им расстояние s по формуле $s = nl$, где n — число шагов, l — длина шага. Какое расстояние прошёл человек, если $l = 55$ см, $n = 2000$? Ответ дайте в метрах.

419. Сумма углов правильного выпуклого многоугольника вычисляется по формуле $\Sigma = (n - 2)\pi$, где n — количество его углов. Пользуясь этой формулой, найдите n , если $\Sigma = 15\pi$.

420. Сумма Σ всех делителей числа 3^n , где n — натуральное число, находится по формуле $\Sigma = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$. Пользуясь этой формулой, найдите n , если $\Sigma = 40$.

Задания для контроля

Вариант 1

1. Работа постоянного тока (в джоулях) вычисляется по формуле $A = \frac{U^2 t}{R}$, где U — напряжение (в вольтах), R — сопротивление (в омах), t — время (в секундах). Пользуясь этой формулой, найдите A (в джоулях), если $t = 7$ с, $U = 5$ В и $R = 5$ Ом.
2. Среднее геометрическое трёх чисел a , b и c вычисляется по формуле $g = \sqrt[3]{abc}$. Вычислите среднее геометрическое чисел 9, 15, 25.
3. Длина биссектрисы l_c , проведённой к стороне c треугольника со сторонами a , b и c , вычисляется по формуле $l_c = \frac{1}{a+b} \sqrt{ab((a+b)^2 - c^2)}$. Найдите биссектрису l_c , если $a = 2$, $b = 3$, $c = \sqrt{19}$.
4. Площадь четырёхугольника находится по формуле $S = \frac{d_1 d_2 \sin \alpha}{2}$, где d_1 и d_2 — длины диагоналей четырёхугольника, α — угол между диагоналями. Пользуясь этой формулой, найдите длину диагонали d_1 , если $d_2 = 14$, $\sin \alpha = \frac{4}{7}$, $S = 50$.
5. Площадь треугольника вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$, где b и c — две стороны треугольника, а α — угол между ними. Пользуясь этой формулой, найдите величину $\sin \alpha$, если $b = 12$, $c = 20$ и $S = 15$.

Вариант 2

1. Работа постоянного тока (в джоулях) вычисляется по формуле $A = I^2 R t$, где I — сила тока (в амперах), R — сопротивление (в омах), t — время (в секундах). Пользуясь этой формулой, найдите A (в джоулях), если $t = 4$ с, $I = 5$ А и $R = 3$ Ом.
2. Чтобы перевести температуру из шкалы Цельсия в шкалу Фаренгейта, пользуются формулой $t_F = 1,8t_C + 32$, где t_C — температура в градусах по шкале Цельсия, t_F — температура в градусах по шкале Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Фаренгейта соответствуют -2 градуса по шкале Цельсия?

3. Количество теплоты (в джоулях), полученное однородным телом при нагревании, вычисляется по формуле $Q = cm(t_2 - t_1)$, где c — удельная теплоёмкость (в $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$), m — масса тела (в кг), t_1 — начальная температура (в кельвинах), а t_2 — конечная температура тела (в кельвинах). Пользуясь этой формулой, найдите Q (в джоулях), если $t_2 = 600 \text{ К}$, $c = 300 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$, $m = 1,5 \text{ кг}$ и $t_1 = 590 \text{ К}$.

4. Потенциальная энергия тела (в джоулях) в поле тяготения Земли вблизи поверхности вычисляется по формуле $E = mgh$, где m — масса тела в килограммах, g — гравитационная постоянная, а h — высота (в метрах), на которой находится тело относительно условного нуля. Пользуясь этой формулой, найдите m (в килограммах), если $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, $h = 5 \text{ м}$, а $E = 196$.

5. Площадь треугольника можно вычислить по формуле $S = \frac{abc}{4R}$, где a , b и c — стороны треугольника, а R — радиус окружности, описанной около этого треугольника. Пользуясь этой формулой, найдите b , если $a = 11$, $c = 14$, $S = 847$, $R = 1$.

Вариант 3

1. В фирме «Гвидон» стоимость (в рублях) колодца из железобетонных колец рассчитывается по формуле $C = 5000 + 3200n$, где n — число колец, установленных при копании колодца. Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость колодца из шести колец. Ответ укажите в рублях.

2. Площадь треугольника вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$, где b и c — стороны треугольника, а α — угол между ними. Пользуясь этой формулой, найдите площадь S , если $b = 15$, $c = 8$, $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.

3. Теорему косинусов можно записать в виде $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, где a , b и c — стороны треугольника, а γ — угол между сторонами a и b . Пользуясь этой формулой, найдите величину $\cos \gamma$, если $a = 4$, $b = 7$, $c = 10$.

4. Площадь треугольника можно вычислить по формуле $S = \frac{(a + b + c)r}{2}$, где a , b и c — стороны треугольника, а r — радиус окружности, вписанной в этот треугольник. Пользуясь указанной формулой, найдите b , если $a = 8$, $c = 11$, $r = \sqrt{3}$, $S = 20\sqrt{3}$.
5. Длина биссектрисы l_c , проведённой к стороне c треугольника со сторонами a , b и c , вычисляется по формуле $l_c = \frac{1}{a+b} \sqrt{ab((a+b)^2 - c^2)}$. Найдите биссектрису l_c , если $a = 1$, $b = 1$, $c = \sqrt{3}$.

Вариант 4

1. Ускорение тела (в $\frac{M}{c^2}$) при равномерном движении по окружности можно вычислить по формуле $a = \omega^2 R$, где ω — угловая скорость вращения (в c^{-1}), а R — радиус окружности в метрах. Пользуясь этой формулой, найдите a (в M/c^2), если $R = 5$ м, $\omega = 9 c^{-1}$.
2. Перевести температуру из шкалы Фаренгейта в шкалу Цельсия позволяет формула $t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32)$, где t_C — температура в градусах по шкале Цельсия, t_F — температура в градусах по шкале Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Цельсия соответствуют 140 градусов по шкале Фаренгейта?
3. Среднее квадратичное трёх чисел a , b и c вычисляется по формуле $q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}$. Найдите по этой формуле среднее квадратичное чисел 2 , $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{7}$.
4. Площадь четырёхугольника находится по формуле $S = \frac{d_1 d_2 \sin \alpha}{2}$, где d_1 и d_2 — длины диагоналей четырёхугольника, α — угол между диагоналями. Пользуясь этой формулой, найдите длину диагонали d_1 , если $d_2 = 80$, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $S = 96$.
5. Теорему косинусов можно записать в виде $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$, где a , b и c — стороны треугольника, а γ — угол между сторонами a и b . Пользуясь этой формулой, найдите величину $\cos \gamma$, если $a = 1$, $b = 1$, $c = \sqrt{3}$.

§ 9. Координатная прямая и числовые промежутки

Иногда числа обозначают на координатной прямой. В математике принято числовую прямую направлять слева направо. То число, которое правее, то и больше. Например, на рисунке 64 видно, что $b > a$.

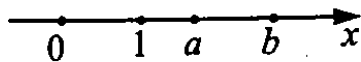


Рис. 64

Нередко решение того или иного неравенства изображают на координатной прямой, штрихуя соответствующие промежутки. При этом обычно граничные значения изображают жирными точками, если они входят в промежуток, и «выколотыми» точками, если они не входят. Так, на рисунке 65 изображено множество $(-\infty; 1) \cup [3; +\infty)$.

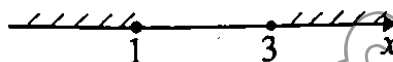


Рис. 65

421. На координатной прямой отмечены числа a и b (см. рис. 66). Какое из следующих чисел наибольшее?

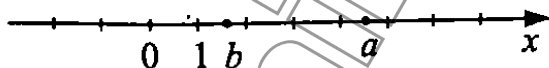


Рис. 66

- 1) a 2) b 3) $3b$ 4) $a + 2$

422. На координатной прямой отмечены числа a и b (см. рис. 67). Какое из следующих чисел наибольшее?

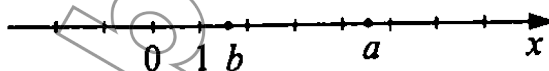


Рис. 67

- 1) a 2) b 3) $2,5b$ 4) $a + 1$

423. На координатной прямой отмечены точки M , N , K и L (см. рис. 68). Одна из них соответствует числу $\sqrt{500}$. Какая это точка?

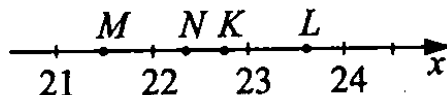


Рис. 68

- 1) M 2) N 3) K 4) L

424. На координатной прямой отмечены точки M , N , K и L (см. рис. 69). Одна из них соответствует числу $\sqrt{520}$. Какая это точка?

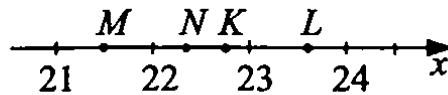


Рис. 69

1) M 2) N 3) K 4) L

425. Про число s известно, что оно равно $\sqrt{11}$. Каждому из четырёх чисел в левом столбце соответствует отрезок, которому это число принадлежит. Установите соответствие между числами и отрезками из правого столбца.

ЧИСЛА

ОТРЕЗКИ

А) $s^2 - 6$

1) $[1; 2]$

Б) $\frac{\sqrt{s}}{s}$

2) $[5; 6]$

В) \sqrt{s}

3) $[3; 4]$

Г) $\frac{10}{s}$

4) $[0; 1]$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

426. Про число m известно, что оно равно $\sqrt{8}$. Каждому из четырёх чисел в левом столбце соответствует отрезок, которому это число принадлежит. Установите соответствие между числами и отрезками из правого столбца.

ЧИСЛА

ОТРЕЗКИ

А) $m^2 - 3$

1) $[1; 2]$

Б) \sqrt{m}

2) $[5; 6]$

В) $\frac{\sqrt{m}}{m}$

3) $[3; 4]$

Г) $\frac{9}{m}$

4) $[0; 1]$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

427. Каждому из четырёх чисел в левом столбце соответствует отрезок, которому оно принадлежит. Установите соответствие между числами и отрезками из правого столбца.

ЧИСЛА	ОТРЕЗКИ
А) $\frac{14}{11}$	1) [4; 5]
Б) $\log_2 9$	2) [2; 3]
В) $\sqrt{17}$	3) [3; 4]
Г) $0,42^{-1}$	4) [1; 2]

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

428. Каждому из четырёх чисел в левом столбце соответствует отрезок, которому это число принадлежит. Установите соответствие между числами и отрезками из правого столбца.

ЧИСЛА	ОТРЕЗКИ
А) $\log_4 49$	1) [4; 5]
Б) $\frac{19}{4}$	2) [5; 6]
В) $\sqrt{11}$	3) [2; 3]
Г) $(0,18)^{-1}$	4) [3; 4]

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

429. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА	РЕШЕНИЯ
А) $16^x \geq 16$	1) [16; $+\infty$)
Б) $\left(\frac{1}{16}\right)^x \geq 16$	2) $(-\infty; -1]$
В) $\log_{16} x \geq 1$	3) (0; 16]
Г) $\log_{16} x \leq 1$	4) [1; $+\infty$)

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

430. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

А) $4^x \geq 4$

Б) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \geq 4$

В) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \leq 4$

Г) $4^x \leq 4$

РЕШЕНИЯ

1) $(-\infty; -1]$

2) $[1; +\infty)$

3) $(-\infty; 1]$

4) $[-1; +\infty)$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

431. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

А) $\frac{x-2}{x-5} \leq 0$

Б) $(x-2)(x-5) \leq 0$

В) $\log_3(x-2) \geq 0$

Г) $(x-2)(x-5) \geq 0$

РЕШЕНИЯ

1) $x \leq 2$ или $x \geq 5$

2) $x \geq 3$

3) $2 \leq x \leq 5$

4) $2 \leq x < 5$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

432. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

А) $(x - 3)(x - 4) \leq 0$

Б) $\frac{x - 3}{x - 4} \geq 0$

В) $(x - 3)^2(x - 4) \leq 0$

Г) $\frac{(x - 4)^2}{x - 3} \geq 0$

РЕШЕНИЯ

1) $x \leq 3$ или $x > 4$

2) $3 \leq x \leq 4$

3) $x \leq 4$

4) $x > 3$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

433. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

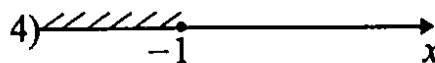
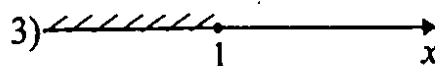
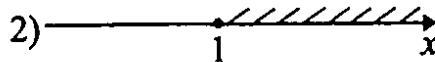
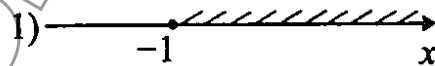
А) $3^x \geq 3$

Б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 3$

В) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 3$

Г) $3^x \leq 3$

РЕШЕНИЯ



В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

434. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

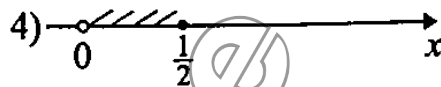
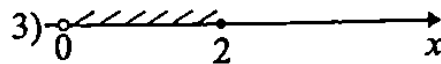
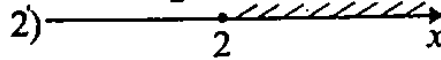
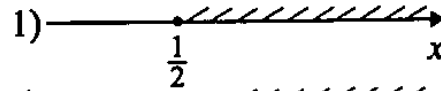
А) $\log_2 x \geq 1$

Б) $\log_2 x \leq -1$

В) $\log_2 x \geq -1$

Г) $\log_2 x \leq 1$

РЕШЕНИЯ



В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

435. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

А) $(x + 5)(x - 9) < 0$

Б) $\frac{(x + 5)^2}{x - 9} < 0$

В) $(x - 9)^2(x + 5) > 0$

Г) $\frac{x + 5}{x - 9} > 0$

РЕШЕНИЯ

1) $x \in (-\infty; -5) \cup (-5; 9)$

2) $(-\infty; -5) \cup (9; +\infty)$

3) $(-5; 9) \cup (9; +\infty)$

4) $(-5; 9)$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

436. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

А) $(x + 3)(x - 7) < 0$

Б) $\frac{(x + 3)^2}{x - 7} < 0$

В) $(x - 7)^2(x + 3) > 0$

Г) $\frac{x + 3}{x - 7} > 0$

РЕШЕНИЯ

1) $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 7)$

2) $(-\infty; -3) \cup (7; +\infty)$

3) $(-3; 7)$

4) $(-3; 7) \cup (7; +\infty)$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

437. На прямой отмечены числа m и n и точки A, B, C, D (см. рис. 70).

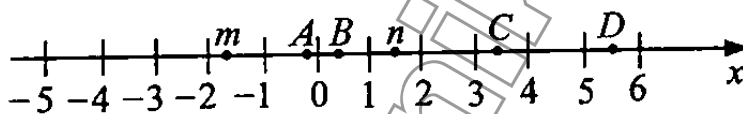


Рис. 70

Каждой точке соответствует одно из чисел из правого столбца. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ

A

B

C

D

ЧИСЛА

1) $n + m$

2) $m^2 + n^2$

3) $\frac{3}{n} + m$

4) $n - m$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

A	B	C	D

438. На координатной прямой (см. рис. 71) отмечены число m и точки A, B, C, D .

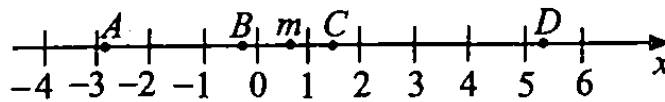


Рис. 71

Каждой точке соответствует одно из чисел из правого столбца. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ	ЧИСЛА
A	1) $6 - m$
B	2) $m^2 + 1$
C	3) $m - 1$
D	4) $-\frac{2}{m}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

A	B	C	D

439. На координатной прямой отмечены точки A, B, C и D (см. рис. 72).

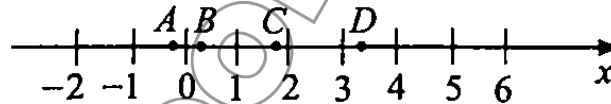


Рис. 72

Число m равно 1,7. Каждой точке соответствует одно из чисел из правого столбца. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ	ЧИСЛА
A	1) $1,4 - m$
B	2) $\frac{m + 4}{20}$
C	3) $m^2 - 1$
D	4) $2m$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>

440. На прямой отмечены точки *A*, *B*, *C* и *D* (см. рис. 73).

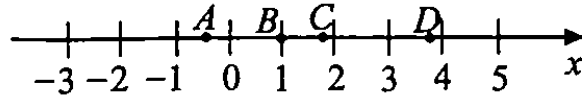


Рис. 73

Число m равно $\sqrt{2}$. Каждой точке соответствует одно из чисел из правого столбца. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ

A

B

C

D

ЧИСЛА

1) $1 - m$

2) $\frac{m + 4}{3}$

3) $m^2 - 1$

4) $2m + 1$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>

Задания для контроля

Вариант 1

1. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

А) $\log_7 x > 1$

Б) $\log_7 x < -1$

В) $\log_7 x > -1$

Г) $\log_7 x < 1$

РЕШЕНИЯ

1) $x > \frac{1}{7}$

2) $0 < x < 7$

3) $0 < x < \frac{1}{7}$

4) $x > 7$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

2. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

А) $x^2 - 5x - 36 \leq 0$

Б) $x^2 - 13x + 36 \geq 0$

В) $x^2 + 13x + 36 \geq 0$

Г) $x^2 + 5x - 36 \leq 0$

РЕШЕНИЯ

1) $(-\infty; 4] \cup [9; +\infty)$

2) $[-4; 9]$

3) $[-9; 4]$

4) $(-\infty; -9] \cup [-4; +\infty)$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

3. На прямой отмечены точки А, В, С и D (см. рис 74).

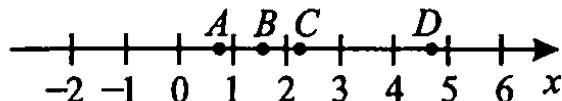


Рис. 74

Каждой точке соответствует одно из чисел из правого столбца. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ	ЧИСЛА
A	1) $\sqrt{2,8}$
B	2) $\left(\frac{4}{19}\right)^{-1}$
C	3) $\log_6 4$
D	4) $\frac{20}{9}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

A	B	C	D

4. На прямой отмечены числа m и n и точки A, B, C, D (см. рис 75).

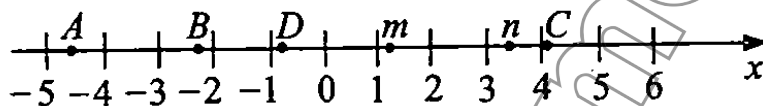


Рис. 75

Каждой точке соответствует одно из чисел из правого столбца. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ	ЧИСЛА
A	1) mn
B	2) $\frac{1}{n} - m$
C	3) $m - \frac{n^2}{2}$
D	4) $m - n$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

A	B	C	D

5. На координатной прямой точками отмечены числа a, b, c, d и m (см. рис. 76).

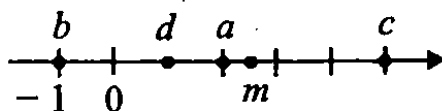


Рис. 76

Установите соответствие между указанными точками и числами.

- 1) $2m$ 2) $0,4m$ 3) $m - \frac{1}{2}$ 4) $-0,4m$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

a	b	c	d

Вариант 2

1. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

РЕШЕНИЯ

А) $\log_9 x < 1$

1) $(\frac{1}{9}; +\infty)$

Б) $\log_9 x < -1$

2) $(0; 9)$

В) $\log_9 x > -1$

3) $(0; \frac{1}{9})$

Г) $\log_9 x > 1$

4) $(9; +\infty)$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

2. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

РЕШЕНИЯ

А) $x^2 - 5x - 14 \leq 0$

1) $x \leq -7$ или $x \geq 2$

Б) $x^2 + 9x + 14 \geq 0$

2) $2 \leq x \leq 7$

В) $x^2 + 5x - 14 \geq 0$

3) $x \leq -7$ или $x \geq -2$

Г) $x^2 - 9x + 14 \leq 0$

4) $-2 \leq x \leq 7$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

3. На прямой отмечены точки A , B , C и D (см. рис. 77).

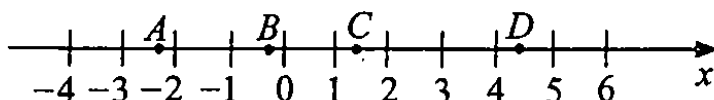


Рис. 77

Каждой точке соответствует одно из чисел из правого столбца. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ

ЧИСЛА

A	1) $\sqrt{7} + \sqrt{3}$
B	2) $2\sqrt{2} - 5$
C	3) $\sqrt{3} - 2$
D	4) $\sqrt{7} - \sqrt{2}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

A	B	C	D

4. На прямой отмечены числа m и n (см. рис. 78).

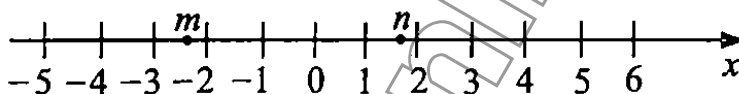


Рис. 78

Каждому из четырёх чисел в левом столбце соответствует один из отрезков в правом столбце, которому оно принадлежит. Установите соответствие между числами и отрезками.

ЧИСЛА

ОТРЕЗКИ

А) $m^2 - n^2$	1) $[-1; 0]$
Б) $n + m$	2) $[-2; -1]$
В) $n - m$	3) $[0; 3,5]$
Г) $-\frac{1}{m} - n$	4) $[3,5; 5]$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

A	B	B	Γ

5. На координатной прямой точками отмечены числа a, b, c, d и n . Установите соответствие между указанными точками и числами (см. рис. 79).

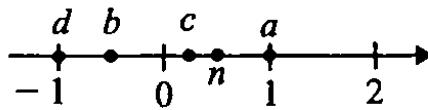


Рис. 79

1) $n + \frac{1}{2}$

2) $-2n$

3) $-n$

4) n^2

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

a	b	c	d

Вариант 3

1. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

А) $\log_5 x > 0$

Б) $5^{-x} > 5$

В) $\frac{x}{x+1} < 0$

Г) $\frac{1}{x(x+1)} > 0$

РЕШЕНИЯ

1) $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$

2) $(-1; 0)$

3) $(-\infty; -1)$

4) $(1; \infty)$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

2. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

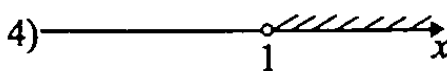
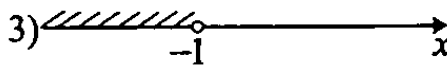
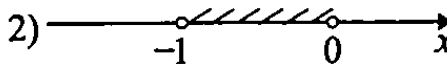
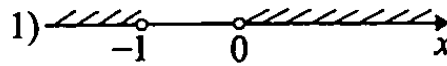
А) $\log_3 x > 0$

Б) $3^{-x} > 3$

В) $\frac{x}{x+1} < 0$

Г) $\frac{1}{x(x+1)} > 0$

РЕШЕНИЯ



В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

3. Про число k известно, что оно равно $\sqrt{7}$. Каждому из четырёх чисел в левом столбце соответствует отрезок, которому это число принадлежит. Установите соответствие между числами и отрезками.

ЧИСЛА

А) \sqrt{k}

Б) $k^2 - 4$

В) $-\frac{4}{k}$

Г) $-\frac{k}{10}$

ОТРЕЗКИ

1) $[-1; 0]$

2) $[2; 3]$

3) $[-2; -1]$

4) $[1; 2]$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

4. На прямой отмечены точки A, B, C и D (см. рис. 80).

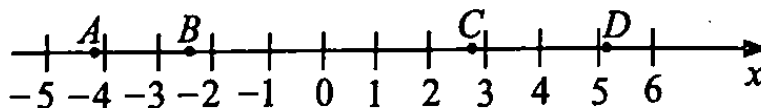


Рис. 80

Каждой точке соответствует одно из чисел из правого столбца. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ

ЧИСЛА

A

1) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{33}{2}$

B

2) $\frac{41}{8}$

C

3) $-\sqrt{6,1}$

D

4) $2^{1,5}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

A	B	C	D

5. На координатной прямой точками отмечены числа a , b , c , d и p . Установите соответствие между указанными точками и числами (см. рис. 81).

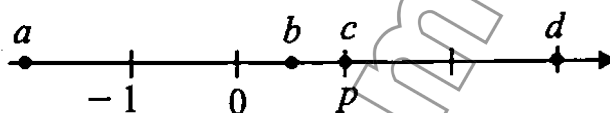


Рис. 81

1) $-(p+1)$

2) $\frac{1}{2}p$

3) p^2

4) $3p$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

a	b	c	d

Вариант 4

1. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

РЕШЕНИЯ

A) $\log_5 x < 2$

1) $x < -2$ или $x > 0$

Б) $5^{-x} > 25$

2) $0 < x < 25$

B) $\frac{x}{x+2} > 0$

3) $x < -2$ и $-2 < x < 0$

Г) $\frac{1}{x(x+2)^2} < 0$

4) $x < -2$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

2. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

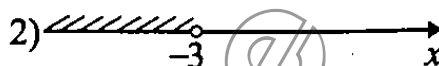
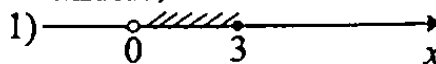
А) $2^{-x} \geq 8$

Б) $\frac{x}{x-3} \geq 0$

В) $\frac{1}{x(x-3)} < 0$

Г) $\log_3 x \leq 1$

РЕШЕНИЯ



В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

3. Каждому из четырёх чисел в левом столбце соответствует отрезок, которому оно принадлежит. Установите соответствие между числами и отрезками из правого столбца.

ЧИСЛА

А) $\sqrt{6} + \sqrt{3}$

Б) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

В) $\sqrt{6} + 4\sqrt{3}$

Г) $(\sqrt{3})^3 + 2$

ОТРЕЗКИ

1) $[9; 10]$

2) $[4; 5]$

3) $[1; 2]$

4) $[7; 8]$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

4. На прямой отмечены точки A , B , C и D (см. рис. 82).

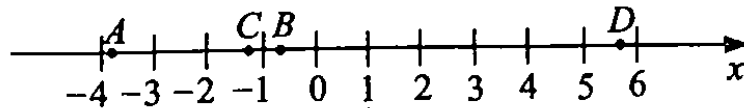


Рис. 82

Каждой точке соответствует одно из чисел из правого столбца. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ

ЧИСЛА

 A

1) $\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$

 B

2) $\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$

 C

3) $-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$

 D

4) $-\sqrt{5} - \sqrt{3}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

A	B	C	D

5. На координатной прямой точками отмечены числа a , b , c , d и l . Установите соответствие между указанными точками и числами (см. рис. 83).

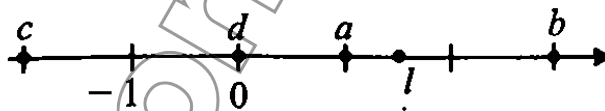


Рис. 83

1) $0 \cdot l$

2) $2l$

3) $2,5 - l$

4) $-l - 0,5$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

a	b	c	d

§ 10. Уравнения

10.1. Линейные уравнения

Линейные уравнения — это уравнения вида

$$ax + b = 0,$$

где x — неизвестное число, а буквы a и b обозначают заданные числа.

Если $a = 0$, то либо уравнение не имеет корней (как, например, уравнение $0x + 5 = 0$), либо x может быть любым числом (если $0x + 0 = 0$).

Прибавляя к обеим частям уравнения $ax + b = 0$ число $-b$, получим равносильное уравнение $ax = -b$. При $a \neq 0$ разделим обе части уравнения на a и получим единственный корень этого уравнения:

$$x = (-b) : a.$$

441. Найдите корень уравнения $-5\frac{2}{3}x = 1\frac{5}{12}$.
442. Найдите корень уравнения $-\frac{3}{7}x = -\frac{45}{7}$.
443. Найдите корень уравнения $\frac{3}{22}x = 4\frac{4}{11}$.
444. Найдите корень уравнения $\frac{x}{3} = -5\frac{1}{3}$.
445. Найдите корень уравнения $0,2x - 5 = 0$.
446. Найдите корень уравнения $-0,4x + 2 = 0$.
447. Найдите корень уравнения $4x + 2,5 = 0$.
448. Найдите корень уравнения $-6x - 2,7 = 0$.
449. Найдите корень уравнения $2,5(x - 2) = 8$.
450. Найдите корень уравнения $3(x + 4) = 4,8$.
451. Найдите корень уравнения $2,5(x - 2) = 7,5x$.
452. Найдите корень уравнения $3,2x = 0,8(x + 3)$.

10.2. Квадратные уравнения

Квадратные уравнения — это уравнения вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где x — неизвестное число, а буквы a , b и c обозначают заданные числа и $a \neq 0$.

Основная формула для решения квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

453. Найдите корень уравнения $5x^2 + 7x - 6 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе укажите больший из них.

454. Найдите корень уравнения $6x^2 - 13x - 5 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе укажите больший из них.

455. Найдите корень уравнения $3x^2 - 7x - 10 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе укажите меньший из них.

456. Найдите корень уравнения $x^2 - 5x - 14 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите меньший из них.

457. Решите уравнение $(3x + 1)^2 = (3x - 4)^2$.

458. Решите уравнение $(8x - 5)^2 = (8x + 5)^2$.

459. Решите уравнение $(2x - 1)^2 = (3 - 2x)^2$.

460. Решите уравнение $(4x + 2)^2 = (2 - 4x)^2$.

10.3. Рациональные уравнения

Рациональные уравнения — это уравнения, имеющие вид

$$\frac{P}{Q} = 0,$$

где P и Q — произвольные многочлены.

Примеры: $\frac{x^2 - 3x + 5}{4x - 3} = 0$; $\frac{x^3 + 27}{x^2 + 6x + 9} = 0$; $2x^4 - x + 5 = 0$ (число

неизвестных в уравнении может быть любым).

При решении рациональных уравнений пользуемся тем, что дробь равна нулю только тогда, когда её числитель равен нулю, а знаменатель нулю не равен.

Уравнение $\frac{P}{Q} = \frac{S}{T}$, где P, Q, S и T — произвольные многочлены, равносильно рациональному уравнению $\frac{PT - QS}{QT} = 0$. Его решениями будут те значения неизвестных, при которых $PT - QS = 0$ и $QT \neq 0$.

461. Решите уравнение $\frac{2x - 21}{x + 12} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.
462. Найдите корень уравнения $-x = \frac{x + 9}{-7x - 3}$. Если уравнение имеет более одного корня, то укажите больший из них.
463. Найдите корень уравнения $\frac{x - 6}{2x - 1} = \frac{1}{x + 6}$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.
464. Найдите корень уравнения $\frac{x - 7}{5x + 1} = \frac{1}{x + 7}$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.
465. Найдите корень уравнения $\frac{1}{2x + 3} = -2$.
466. Найдите корень уравнения $\frac{1}{4x - 7} = \frac{1}{3}$.
467. Найдите корень уравнения $\frac{1}{2x - 7} = \frac{1}{5x + 8}$.
468. Найдите корень уравнения $\frac{3}{3x - 2} = \frac{3}{4x + 7}$.
469. Решите уравнение $\left(x - \frac{3}{2}\right)^3 = -125$.
470. Найдите корень уравнения $(x + 3)^3 = -27$.
471. Найдите корень уравнения $\frac{x - 7}{x + 3} = \frac{x - 3}{x + 9}$.
472. Найдите корень уравнения $\frac{2x - 3}{2x + 3} = \frac{2x - 1}{2x + 9}$.

10.4. Иррациональные уравнения

Иррациональные уравнения — это уравнения, в которых неизвестная величина x находится под знаком корня. При решении иррациональных уравнений нам приходится обе части заданного уравнения возводить в квадрат. При этом получаем уравнение, которое может содержать корни, не являющиеся корнями заданного уравнения (такие корни называют посторонними). Поэтому непосредственной проверкой находим корни, являющиеся корнями заданного уравнения.

Например, возведём в квадрат обе части уравнения $\sqrt{2x + 87} = -11$. Получим уравнение $2x + 87 = 121$, корень которого $x = 17$ не является корнем уравнения $\sqrt{2x + 87} = -11$, так как $\sqrt{121} \neq -11$ (по определению квадратный корень является неотрицательным числом).

473. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{5x + 39}{16}} = \frac{1}{2}$.

474. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{2x - 8}{4}} = 3$.

475. Найдите корень уравнения $\sqrt{5x + 74} = 8$.

476. Найдите корень уравнения $\sqrt{23 - 7x} = 3$.

477. Найдите корень уравнения $\sqrt{66 - 5x} = -x$.

478. Найдите корень уравнения $\sqrt{12 - x} = x$.

479. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{4}{5x - 2}} = 1$.

480. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{2}{3x - 7}} = 1$.

481. Найдите корень уравнения $(\sqrt{5 - x} - 4)(\sqrt{7 - x} - 2) = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, то укажите наибольший из них.

482. Найдите корень уравнения $(2 - \sqrt{9 - x})(3 - \sqrt{8 - x}) = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, то укажите наименьший из них.

483. Найдите корень уравнения $(x + 1,5)(\sqrt{x^2 - 4x - 5}) = 0$. В ответе запишите корень уравнения или их сумму, если корней несколько.

484. Найдите корень уравнения $(x - 2,5)(\sqrt{x^2 + 8x - 9}) = 0$. В ответе запишите корень уравнения или их сумму, если корней несколько.

10.5. Показательные уравнения

Показательные уравнения — это уравнения, в которых неизвестная величина x находится в показателе степени. Их решают приведением к виду

$$a^{f(x)} = a^{g(x)},$$

где в левой и правой частях уравнения степень одного и того же числа. Такое показательное уравнение равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

При этом нужно помнить, что $\frac{1}{a^k} = \left(\frac{1}{a}\right)^k = a^{-k}$,

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-k} = a^k; \quad 1 = a^0; \quad \sqrt[k]{a} = a^{\frac{1}{k}}; \quad a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}.$$

485. Найдите корень уравнения $5^{2x+4} = \frac{1}{25}$.

486. Найдите корень уравнения $4^{x-11} = \frac{1}{64}$.

487. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{4}\right)^{12-4x} = 16$.

488. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{5}\right)^{4x-13} = 125$.

489. Найдите корень уравнения $81^{x+2} = \frac{1}{27}$.

490. Найдите корень уравнения $16^{-x+1} = \frac{1}{32}$.

491. Найдите корень уравнения $2^{14-2x} = \frac{1}{8}$.

492. Найдите корень уравнения $11^{2-x} = 121$.

493. Решите уравнение $2^{3+x} = 0,4 \cdot 5^{3+x}$.

494. Решите уравнение $3^{2+x} = 0,6 \cdot 5^{2+x}$.

495. Найдите корень уравнения $2^{5-x} = 4,5 \cdot 9^{5-x}$.

496. Найдите корень уравнения $2^{4-x} = 3,5 \cdot 7^{4-x}$.

10.6. Логарифмические уравнения

Логарифмические уравнения — это уравнения, в которых неизвестная величина x находится под знаком логарифма.

Простейшее логарифмическое уравнение имеет вид

$$\log_a f(x) = \log_a g(x),$$

где $a > 0, a \neq 1$, а $f(x)$ и $g(x)$ — произвольные алгебраические выражения. Это уравнение равносильно любой из двух систем:

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Другими словами, для решения уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ надо найти все решения уравнения $f(x) = g(x)$ и из них выбрать такие значения x , при которых $f(x) > 0$ или $g(x) > 0$.

Уравнение $\log_a f(x) = g(x)$ равносильно уравнению $a^{g(x)} = f(x)$.

Следует также помнить, что выражение $\log_a x$ определено при $x > 0, a > 0$ и $a \neq 1$, а также, что $\log_a 1 = 0; \log_a a = 1; \log_a a^k = k; c \log_a b = \log_a b^c$.

497. Найдите корень уравнения $\log_2(x + 8) = 5$.

498. Найдите корень уравнения $\log_5(x + 7) = 2$.

499. Найдите корень уравнения $\log_2(4x - 13) = 3$.

500. Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{3}}(5 - 2x) = -3$.

501. Найдите корень уравнения $\log_5(3x - 9) = 2 \log_5 6$.

502. Найдите корень уравнения $\log_5(9x - 7) = \frac{1}{2} \log_5 4$.

503. Найдите корень уравнения $\log_5 91 = \log_5(2x - 3)$.

504. Найдите корень уравнения $\log_{0,5}(5x - 1) = \log_{0,5} 14$.

505. Найдите корень уравнения $\ln \frac{12}{x - 4} = \ln(x + 7)$.

В ответе укажите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

506. Найдите корень уравнения $\ln \frac{10}{x + 3} = \ln(x - 6)$.

В ответе укажите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

507. Найдите корень уравнения $\log_4(x+4)^2 = \log_4(5x+20)$.

В ответе укажите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

508. Найдите корень уравнения $\log_5(x-6)^2 = \log_6(2x-12)$.

В ответе укажите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

Задания для контроля

Вариант 1

1. Найдите корень уравнения $\log_7(21+x) = \log_7(2x+3)$.

2. Найдите корень уравнения $49^{x-8} = 7$.

3. Найдите корень уравнения $\sqrt{7x+15} = 8$.

4. Найдите корень уравнения $\frac{x+31}{x-3} = -4$.

5. Найдите корень уравнения $x^2 - 7x - 18 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

Вариант 2

1. Найдите корень уравнения $\log_3(7-x) = 2\log_3 7$.

2. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{16}\right)^{5-2x} = 2$.

3. Найдите корень уравнения $\sqrt{54+3x} = -x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

4. Найдите корень уравнения $\frac{6}{7}x = 4\frac{2}{7}$.

5. Найдите корень уравнения $2x^2 + 11x + 15 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

Вариант 3

1. Найдите корень уравнения $\log_8(5-x) = 3$.

2. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{9}\right)^{x+5} = 27^x$.

3. Найдите корень уравнения $\sqrt{59-11x} = 9$.

4. Найдите корень уравнения $-\frac{x+4}{x+7} = -6$.

5. Найдите корень уравнения $2x^2 + x - 21 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

Вариант 4

1. Найдите корень уравнения $\log_5(7 + x) = 3$.
2. Найдите корень уравнения $7^{-6+x} = 343$.
3. Найдите корень уравнения $\sqrt{10 - 3x} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.
4. Найдите корень уравнения $x^2 + 2x - 15 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.
5. Найдите корень уравнения $\frac{x - 9}{x - 3} = 6$.

sbornik.me

§ 11. Преобразования выражений

11.1. Рациональные выражения (дроби)

Вспомним, как производить простейшие вычисления с обыкновенными дробями. Чтобы перемножить дроби, нужно умножить их числители и записать результат в числитель, а потом перемножить знаменатели и результат записать в знаменатель:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{ad}{bc},$$

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 5}{7 \cdot 6} = \frac{25}{42}.$$

Если числитель и знаменатель дроби делятся на одно и то же число, то обычно их делят на него и называют это «сократить дробь»:

$$\frac{20}{30} = \frac{20 : 10}{30 : 10} = \frac{2}{3}.$$

Если дроби смешанные (с выделенной целой частью), то нужно их перевести в обыкновенные (состоящие только из числителя и знаменателя). Для этого целую часть умножают на знаменатель, прибавляют числитель и результат записывают в числитель, а знаменатель оставляют прежним:

$$3\frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{17}{5},$$

$$3\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{19} = \frac{3 \cdot 5 + 4}{5} \cdot \frac{5}{19} = \frac{19}{5} \cdot \frac{5}{19} = 1.$$

Чтобы разделить число на обыкновенную дробь, нужно в этой дроби поменять местами числитель со знаменателем и умножить число на полученную дробь:

$$\frac{a}{b} : \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

$$\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{15}.$$

Сложить дроби с разными знаменателями можно двумя способами.

1. Умножить числитель и знаменатель каждой дроби на дополнительные множители так, чтобы новый знаменатель был равен наименьшему общему кратному знаменателей исходных дробей.

Сложить полученные дроби с одинаковым знаменателем:

$$\frac{3}{8} + \frac{5}{12} = \frac{3^3}{8} + \frac{5^2}{12} = \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{9 + 10}{24} = \frac{19}{24}.$$

2. Умножить числитель и знаменатель первой дроби на знаменатель второй и наоборот. Сложим полученные дроби с одинаковым знаменателем:

$$\begin{aligned} \frac{3}{8} + \frac{5}{12} &= \frac{3^{12}}{8} + \frac{5^8}{12} = \frac{3 \cdot 12}{8 \cdot 12} + \frac{5 \cdot 8}{12 \cdot 8} = \frac{36}{96} + \frac{40}{96} = \\ &= \frac{36 + 40}{96} = \frac{76}{96} = \frac{19}{24}. \end{aligned}$$

509. Найдите значение выражения $\left(-\frac{7}{8} + 4\frac{2}{3}\right) \cdot 9,6$.

510. Найдите значение выражения $7,4 : \left(3\frac{2}{3} - 1\frac{1}{6}\right)$.

511. Найдите значение выражения $9,2 : 0,23 - 45,3$.

512. Найдите значение выражения $(-2,4) + 0,48 \cdot 3,125$.

513. Найдите значение выражения $\frac{49x^2 - 25}{7x + 5} - 7x$ при $x = \frac{1}{7}$.

514. Найдите значение выражения $\frac{36x^2 - 15}{-6x + 6} + 6x$ при $x = \frac{1}{6}$.

515. Найдите значение выражения $\frac{8x^3 + 1}{4x^2 - 1} - 2x$ при $x = 0,25$.

516. Найдите значение выражения $\frac{8x^3 - 1}{4x^2 - 1} - 2x$ при $x = -0,25$.

11.2. Степени

Вспомним, что если $a > 0, b > 0$ и x, y — произвольные числа, то верны формулы:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y};$$

$$a^x : a^y = a^{x-y};$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y};$$

$$(ab)^x = a^x \cdot b^x;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

517. Найдите значение выражения $(5^{-7} \cdot 5^{10}) : 5^4$.

518. Найдите значение выражения $(4^{-6} : 4^3) \cdot 4^8$.

519. Найдите значение выражения $a^{\frac{7}{4}} : (a^{\frac{5}{12}} \cdot a^{\frac{5}{4}})$ при $a = 3^{12}$.

520. Найдите значение выражения $(b^{\frac{3}{4}} : b^{\frac{1}{2}}) \cdot b^{-\frac{1}{2}}$ при $b = 2^4$.

521. Найдите значение выражения $(4^3)^7 : 4^{22}$.

522. Найдите значение выражения $(5^2)^6 \cdot 5^{-11}$.

523. Найдите значение выражения $49^{\sqrt{3}+2} : 7^{2+2\sqrt{3}}$.

524. Найдите значение выражения $11^{1,26} \cdot 121^{0,37}$.

525. Найдите значение выражения $\frac{18^3 \cdot 3^2}{3^7}$.

526. Найдите значение выражения $\frac{24^3 \cdot 2^2}{2^{10}}$.

527. Найдите значение выражения $\frac{(12a^3)^2 \cdot 3^5}{3^7 \cdot a^5}$ при $a = 0,25$.

528. Найдите значение выражения $\frac{(36b^2)^3 \cdot (3b)^2 \cdot b}{(3b)^8}$ при $b = 0,125$.

11.3. Корни

Вспомним, что $\sqrt[n]{a}$ ($a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$) определяется по-разному для различных значений n .

Если n — чётное число, то $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a} \geq 0$, $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|, \sqrt{a^2} = |a|.$$

Если n — нечётное число, то $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Если $a > 0, b > 0$ и $n, m, k \in \mathbb{N}$, то верны формулы:

$$\begin{aligned} a^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{a^m}; \\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} &= \sqrt[nm]{a}; \\ \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{ab}; \\ (\sqrt[n]{a})^m &= \sqrt[n]{a^m}; \\ \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} &= \sqrt[n]{\frac{a}{b}}; \\ \sqrt[nk]{a^{mk}} &= \sqrt[n]{a^m}. \end{aligned}$$

529. Найдите значение выражения $\sqrt[15]{a^{18}} \cdot \sqrt[5]{a^4}$ при $a = 0,5$.

530. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[15]{a^{18}}}{\sqrt[5]{a^{-4}}}$ при $a = -2,5$.

531. Найдите значение выражения $\sqrt[4]{a^2 \sqrt{a^6}}$ при $a = -0,5$.

532. Найдите значение выражения $\sqrt[6]{a^3 \sqrt{a^6}}$ при $a = -0,36$.

533. Найдите значение выражения $\frac{14 \sqrt[18]{x} \sqrt[9]{x}}{\sqrt[6]{x}}$ при $x > 0$.

534. Найдите значение выражения $\frac{(\sqrt[5]{8a^2})^{10}}{a^4}$ при $a \neq 0$.

535. Найдите значение выражения $\frac{(\sqrt{5})^2 \cdot p \cdot \sqrt[3]{p^2}}{\sqrt{p^3} \cdot \sqrt[6]{p}}$ при $p > 0$.

536. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[4]{b^3} \cdot (\sqrt{7b})^2}{b^{2,75}}$ при $b > 0$.

537. Найдите значение выражения $\sqrt{(a-5)^2} + \sqrt{(a-7)^2}$ при $5 < a < 7$.

538. Найдите значение выражения $\sqrt{(2-a)^2} - \sqrt{(a-7)^2}$ при $a < 2$.

539. Найдите значение выражения $\sqrt{(b-12)^2} + \sqrt{(b-7)^2}$ при $7 \leq b \leq 12$.

540. Найдите значение выражения $\sqrt{(8-b)^2} - \sqrt{(b-5)^2}$ при $b > 8$.

11.4. Логарифмические выражения

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$. Тогда $a^{\log_a x} = x$.

Вспомним основные формулы:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad y > 0;$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y, \quad y > 0;$$

$$\log_a(x^b) = b \log_a x;$$

$$\log_{a^b}(x) = \frac{1}{b} \log_a x, \quad b \neq 0;$$

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}, \quad x \neq 1.$$

Пусть $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$. Тогда $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

Формула

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

называется формулой перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию.

541. Найдите значение выражения $3^{\log_3 7}$.
542. Найдите значение выражения $0,2^{\log_{0,2} 11}$.
543. Найдите значение выражения $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{0,2} 4}$.
544. Найдите значение выражения $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{0,5} 7}$.
545. Найдите значение выражения $6^{2 \log_6 5}$.
546. Найдите значение выражения $5^{3 \log_5 2}$.
547. Найдите значение выражения $7^{2 + \log_7 3}$.
548. Найдите значение выражения $4^{2 - \log_4 8}$.
549. Найдите значение выражения $\log_7 4,9 + \log_7 10$.
550. Найдите значение выражения $\log_5 12,5 + \log_5 10$.
551. Найдите значение выражения $\log_{0,7} 10 - \log_{0,7} 7$.
552. Найдите значение выражения $\log_{0,75} 4 - \log_{0,75} 3$.
553. Найдите значение выражения $\log_{16} \log_3 9$.
554. Найдите значение выражения $\log_{256} \log_3 81$.
555. Найдите значение выражения $\frac{\log_{25} 7}{\log_{625} 7}$.
556. Найдите значение выражения $\frac{\log_{81} 5}{\log_3 5}$.
557. Найдите значение выражения $\frac{\log_{16} 17^3}{\log_{16} \sqrt{17}}$.
558. Найдите значение выражения $\frac{\log_3 \sqrt{15}}{\log_3 225}$.
559. Найдите значение выражения $\frac{9^{\log_5 175}}{9^{\log_5 7}}$.
560. Найдите значение выражения $\frac{7^{\log_3 54}}{7^{\log_3 6}}$.

561. Найдите значение выражения $(1 - \log_3 15)(1 - \log_5 15)$.
562. Найдите значение выражения $(1 - \log_2 18)(1 - \log_9 18)$.
563. Найдите значение выражения $(8^{-\log_3 5})^{\log_5 3}$.
564. Найдите значение выражения $(4^{\log_2 7})^{-\log_7 2}$.

11.5. Тригонометрические выражения

При преобразовании тригонометрических выражений необходимо знать:

- определение $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$;
- таблицу значений $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ при $\alpha = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$;
- знаки $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ в различных четвертях;
- чётность и периодичность тригонометрических функций:
 $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$, $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$,
 $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$,
- $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha$, $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha$, $\operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg} \alpha$,
 $\operatorname{ctg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{ctg} \alpha$ ($k \in \mathbb{Z}$);
- формулы приведения;
- формулы: $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ ($\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$);
- формулы: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.

565. Найдите значение выражения $\frac{3 \cos 35^\circ}{\sin 55^\circ}$.

566. Найдите значение выражения $\frac{5 \cos 37^\circ}{\sin 53^\circ}$.

567. Найдите значение выражения $\frac{24 \sin 298^\circ}{\sin 62^\circ}$.

568. Найдите значение выражения $\frac{5 \sin 306^\circ}{\cos 36^\circ}$.

569. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

570. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

571. Найдите $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{8}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

572. Найдите $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

573. Найдите значение выражения $14\sqrt{6} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4}$.

574. Найдите значение выражения $5\sqrt{54} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4}$.

575. Найдите значение выражения $18\sqrt{6} \cos\left(\frac{17\pi}{4}\right) \cdot \cos \frac{\pi}{6}$.

576. Найдите значение выражения $15\sqrt{6} \sin\left(\frac{9\pi}{4}\right) \cdot \sin \frac{\pi}{3}$.

577. Найдите значение выражения

$$(\cos^2 67,5^\circ - \cos^2 22,5^\circ) \cdot \cos 67,5^\circ \cos 22,5^\circ$$

578. Найдите значение выражения

$$\sqrt{3}(\sin^2 15^\circ - \sin^2 75^\circ) \cdot \sin 15^\circ \sin 75^\circ$$

579. Найдите значение выражения $\frac{\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ}{2 \sin(\pi + \alpha)}$, если $\sin \alpha = \frac{1}{3}$.

580. Найдите значение выражения $\frac{2 \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\operatorname{tg} 50^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ}$, если $\sin \alpha = -\frac{1}{4}$.

Задания для контроля

Вариант 1

1. Найдите значение выражения $\frac{2^{0,48}}{4^{1,24}}$.

2. Найдите значение выражения $\frac{a^{2,35}}{a^{2,97} \cdot a^{1,38}}$ при $a = 2,5$.

3. Найдите значение выражения $3^{2+\log_3 5}$.

4. Найдите значение выражения $\log_2 \log_2 256$.

5. Найдите значение выражения $\frac{18(\sin^2 36^\circ - \cos^2 36^\circ)}{\cos 72^\circ}$.

Вариант 2

1. Найдите значение выражения $3^{2\frac{1}{3}} \cdot 9^{1\frac{1}{3}}$.
2. Найдите значение выражения $\frac{x^{-8} \cdot x^6}{x^{-3}}$ при $x = 28$.
3. Найдите значение выражения $\frac{\log_{10} 13}{\log_{10} \sqrt[7]{13}}$.
4. Найдите значение выражения $4^{\log_2 5}$.
5. Найдите значение выражения $\frac{4 \sin 18^\circ}{\cos 72^\circ}$.

Вариант 3

1. Найдите значение выражения $\left(\frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{3}}{\sqrt[12]{3}}\right)^2$.
2. Найдите значение выражения $\frac{x^5 \cdot x^6}{x^9}$ при $x = 12$.
3. Найдите значение выражения $\frac{\log_2 57}{\log_8 57}$.
4. Найдите значение выражения $\log_5 0,5 + \log_5 50$.
5. Найдите значение выражения $\frac{8}{\sin^2 35^\circ + \sin^2 125^\circ}$.

Вариант 4

1. Найдите значение выражения $77^8 : 11^7 : 7^6$.
2. Найдите значение выражения $\frac{(\sqrt{5} + \sqrt{7})^2}{6 + \sqrt{35}}$.
3. Найдите значение выражения $\log_3 8 \cdot \log_2 27$.
4. Найдите значение выражения $5^{\log_{25} 64}$.
5. Найдите значение выражения $\frac{8 \sin 13^\circ}{\sin 347^\circ}$.

§ 12. Графики функций на клетчатой бумаге

Понятие графика функции. Графиком функции, заданной уравнением $y = f(x)$ (где x и y — переменные) называют множество всех таких точек $(x_0; y_0)$ координатной плоскости xOy , что при подстановке в это уравнение вместо переменной x числа x_0 , а вместо переменной y числа y_0 , получится верное числовое равенство.

Например, точка $(2; -3)$ принадлежит графику функции $y = -1,5x$, так как $-3 = -1,5 \cdot 2$ — верное числовое равенство.

Точка $(2; -0,5)$ принадлежит графику функции $y = -1 + \log_4 x$, так как $-0,5 = -1 + \log_4 2$ — верное числовое равенство. Для наглядного изображения графиков функций нередко используют клетчатую бумагу. В зависимости от выбранного размера клетки, по рисунку можно определять некоторые точки графика с координатами, соответствующими выбранному масштабу. При изображении графиков на миллиметровой бумаге (где размер стороны квадратной клетки равен одному миллиметру) координаты точек указываются с точностью до миллиметра.

Покажем на примерах некоторые особенности и специфику заданий по графикам на клетчатой бумаге.

Задание 1. На рисунке 84 изображён график функции, имеющей вид $y = -\frac{1}{x+a} + c$, где a и c — произвольные числа. Найдите a и c .

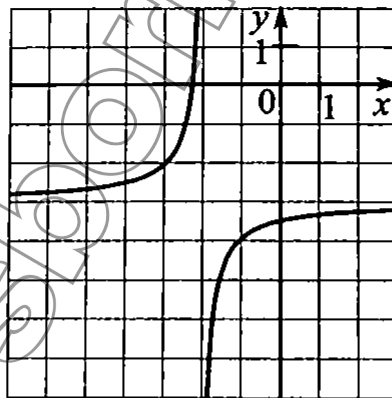


Рис. 84

Решение. По рисунку определяем, что графику принадлежат точки $(-3; -2)$ и $(-1; -4)$. Тогда верны следующие равенства:

$$\begin{cases} -2 = -\frac{1}{-3+a} + c, \\ -4 = -\frac{1}{-1+a} + c \end{cases}$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

$$-2 = \frac{-1}{a-1} + \frac{1}{a-3}, \quad -2(a-1)(a-3) = -(a-3) + (a-1) = 2,$$

$$-2(a^2 - 4a + 3) = 2,$$

$$a^2 - 4a + 4 = 0, \quad (a-2)^2 = 0, \quad a = 2.$$

Отсюда согласно первому равенству системы получаем:

$$c = \frac{1}{a-3} - 2 = \frac{1}{2-3} - 2 = -3.$$

Ответ: $a = 2, c = -3$.

При построении графиков функций на клетчатой бумаге можно использовать также механические преобразования графиков известных элементарных функций.

12.1. Построение графиков функций «механическими» преобразованиями График функции $y = -f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отображением относительно оси Ox (см. рис. 85).

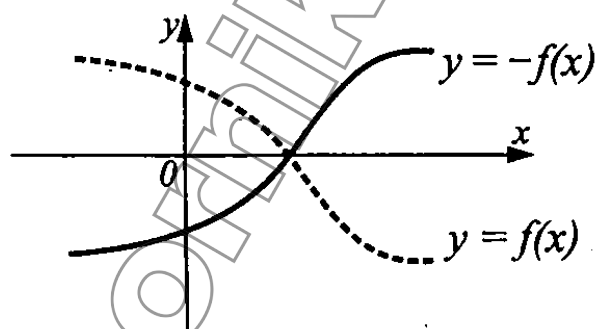


Рис. 85

График функции $y = f(-x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отображением относительно оси Oy (см. рис. 86).

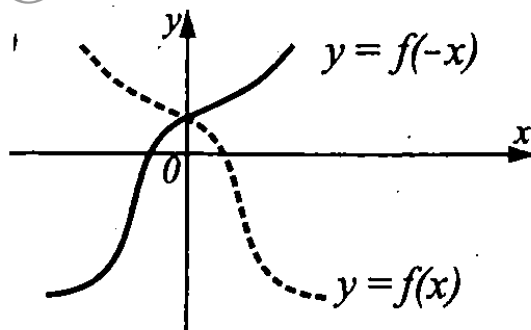


Рис. 86

График функции $y = f(x) + b$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вверх на число b при $b > 0$ и сдвигом вниз на число $(-b)$ при $b < 0$ (см. рис. 87).

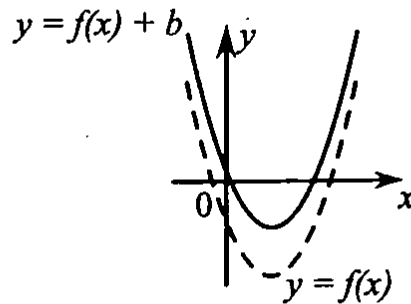


Рис. 87

График функции $y = f(x + a)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вправо на число $-a$ при $a < 0$ и сдвигом влево на число a при $a > 0$. (см. рис. 88).

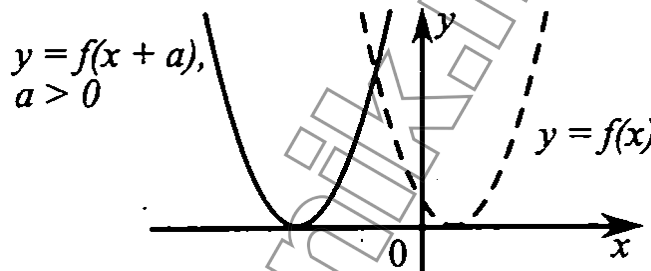


Рис. 88

Рассмотрим, как работает сказанное выше на примере сдвига графика параболы $y = ax^2$ (см. рис. 89).

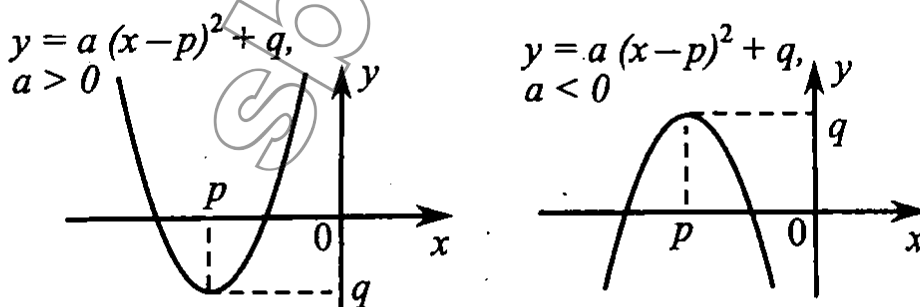


Рис. 89

Рассмотрим ещё один пример со сдвигами графика гиперболы $(y = \frac{k}{x})$ (рис. 90, см. с. 170).

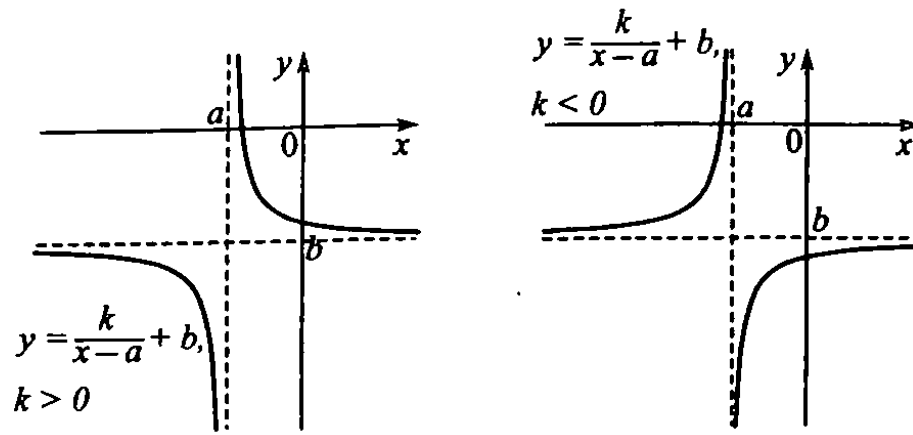


Рис. 90

Для иллюстрации применения механических преобразований приведём другое решение указанного выше задания 1.

По рисунку определяем, что указанный на нём график получается из графика параболы $y = \frac{1}{x}$ путём параллельного переноса вниз на 3 единицы и параллельного переноса влево на две единицы, поэтому $c = -3$ и $a = 2$

581. График функции $y = \frac{k}{x} + b$ проходит через точки $(6; 6)$ и $(-2; 10)$.
Найдите b .

582. График функции $y = \frac{k}{x} + b$ проходит через точки $(2; 5)$ и $(-4; 6,5)$.
Найдите k .

583. График функции $y = kx + b$ проходит через точки $(2; -2)$ и $(-2; -14)$.
Найдите k .

584. График функции $y = kx + b$ проходит через точки $(1; 2)$ и $(2; -2)$.
Найдите b .

585. На рисунке 91 (см. с. 171) изображены графики двух линейных функций. Найдите абсциссу точки пересечения этих графиков.

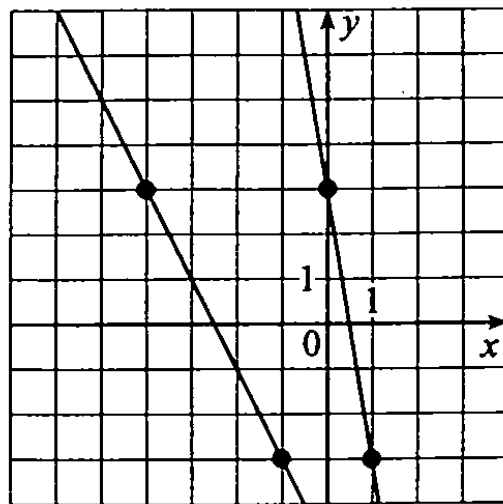


Рис. 91

586. На рисунке 92 изображены графики двух линейных функций. Найдите абсциссу точки пересечения этих графиков.

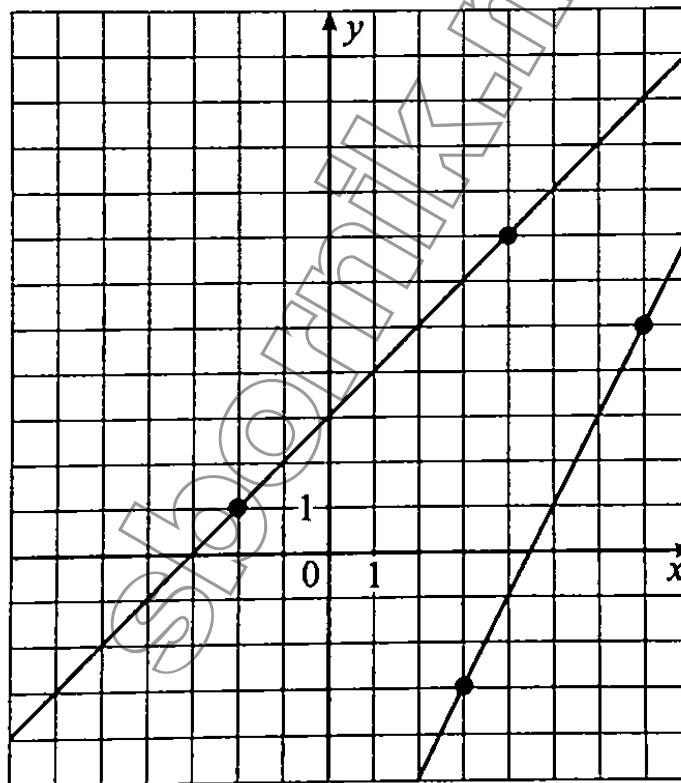


Рис. 92

587. На рисунке 93 (см. с. 172) изображён график функции $f(x) = \frac{kx + a}{x + b}$. Найдите b .

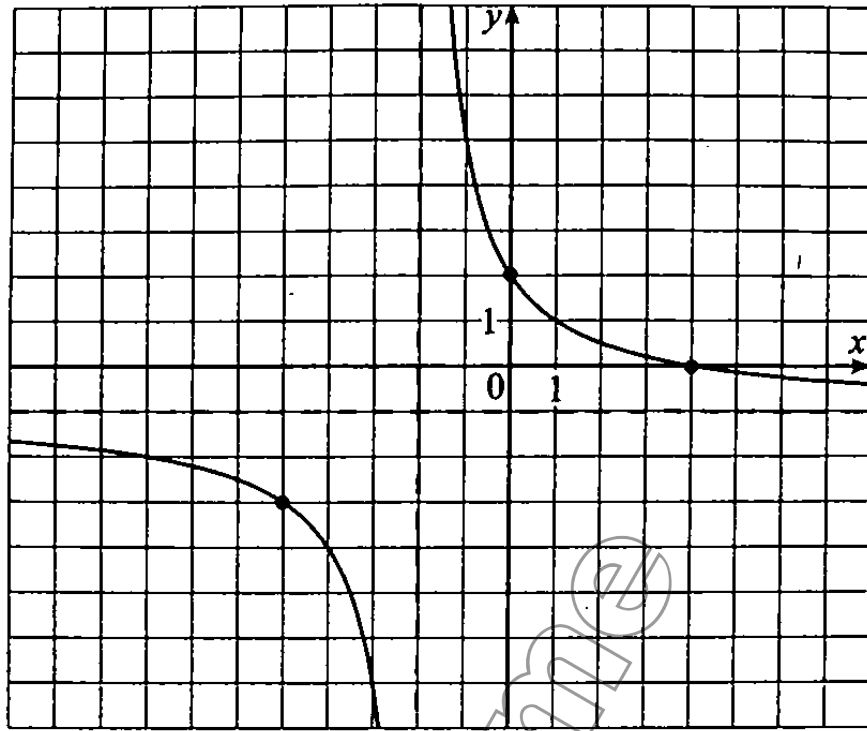


Рис. 93

588. На рисунке 94 изображён график функции $f(x) = \frac{kx + a}{x + b}$. Найдите k .

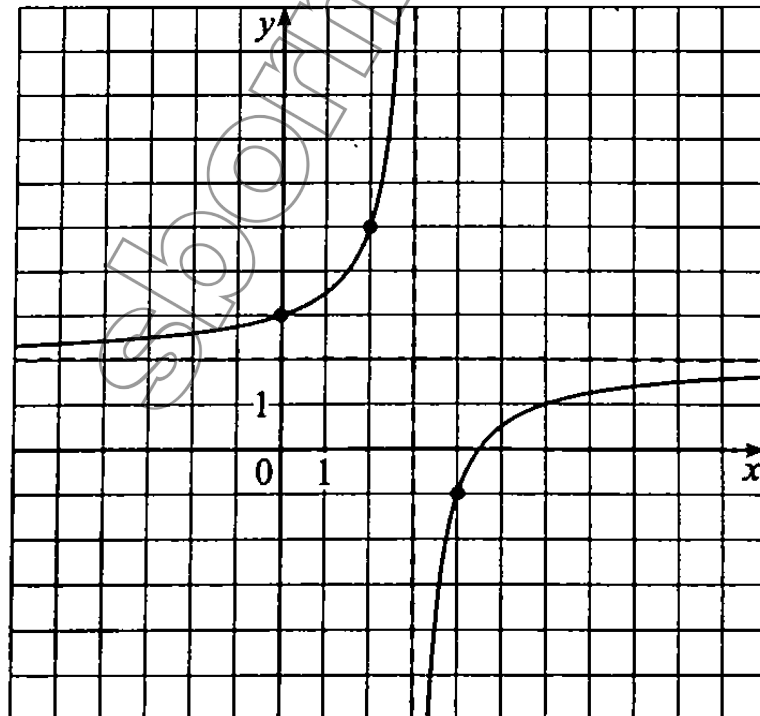


Рис. 94

589. На рисунке 95 изображены графики функций $f(x) = -4x + 11$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите ординату точки B .

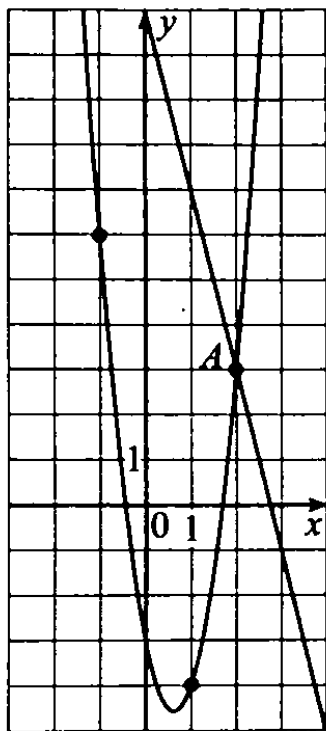


Рис. 95

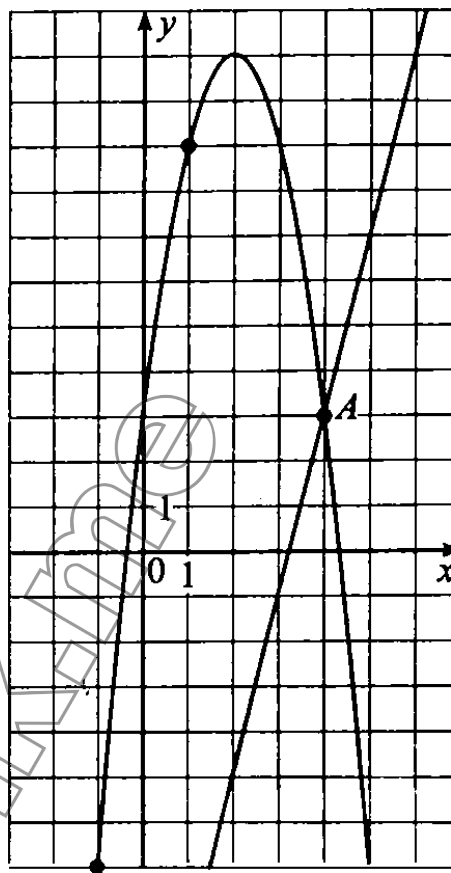


Рис. 96

590. На рисунке 96 изображены графики функций $f(x) = 4x - 13$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .

591. На рисунке 97 изображён график функции вида $y = ax^2 + bx + c$, где числа a , b и c — целые. Найдите b .

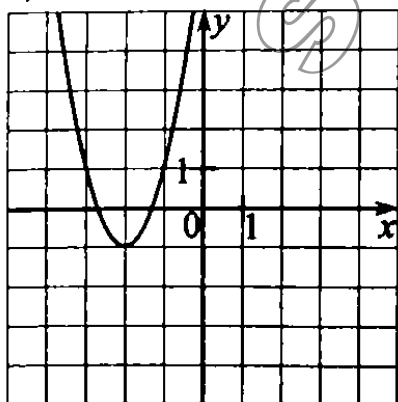


Рис. 97

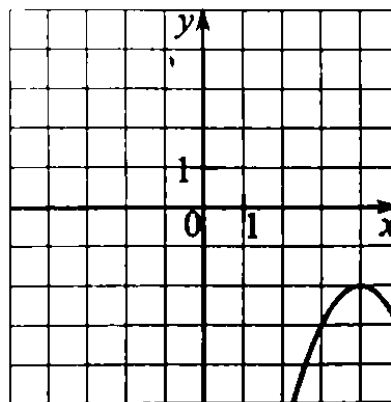


Рис. 98

592. На рисунке 98 (см. с. 173) изображён график функции вида $y = ax^2 + bx + c$, где числа a , b и c — целые. Найдите c .

593. На рисунке 99 изображён график функции вида $f(x) = \log_a(b - x)$. Найдите x , при котором $f(x) = 6$.

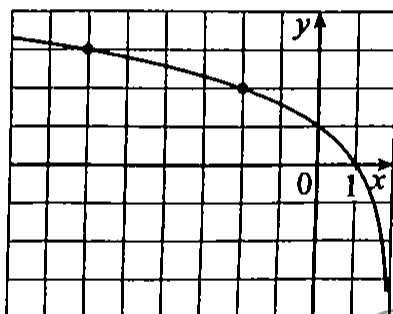


Рис. 99

594. На рисунке 100 изображён график функции вида $f(x) = \log_a(x - b)$. Найдите x , при котором $f(x) = 6$.



Рис. 100

595. На рисунке 101 изображён график функции вида $y = a \sin x + b$. Найдите a .

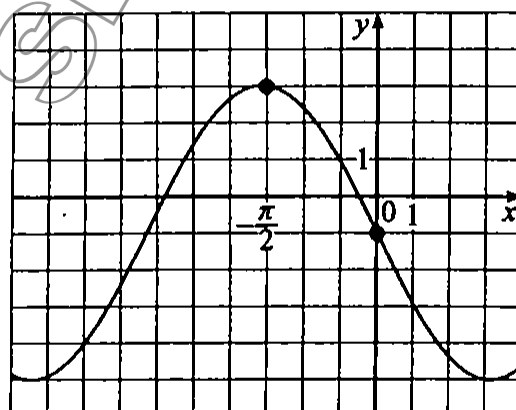


Рис. 101

596. На рисунке 102 изображён график функции вида $y = a \operatorname{tg} x + b$. Найдите a .

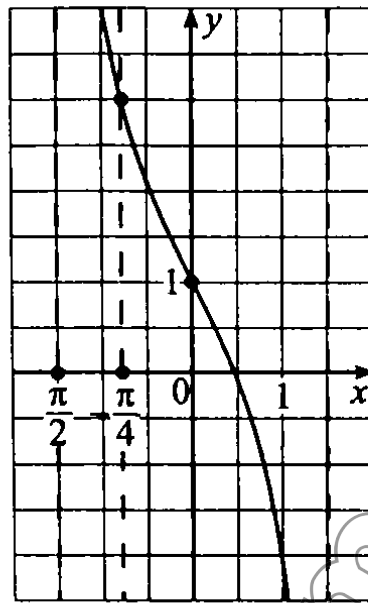


Рис. 102

597. На рисунке 103 изображены графики функций $f(x) = 0,8x - 4$ и $g(x) = a\sqrt{x+b}$. Найдите абсциссу точки пересечения графиков.

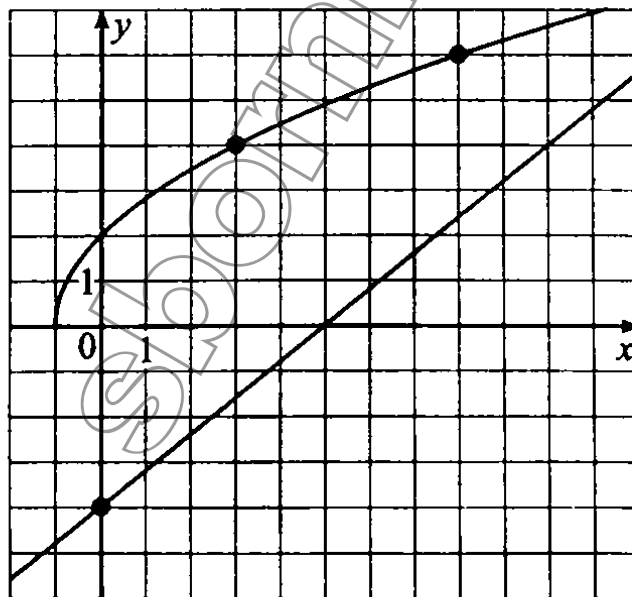


Рис. 103

598. На рисунке 104 (см. с. 176) изображены графики функций $f(x) = -0,8x - 4$ и $g(x) = a\sqrt{b-x}$. Найдите ординату точки пересечения графиков.

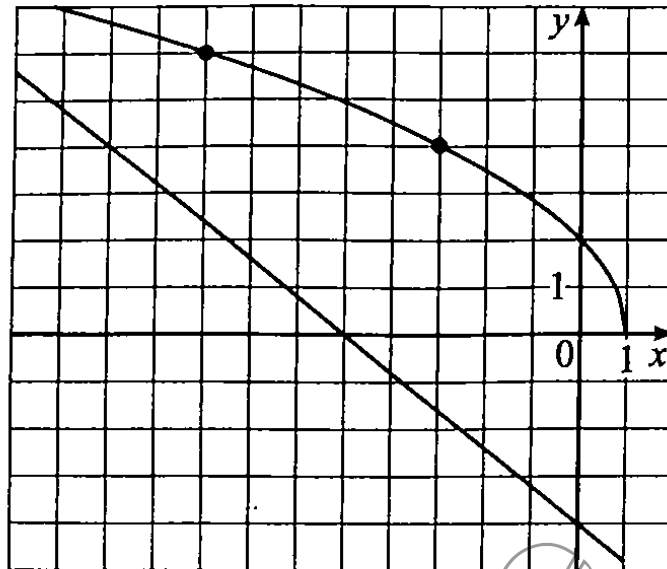


Рис. 104

599. На рисунке 105 изображён график функции вида $y = a^x$, где a — целое число. Найдите $y(4)$.

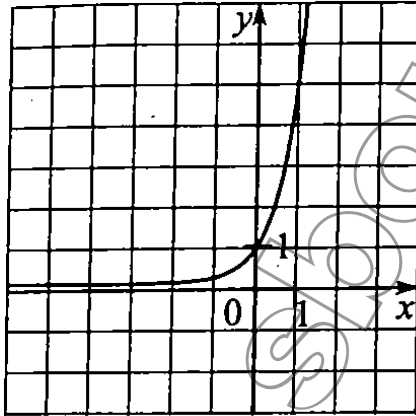


Рис. 105

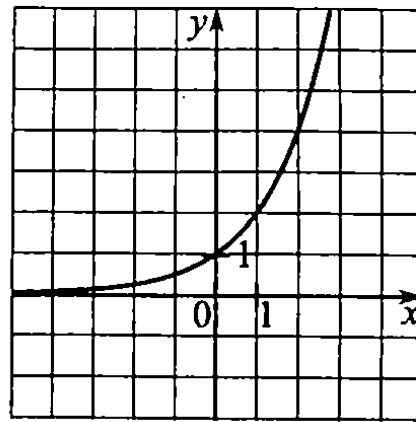


Рис. 106

600. На рисунке 106 изображён график функции вида $y = a^x$, где a — целое число. Найдите $y(6)$.

601. На рисунке 107 изображены графики функций $f(x) = -0,25x^2 + 1,5x + 3,75$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .

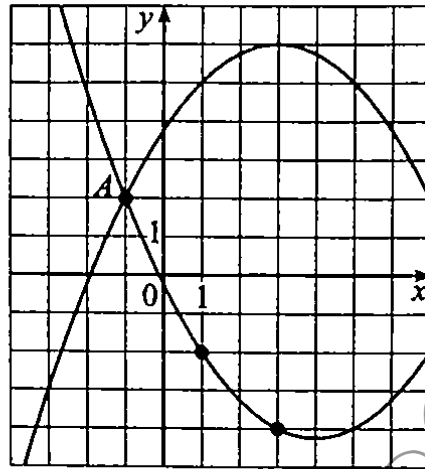


Рис. 107

602. На рисунке 108 изображены графики функций $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .

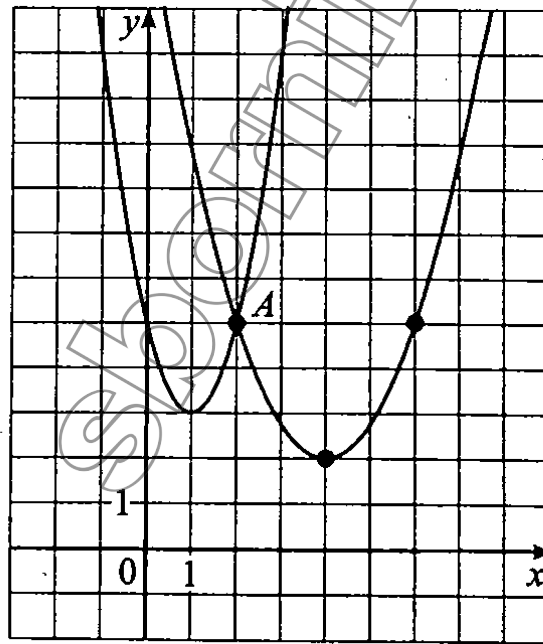


Рис. 108

603. На рисунке 109 (см. с. 178) изображён график функции вида $y = kx + b$. Найдите $y(17)$.

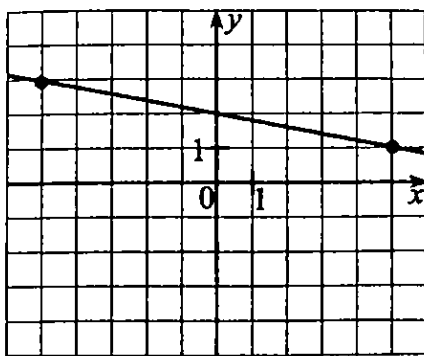


Рис. 109

604. На рисунке 110 изображён график функции вида $y = kx + b$. Найдите $y(-18)$.

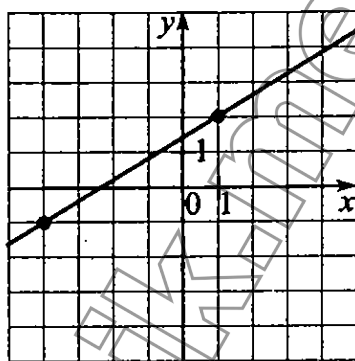


Рис. 110

Задания для контроля

Вариант 1

1. На рисунке 111 изображён график функции вида $y = ax^2 + bx + c$, где числа a , b и c — целые. Найдите $y(21)$.

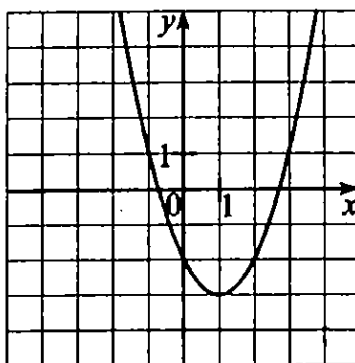


Рис. 111

2. На рисунке 112 изображены графики двух линейных функций. Найдите ординату точки пересечения этих графиков.

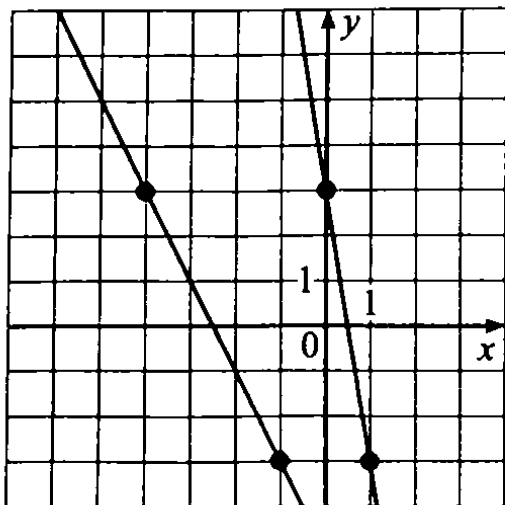


Рис. 112

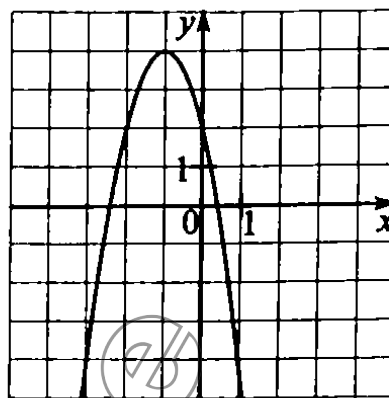


Рис. 113

3. На рисунке 113 изображён график функции вида $y = ax^2 + bx + c$, где числа a , b и c — целые. Найдите b .

4. На рисунке 114 изображён график функции вида $y = \log_a x$, где a — целое число. Найдите $y(32)$.

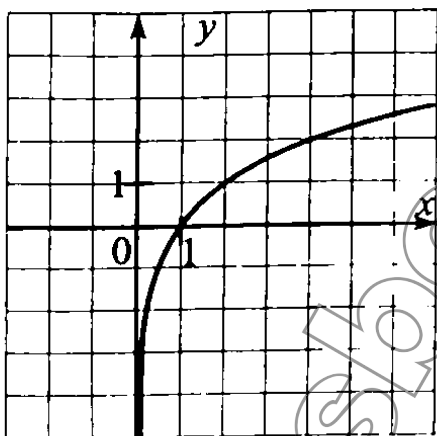


Рис. 114

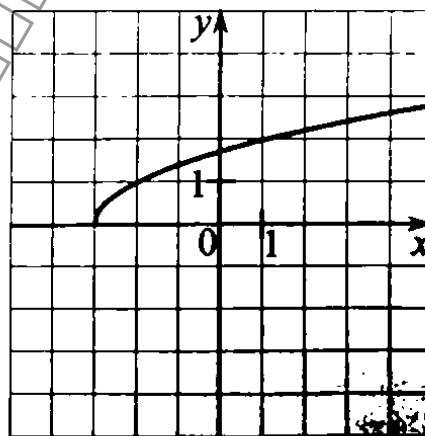


Рис. 115

5. На рисунке 115 изображён график функции вида $y = \sqrt{x + c}$, где c — целое число. Найдите c .

Вариант 2

1. На рисунке 116 (см. с. 180) изображён график функции вида $y = ax^2 + bx + c$, где числа a , b и c — целые. Найдите $y(-10)$.

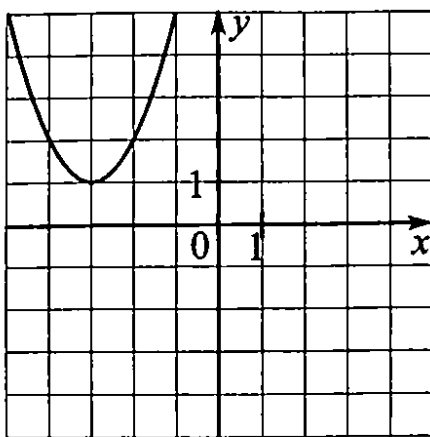


Рис. 116

2. На рисунке 117 изображены графики функций $f(x) = 2x + 8$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .

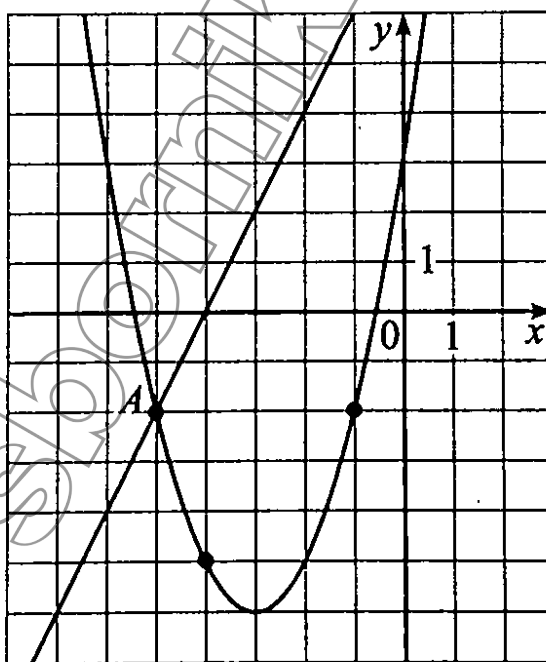


Рис. 117

3. На рисунке 118 (см. с. 181) изображены графики функций $f(x) = \frac{kx + a}{x + b}$ и $g(x) = -0,5x + 4,5$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .

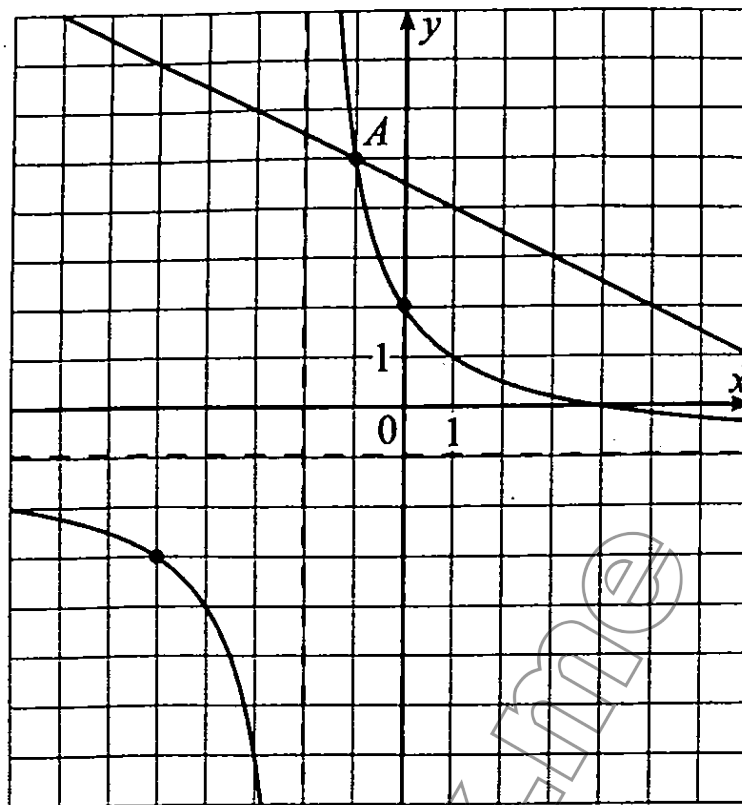


Рис. 118

4. На рисунке 119 изображён график функции вида $y = \log_a x$, где a — целое число. Найдите $y(81)$.

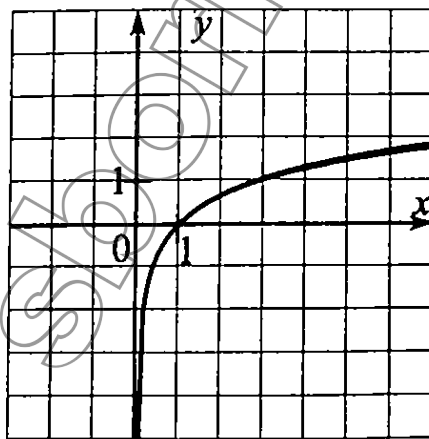


Рис. 119

5. На рисунке 120 (см. с. 182) изображён график функции вида $y = \sqrt{x+c}$, где c — целое число. Найдите c .

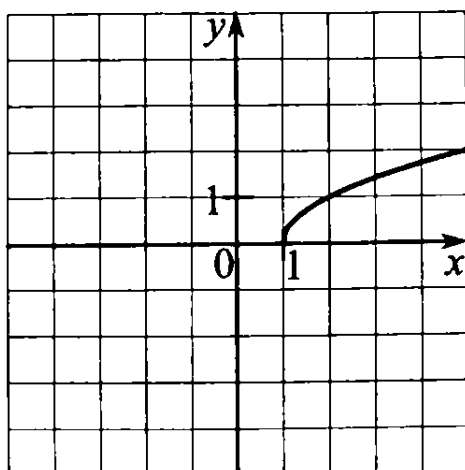


Рис. 120

Вариант 3

1. На рисунке 121 изображён график функции вида $y = ax^2 + bx + c$, где числа a , b и c — целые. Найдите $y(15)$.

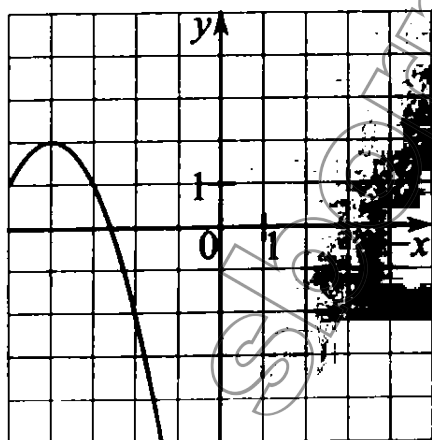


Рис. 121

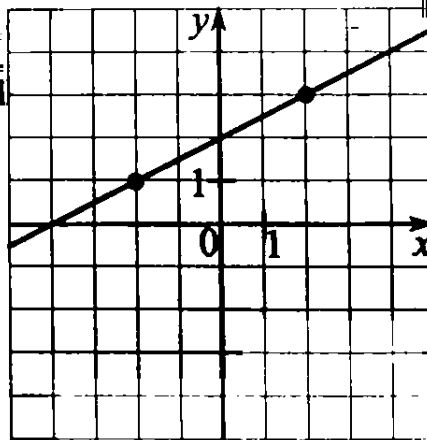


Рис. 122

2. На рисунке 122 изображён график функции вида $y = kx + b$. Найдите $y(17)$.

3. На рисунке 123 изображены графики функций $f(x) = 0,75x^2 - 6x + 14$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите ординату точки B .

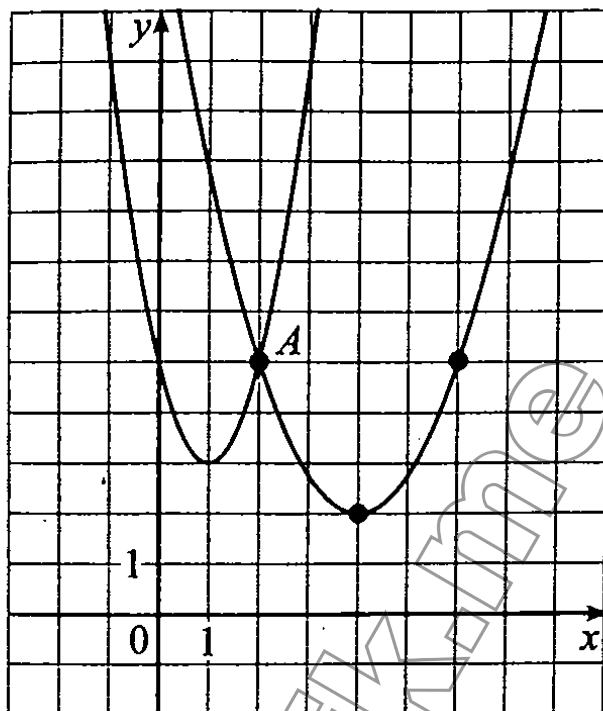


Рис. 123

4. На рисунке 124 изображён график функции вида $y = a^x$, где a — целое число. Найдите $y(5)$.

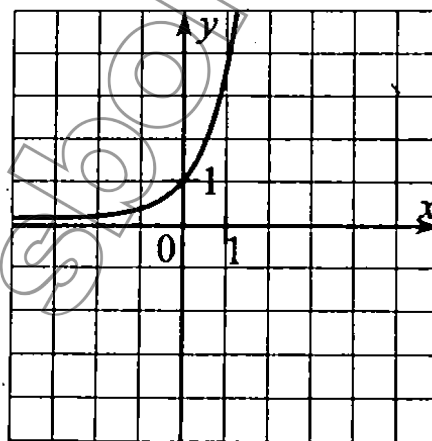


Рис. 124

5. На рисунке 125 (см. с. 184) изображён график функции вида $y = \frac{1}{x+a} + c$, где a, c — целые числа. Найдите a .

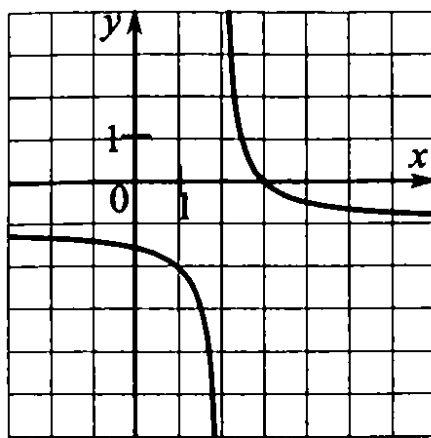


Рис. 125

Вариант 4

1. На рисунке 126 изображён график функции вида $y = ax^2 + bx + c$, где числа a , b и c — целые. Найдите $y(-14)$.

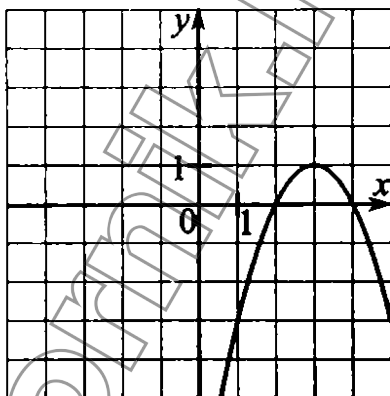


Рис. 126

2. На рисунке 127 изображён график функции вида $y = kx + b$. Найдите $y(-18)$.

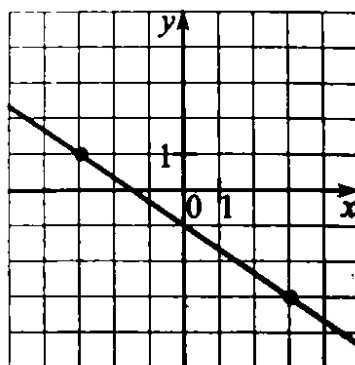


Рис. 127

3. На рисунке 128 изображён график функции вида $y = a \cos x + b$. Найдите a .

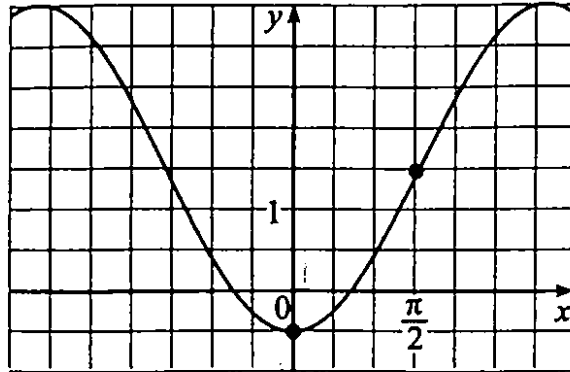


Рис. 128

4. На рисунке 129 изображён график функции вида $y = a^x$, где a — целое число. Найдите $y(6)$.

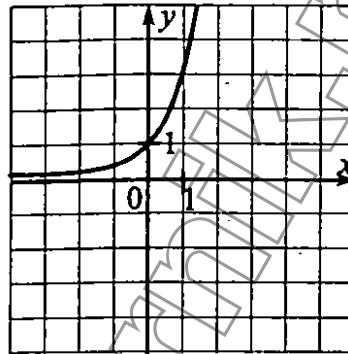


Рис. 129

5. На рисунке 130 изображён график функции вида $f(x) = \log_a(1 + bx)$. Найдите x , при котором $f(x) = 5$.

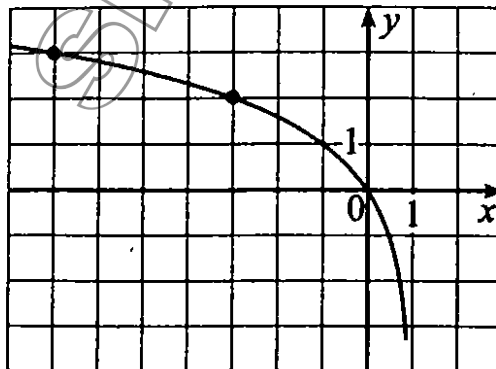


Рис. 130

§ 13. Геометрический смысл производной. Первообразная

13.1. Геометрический смысл производной. Применение производной к исследованию функций

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называют число, равное пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при стремящемся к нулю приращении аргумента.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

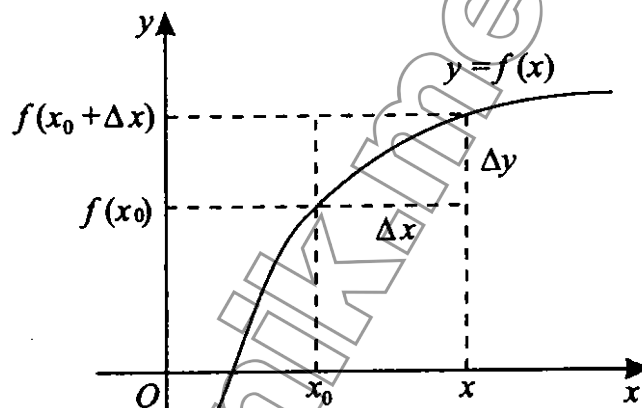


Рис. 131

Рассмотрим рисунок 131, где Δx — это приращение (изменение) аргумента, $x_0 + \Delta x = x$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — приращение функции.

Тогда по определению производной

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Уравнение касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$, имеет вид $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Геометрический смысл производной

Вспомним, что угловой коэффициент k прямой $y = kx + b$ — тангенс угла, образованного этой прямой и положительным направлением оси Ox , отсчитываемого от оси Ox против часовой стрелки (см. рис. 132 и рис. 133 на с. 187).

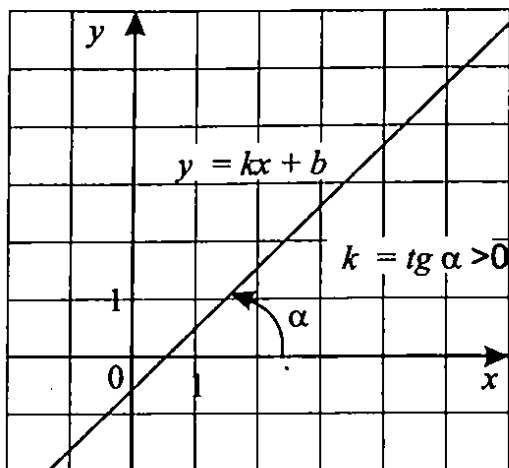


Рис. 132

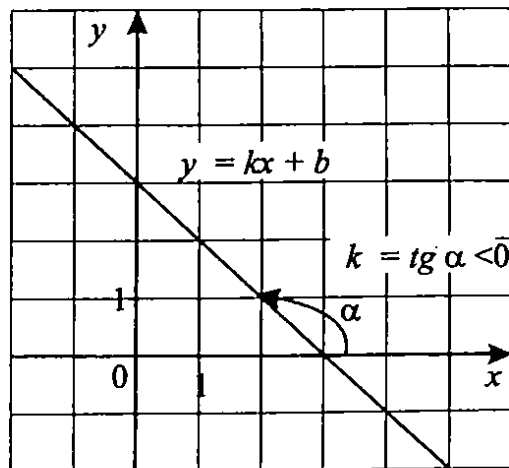


Рис. 133

Геометрически производная $f'(x_0)$ функции $y = f(x)$ в точке x_0 означает угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$, проведённой в точке $(x_0; f(x_0))$.

На рисунке 134 изображены график функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $(a; b)$, и касательная к нему в точке $(x_0; f(x_0))$, проходящая через точки A и C .

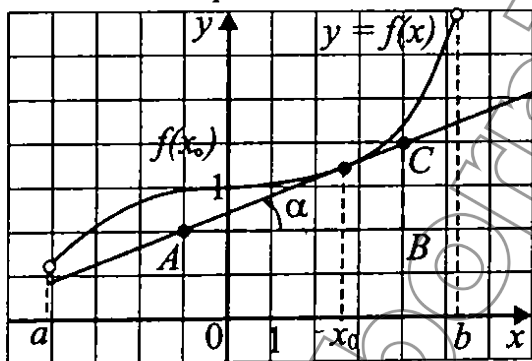


Рис. 134

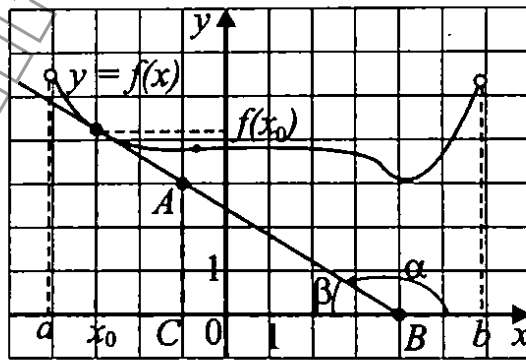


Рис. 135

Находим $f'(x_0)$ как угловой коэффициент прямой AC .

1. Угол, отсчитываемый от положительного направления оси Ox против часовой стрелки до прямой AC , обозначен на рисунке 134 через α . Тогда $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$.

2. Находим $\operatorname{tg} \alpha$ из прямоугольного треугольника BCA : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AB}$.

По клеткам определяем, что $BC = 2$, а $AB = 5$. Поэтому $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{5} = 0,4$. Значит, $f'(x_0) = 0,4$.

Рассмотрим задачу, аналогичную предыдущей (см. рис. 135).

Находим $f'(x_0)$ как угловой коэффициент прямой AB .

1. Угол, отсчитываемый от положительного направления оси Ox против часовой стрелки до касательной к графику этой функции, обозначен на рисунке 135 через α , а угол, дополняющий α до 180° , через β .

2. Тогда $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$. Но $\alpha = \pi - \beta$. Поэтому, применяя формулы приведения, получаем: $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\pi - \beta) = -\operatorname{tg} \beta$.

3. Находим $\operatorname{tg} \beta$ из прямоугольного треугольника BCA : $\operatorname{tg} \beta = \frac{AC}{BC}$.

По клеткам определяем, что $AC = 3$, а $BC = 5$. Поэтому $-\operatorname{tg} \beta = -\frac{AC}{BC} = -\frac{3}{5} = -0,6$. Значит, $f'(x_0) = -0,6$.

Заметим, что если производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна 0, то касательная к графику этой функции в точке $(x_0, f(x_0))$ параллельна оси абсцисс.

Знак производной мы можем определить двумя способами.

1-й способ

Если точка принадлежит интервалу возрастания дифференцируемой функции и касательная к графику в этой точке не является горизонтальной прямой, то значение производной в этой точке положительно. Если точка принадлежит интервалу убывания дифференцируемой функции и касательная к графику в этой точке не является горизонтальной прямой, то значение производной в этой точке отрицательно.

2-й способ

Рассмотрим угол между касательной к графику функции в некоторой точке и осью абсцисс (это угол, отсчитываемый в положительном направлении — против часовой стрелки — от положительного направления оси Ox до касательной). Если угол острый, то значение производной в этой точке положительно, а если угол тупой, то значение производной в этой точке отрицательно (см. рис. 132 и рис. 133 на с. 187).

Полезно знать, что угловые коэффициенты параллельных прямых равны. Прямая, параллельная оси абсцисс Ox , имеет угловой коэффициент, равный нулю.

Применение производной к исследованию функций

Если $f'(x) \geq 0$ для любого x из некоторого промежутка и $f'(x) = 0$ лишь в некоторых отдельных точках этого промежутка, то функция $y = f(x)$ возрастает на этом промежутке.

Если $f'(x) \leq 0$ для любого x из некоторого промежутка и $f'(x) = 0$ лишь в некоторых отдельных точках этого промежутка, то функция $y = f(x)$ убывает на этом промежутке. Если производная непрерывной функции меняет знак при переходе через точку $x = x_0$ (см. рис. 136), причём в точке $x = x_0$ производная равна нулю или не существует, то точка $x = x_0$ — точка экстремума (точка минимума или точка максимума).



Рис. 136

Приведём пример нахождения точек максимума и минимума по графику производной. На рисунке 137 изображены два графика производных разных функций. На обоих графиках $x = a$ — точка максимума функции $f(x)$; $x = b$ — точка минимума функции $f(x)$.

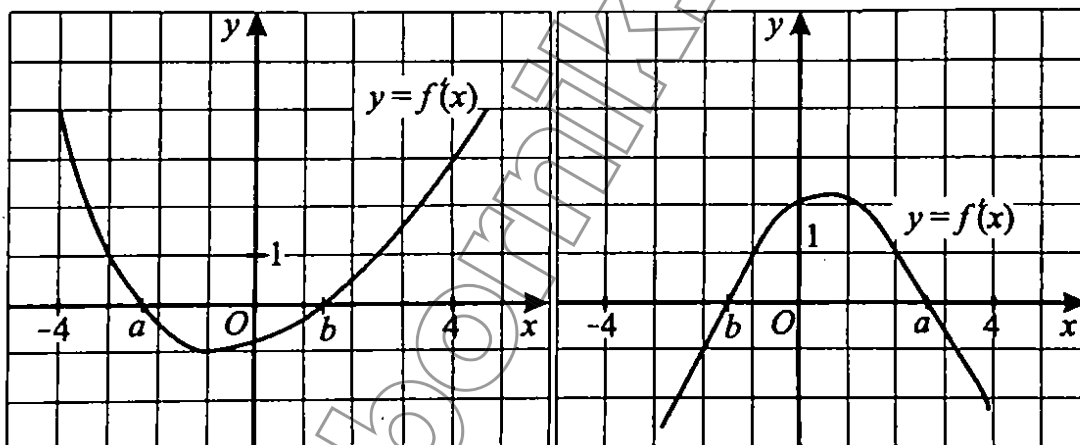


Рис. 137

Точки, в которых производная равна нулю, называют стационарными.

Если функция непрерывна на отрезке, то она принимает наибольшее и наименьшее значения либо на концах отрезка, либо в тех точках, где производная равна нулю (или не существует).

605. На рисунке 138 (см. с. 190) изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

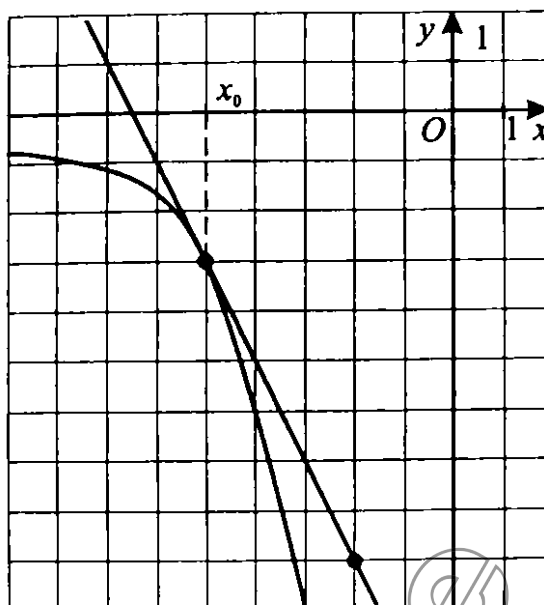


Рис. 138

606. На рисунке 139 изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику в точке с абсциссой, равной -3 . Найдите значение производной этой функции в точке $x_0 = -3$.

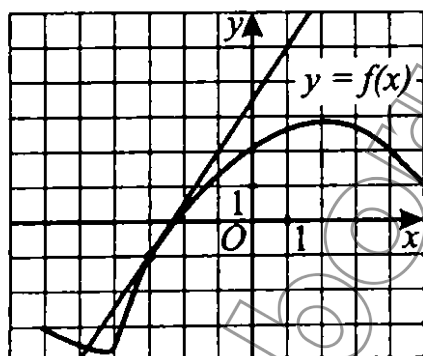


Рис. 139

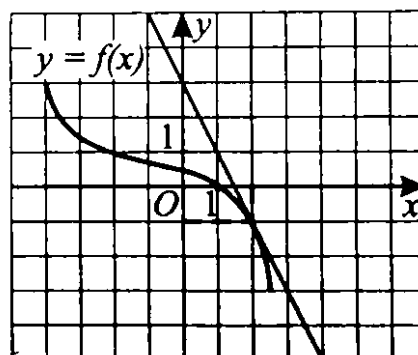


Рис. 140

607. На рисунке 140 изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке $(2; -1)$. Найдите значение производной этой функции при $x = 2$.

608. На рисунке 141 (см. с. 191) изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

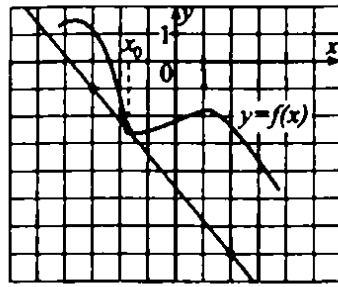


Рис. 141

609. На рисунке 142 (см. с. 191) изображён график функции $y = f(x)$, заданной на интервале $(-9; 8)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ положительна.

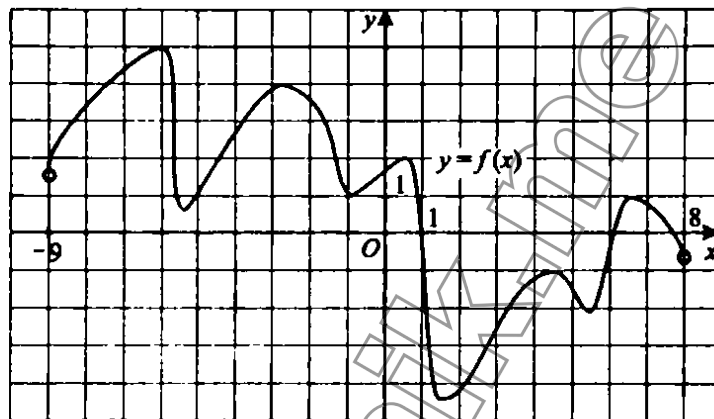


Рис. 142

610. На рисунке 142 изображён график функции $y = f(x)$, заданной на интервале $(-9; 8)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна.

611. На рисунке 143 изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_8$. Во скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?

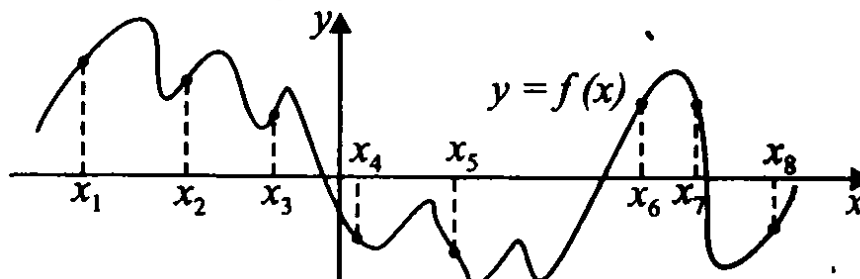


Рис. 143

612. На рисунке 143 (см. с. 191) изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_8$. Во скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?

613. На рисунке 144 изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки A, B, C и D на оси Ox . Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке характеристики функции и производной.

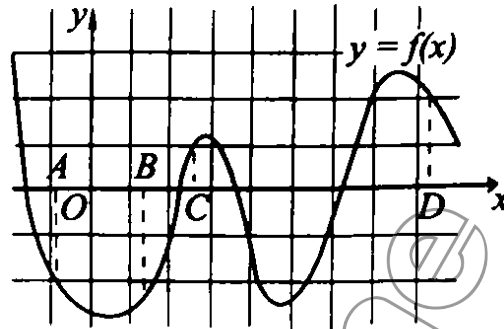


Рис. 144

ТОЧКИ

ХАРАКТЕРИСТИКИ ФУНКЦИИ
И ПРОИЗВОДНОЙ

- | | |
|---|---|
| A | 1) значение функции в точке отрицательно и значение производной функции в точке отрицательно |
| B | 2) значение функции в точке отрицательно, а значение производной функции в точке положительно |
| C | 3) значение функции в точке положительно, а значение производной функции в точке отрицательно |
| D | 4) значение функции в точке положительно и значение производной функции в точке положительно |

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

A	B	C	D

614. На рисунке 145 (см. с. 193) изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки A, B, C и D на оси Ox . Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке характеристики функции и её производной.

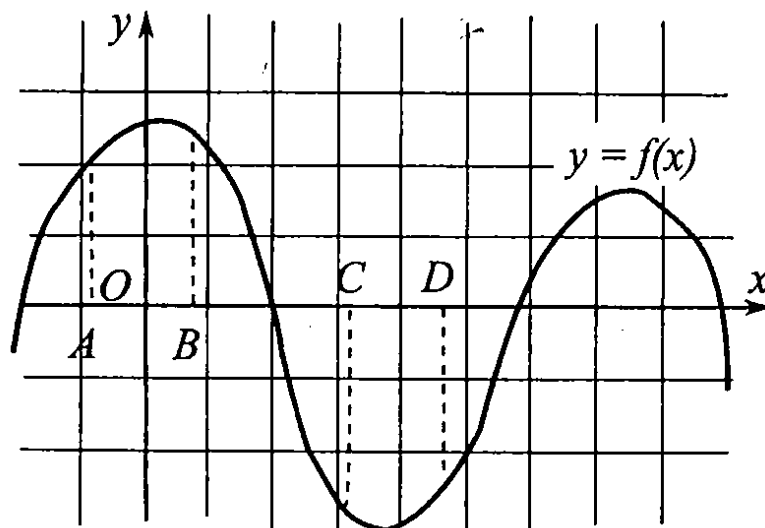


Рис. 145

ТОЧКИ

ХАРАКТЕРИСТИКИ ФУНКЦИИ
И ПРОИЗВОДНОЙ

- A 1) значение функции в точке отрицательно и значение производной функции в точке отрицательно
- B 2) значение функции в точке отрицательно, а значение производной функции в точке положительно
- C 3) значение функции в точке положительно, а значение производной функции в точке отрицательно
- D 4) значение функции в точке положительно и значение производной функции в точке положительно

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

A	B	C	D

615. На рисунке 146 изображён график функции $y = f(x)$. Числа a , b , c , d и e задают на оси Ox интервалы. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу характеристику функции или её производной.

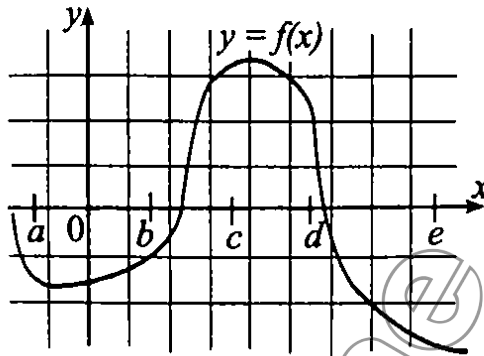


Рис. 146

ИНТЕРВАЛЫ

- А) $(a; b)$
 Б) $(b; c)$
 В) $(c; d)$
 Г) $(d; e)$

ХАРАКТЕРИСТИКИ ФУНКЦИИ
ИЛИ ПРОИЗВОДНОЙ

- 1) значения функции положительны в каждой точке интервала
 2) значения функции отрицательны в каждой точке интервала
 3) значения производной функции положительны в каждой точке интервала
 4) значения производной функции отрицательны в каждой точке интервала

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

616. На рисунке 146 изображён график функции $y = f(x)$. Числа a , b , c , d и e задают на оси Ox интервалы. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу характеристику функции или её производной.

ИНТЕРВАЛЫ

ХАРАКТЕРИСТИКИ ФУНКЦИИ
ИЛИ ПРОИЗВОДНОЙ

- | | |
|-------------|--|
| А) $(a; b)$ | 1) значения производной меньше нуля в каждой точке интервала, а значения функции меньше нуля не в каждой его точке |
| Б) $(b; c)$ | 2) значения функции больше нуля в каждой точке интервала |
| В) $(c; d)$ | 3) значения производной больше нуля в каждой точке интервала, а значения функции больше нуля не в каждой его точке |
| Г) $(d; e)$ | 4) значения функции меньше нуля в каждой точке интервала, а значения производной меньше нуля не в каждой его точке |

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

617. На рисунке 147 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 5)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-4; 3]$.

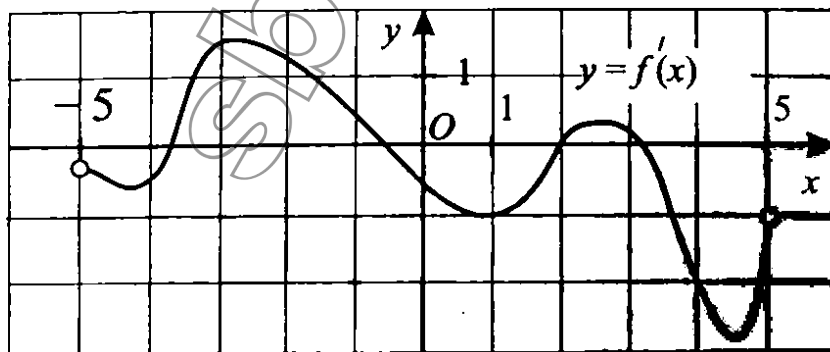


Рис. 147

618. На рисунке 148 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 6)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-3; 5]$.

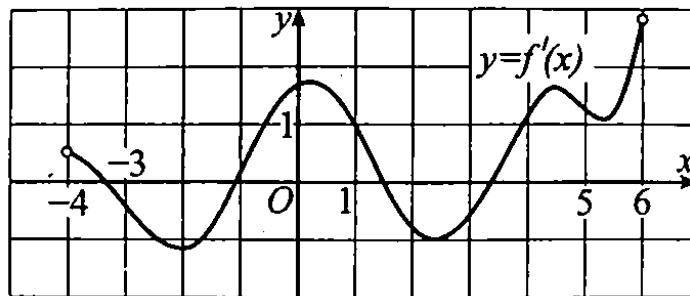


Рис. 148

619. На рисунке 149 изображён график производной функции $f(x)$: Определите количество точек экстремума функции $f(x)$ на интервале $(-5; 5)$.

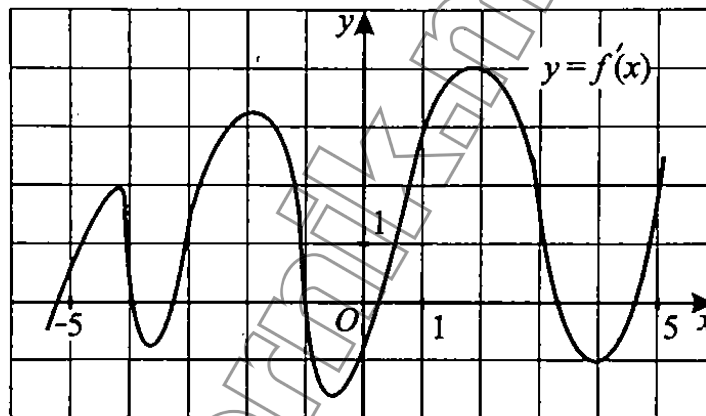


Рис. 149

620. На рисунке 150 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-8; 10)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на интервале $(-3; 4)$.

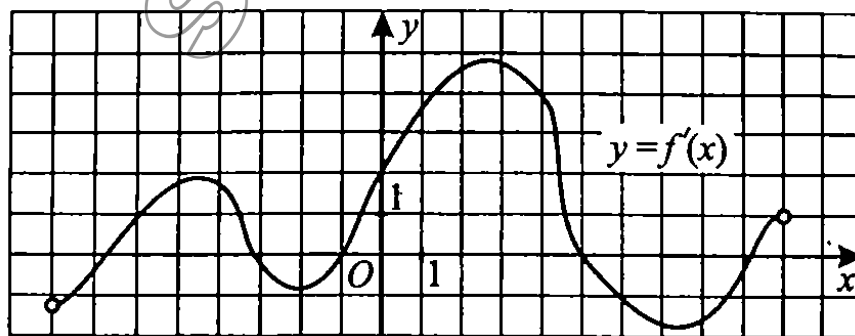


Рис. 150

621. На рисунке 151 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-5; 5)$. Найдите точку максимума функции $y = f(x)$ на интервале $(-3; 3)$.

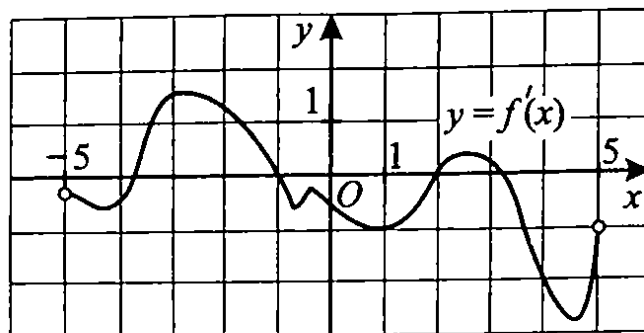


Рис. 151

622. На рисунке 152 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4,5; 5)$. Найдите точку максимума функции $f(x)$.

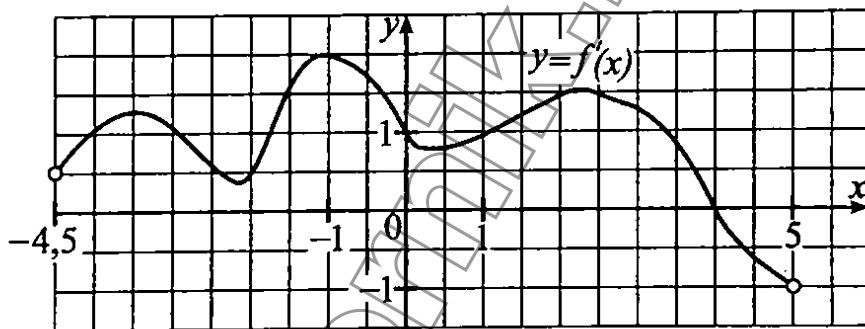


Рис. 152

623. На рисунке 153 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на интервале $(-5; 4)$.

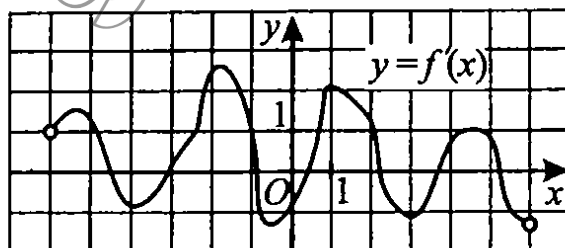


Рис. 153

624. На рисунке 154 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 11)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-3; 10]$.

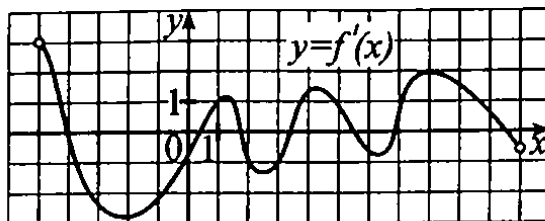


Рис. 154

625. На рисунке 155 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-2; 16)$. Найдите промежутки убывания функции $y = f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

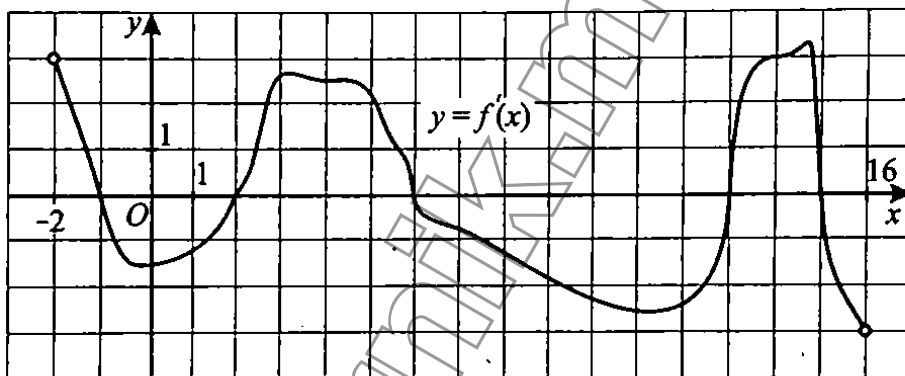


Рис. 155

626. На рисунке 156 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 9)$. Найдите промежутки возрастания $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

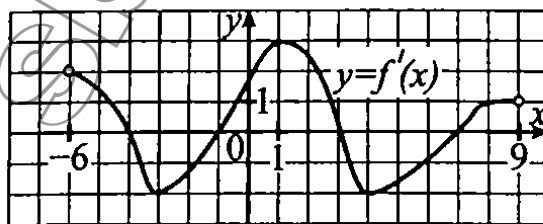


Рис. 156

627. На рисунке 157 (см. с. 199) изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ и отмечены девять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_9$. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам убывания функции $f(x)$?

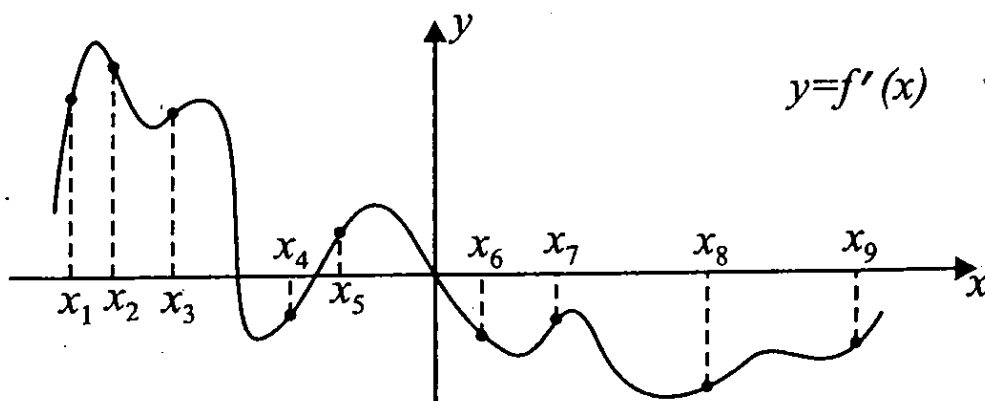


Рис. 157

628. На рисунке 158 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ и отмечены семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_7$. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам возрастания функции $f(x)$?

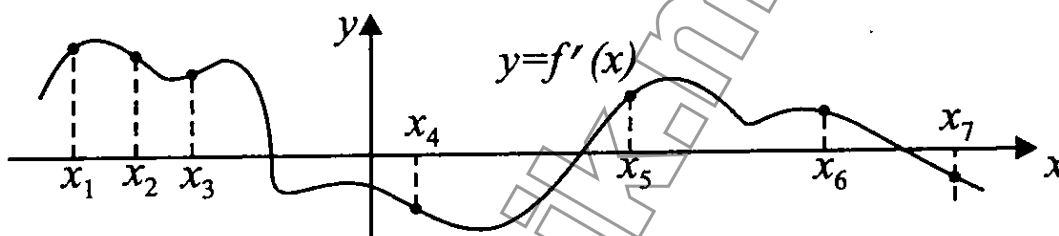


Рис. 158

629. На рисунке 159 изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-1, 1, 2, 4, 6$ на оси Ox . В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

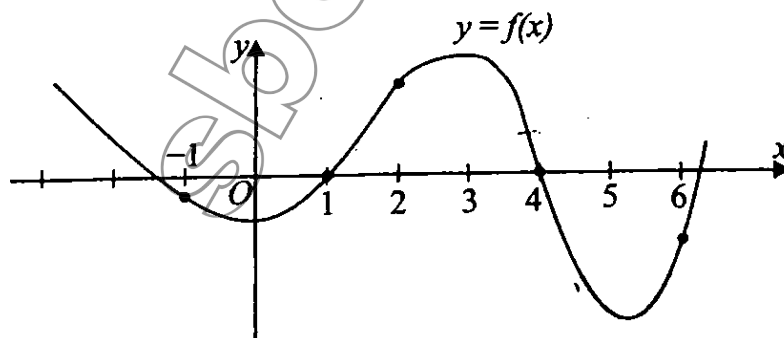


Рис. 159

630. На рисунке 160 (см. с. 200) изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-1, 1, 2, 4, 6$ на оси Ox . В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.

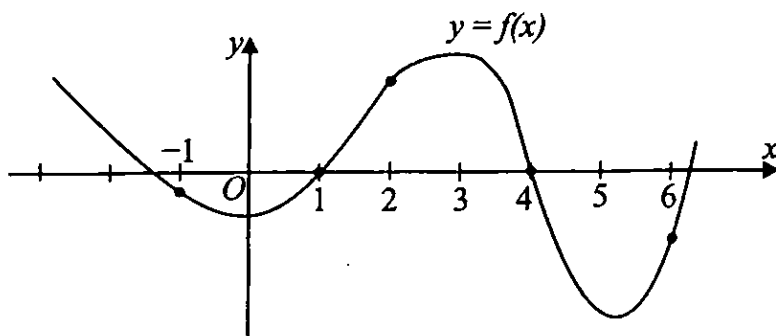


Рис. 160

631. На рисунке 161 изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-1, 1, 2, 3, 4$. В какой из этих точек значение производной данной функции наименьшее? В ответе укажите эту точку.

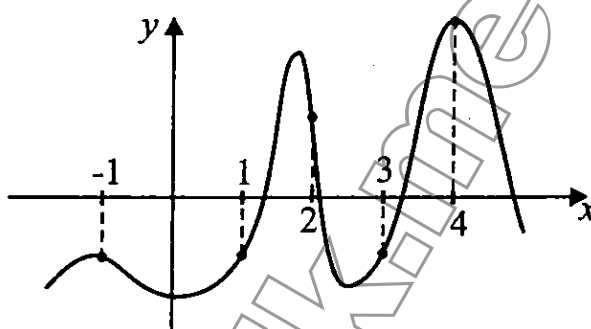


Рис. 161

632. На рисунке 162 изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-4, -3, -2, -1, 1$. В какой из этих точек значение производной данной функции наибольшее? В ответе укажите эту точку.

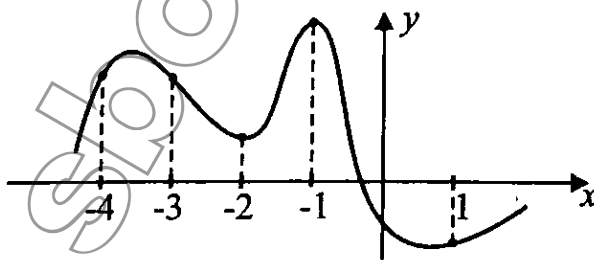


Рис. 162

633. На рисунке 163 (см. с. 201) изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7,5; 7)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = x + 1$ или совпадает с ней.

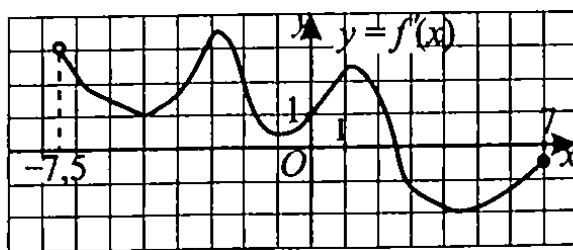


Рис. 163

634. На рисунке 163 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7,5; 7)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -x + 1$ или совпадает с ней.

635. На рисунке 164 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику $f(x)$ параллельна оси абсцисс.

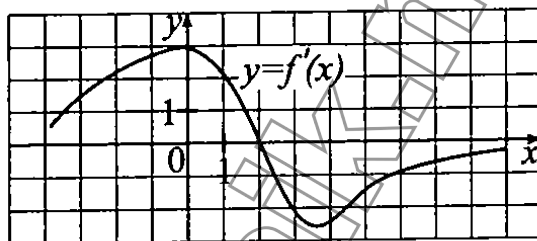


Рис. 164

636. На рисунке 165 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8, 6)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x - 3$ или совпадает с ней.

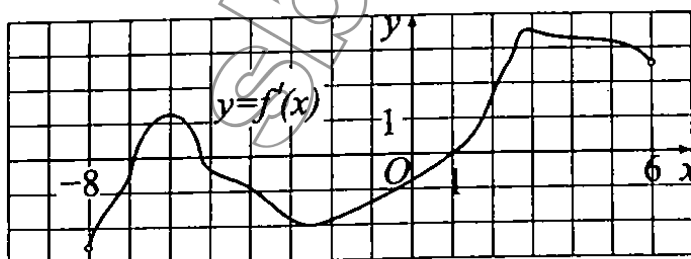


Рис. 165

637. К графику функции $y = f(x)$ проведена касательная в точке с абсциссой $x_0 = 3$. Определите градусную меру угла наклона касательной к положительному направлению оси Ox , если на рисунке 166 (см. с. 202) изображён график производной этой функции.

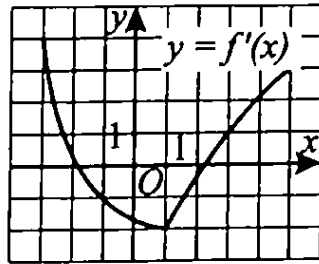


Рис. 166

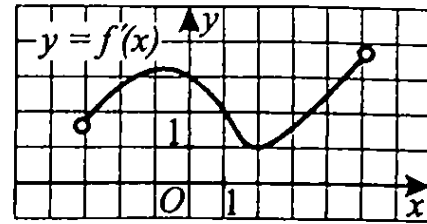


Рис. 167

638. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-3; 5)$. На рисунке 167 изображён график её производной. Найдите угол наклона касательной к положительному направлению оси Ox , проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$. Ответ укажите в градусах.

639. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 4)$. На рисунке 168 изображён график её производной. Найдите число касательных к графику функции $y = f(x)$, которые наклонены под углом 45° к оси абсцисс (угол отсчитывается от положительного направления оси абсцисс против часовой стрелки).

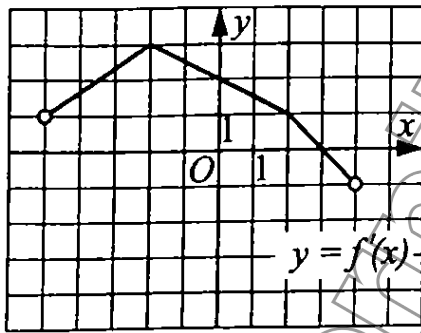


Рис. 168

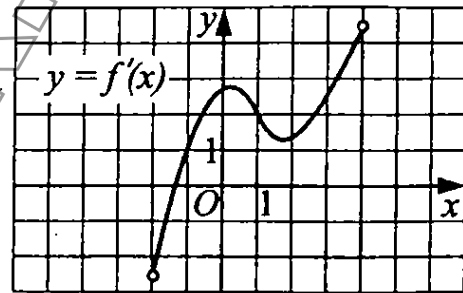


Рис. 169

640. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-2; 4)$. На рисунке 169 изображён график её производной. Определите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ составляет с положительным направлением оси Ox угол 45° (угол отсчитывается от положительного направления оси Ox против часовой стрелки).

641. Прямая $y = -4x + 15$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 3x^2 - 4x + 11$. Найдите абсциссу точки касания.

642. Прямая $y = 6x - 4$ является касательной к графику функции $y = x^3 - x^2 - 2x + 8$. Найдите абсциссу точки касания.

643. Прямая $y = 56$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - 21x + 9$. Найдите абсциссу точки касания.

644. Прямая $y = -17$ параллельна касательной к графику функции $y = 2x^2 - 6x + 15$. Найдите абсциссу точки касания.

645. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 5)$. На рисунке 170 изображён график производной этой функции.

Найдите количество точек максимума функции $y = f(x)$ на промежутке $(-5; 0)$.

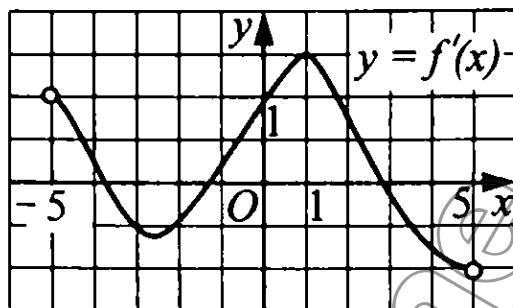


Рис. 170

646. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 5)$. На рисунке 170 изображён график производной этой функции.

Найдите количество точек максимума функции $y = f(x)$ на промежутке $(-5; 5)$.

647. Найдите количество точек максимума функции $y = f(x)$, если на рисунке 171 изображён график производной этой функции.

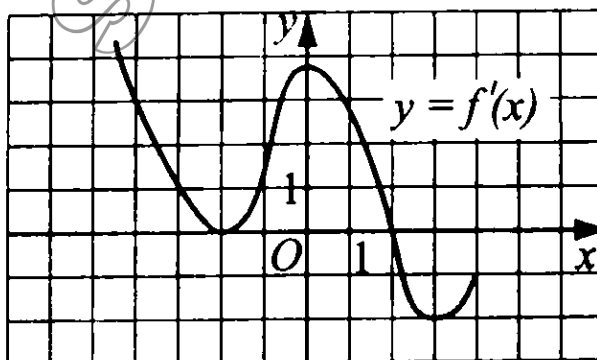


Рис. 171

648. Найдите количество точек минимума функции $y = f(x)$, если на рисунке 171 (см. с. 203) изображён график производной этой функции.

13.2. Первообразная

Пусть $f(x)$ — некоторая функция, заданная на числовом промежутке A . Если функция $F(x)$ такова, что для любого x из промежутка A выполняется $F'(x) = f(x)$, то $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$.

Две первообразные для одной и той же функции отличаются на постоянную величину. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то при любом числе C функция $F(x) + C$ тоже будет первообразной для $f(x)$.

Все графики первообразных для одной и той же функции $f(x)$ получаются друг из друга сдвигом вдоль оси Oy (см. рис. 172).

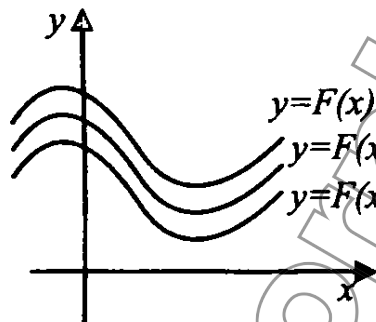


Рис. 172

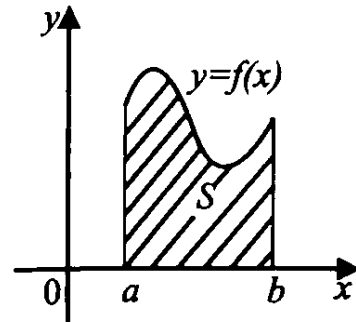


Рис. 173

Как проверить, правильно ли мы нашли первообразную для данной функции? Нужно найти производную от найденной первообразной. Например, $y = \frac{1}{3}x^3 + 5$ является первообразной функции $y = x^2$, потому

$$\text{что } \left(\frac{1}{3}x^3 + 5\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 0 = x^2.$$

На рисунке 173 изображена фигура, ограниченная снизу отрезком $[a; b]$, с боков — отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, сверху — графиком непрерывной функции $y = f(x)$, принимающей неотрицательные значения. Такую фигуру называют **криволинейной трапецией**, отрезок $[a; b]$ — её основанием.

Площадь S криволинейной трапеции можно вычислить с помощью первообразной функции по формуле $S = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ — любая первообразная функции $f(x)$.

649. На рисунке 174 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Одна из первообразных этой функции $F(x) = \frac{2x^3}{3} + 2x^2 + 3x - 1$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

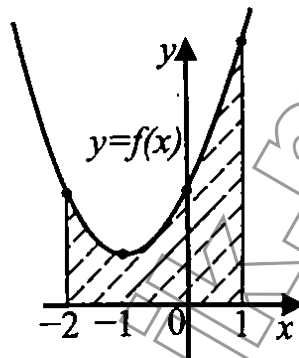


Рис. 174

650. На рисунке 175 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = x^3 - 15x^2 + 78x - \frac{12}{5}$ является одной из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

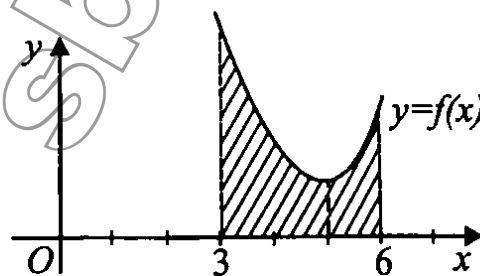


Рис. 175

651. На рисунке 176 (см. с. 206) изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = x^3 - 9x^2 + 29x + \frac{4}{17}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

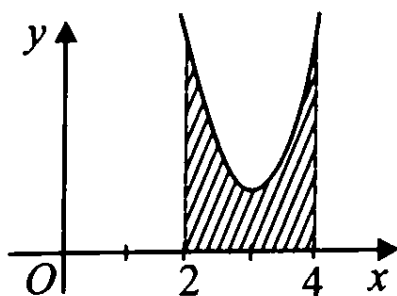


Рис. 176

652. На рисунке 177 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -\frac{x^3}{4} + 6x^2 - 45x + 64$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

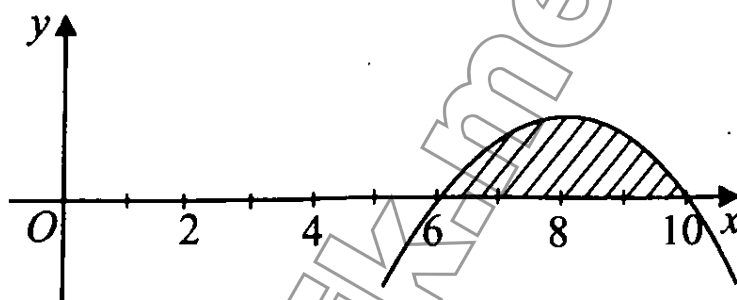


Рис. 177

653. На рисунке 178 изображён график функции $f(x) = 5 - |x + 1| - |x - 2|$. Пользуясь рисунком, вычислите $F(3) - F(-1)$, где $F(x)$ — некоторая первообразная $f(x)$.

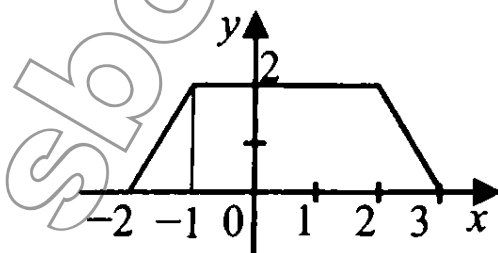


Рис. 178

654. На рисунке 179 изображён график функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите $F(2) - F(-1)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

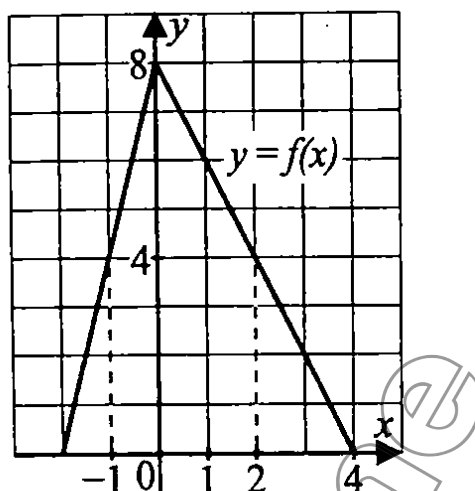


Рис. 179

655. На рисунке 180 изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(7) - F(-3)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

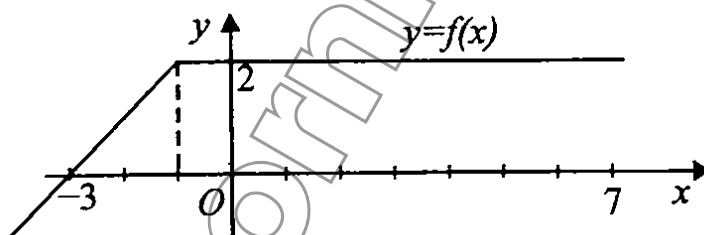


Рис. 180

656. На рисунке 181 изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(1) - F(-7)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

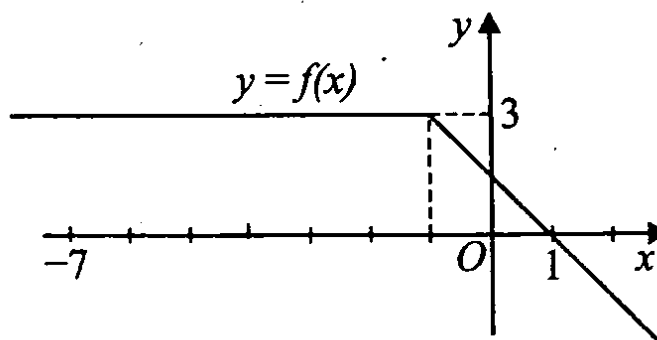


Рис. 181

Задания для контроля

Вариант 1

1. Прямая $y = 2x - 7$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 6x^2 + 2x - 7$. Найдите абсциссу точки касания.
2. На рисунке 182 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 9)$. В какой точке отрезка $[-1; 7]$ $f(x)$ принимает наибольшее значение?

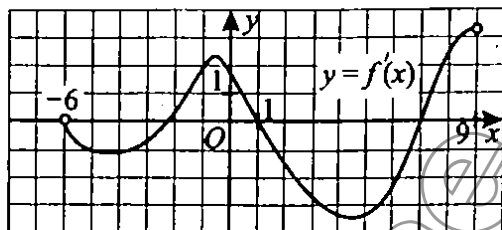


Рис. 182

3. На рисунке 183 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 9)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[-5; 8]$.

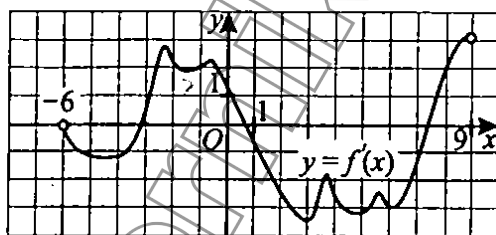


Рис. 183

4. На рисунке 184 изображены график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

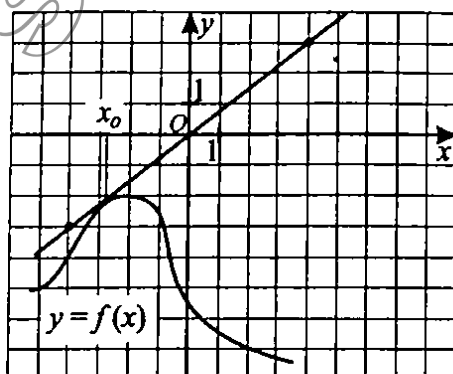


Рис. 184

5. На рисунке 185 изображён график некоторой функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $(0; +\infty)$. Одна из первообразных этой функции — $F(x) = \frac{-3}{x^2} + 2x - 3$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

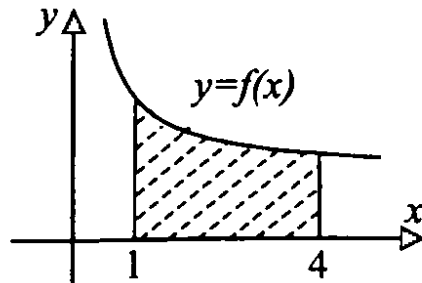


Рис. 185

Вариант 2

1. Прямая $y = 47x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - 7x - 7$. Найдите абсциссу точки касания.

2. На рисунке 186 изображён график функции $y = f(x)$, заданной на интервале $(-4; 5)$. Определите количество целочисленных значений x , при которых производная функции $f(x)$ отрицательна.

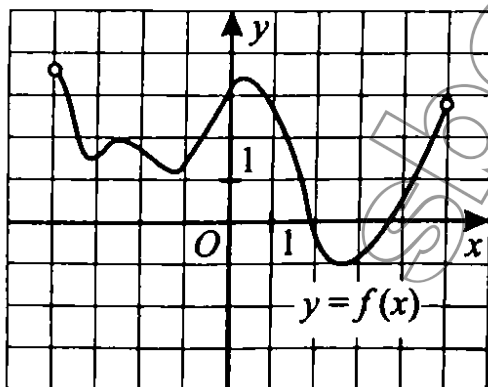


Рис. 186

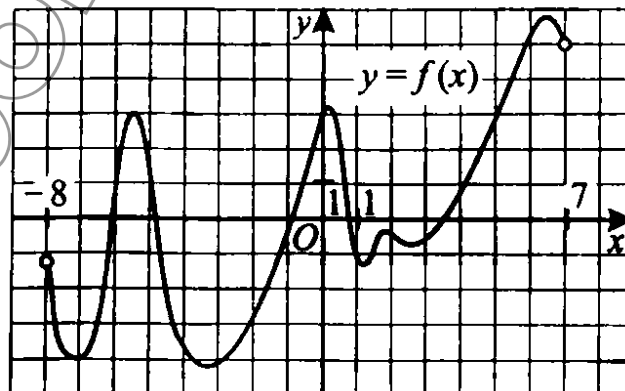


Рис. 187

3. На рисунке 187 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 12$.

4. На рисунке 188 изображены график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

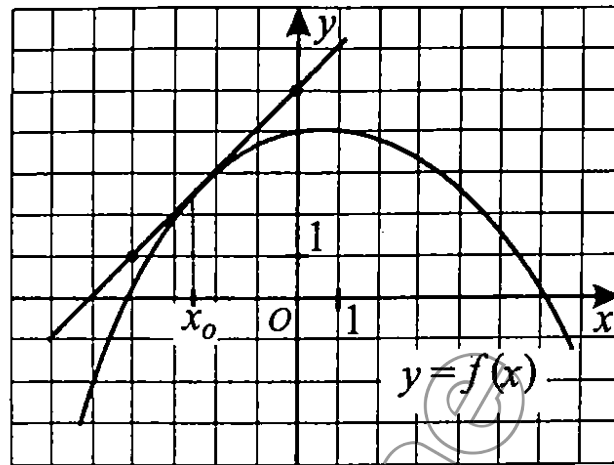


Рис. 188

5. На рисунке 189 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите $F(3) - F(-1)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

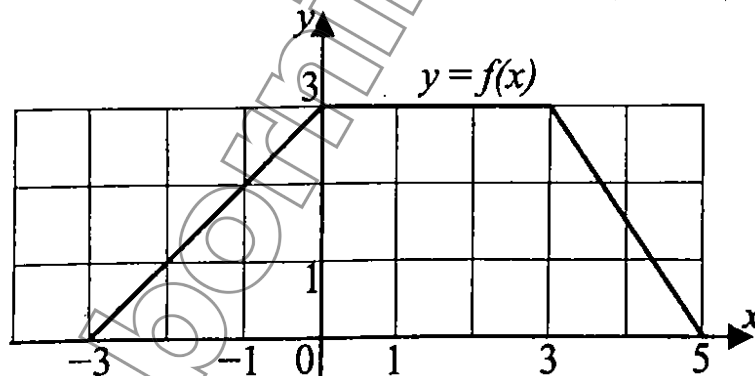


Рис. 189

Вариант 3

1. Прямая $y = 3x + 14$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 6x^2 + 3x - 18$. Найдите абсциссу точки касания.

2. На рисунке 190 (см. с. 211) изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и отмечено восемь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, \dots ,

x_8 . Сколько из этих точек принадлежит промежуткам убывания функции $f(x)$?

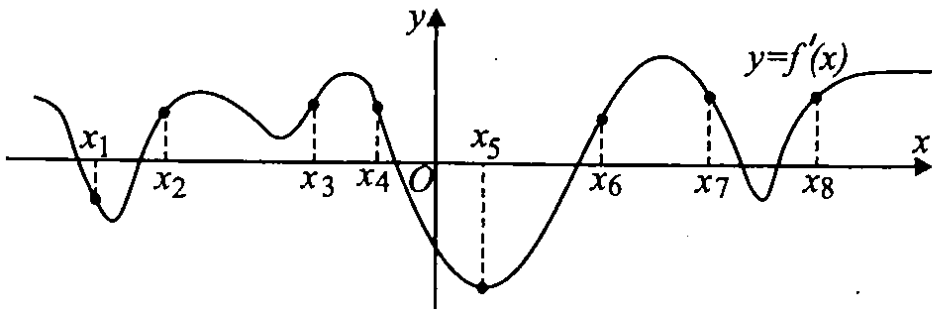


Рис. 190

3. На рисунке 191 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 4)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$ на интервале $(-5; 4)$.

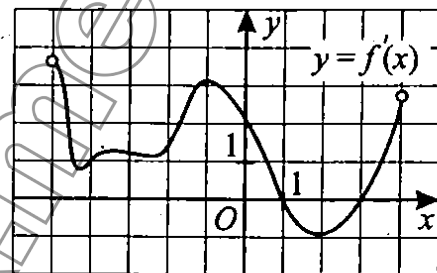


Рис. 191

4. На рисунке 192 изображены график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

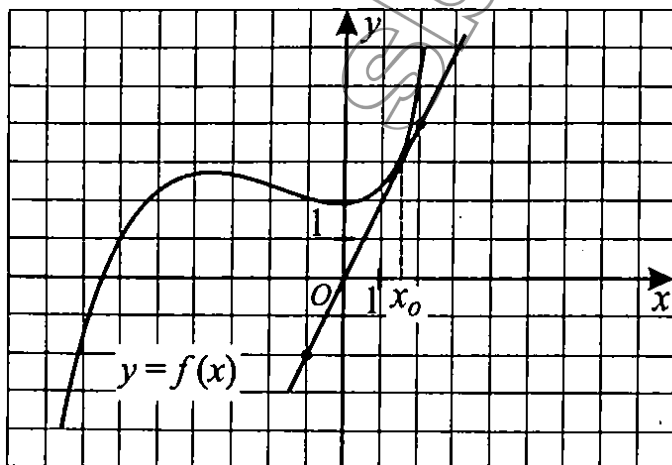


Рис. 192

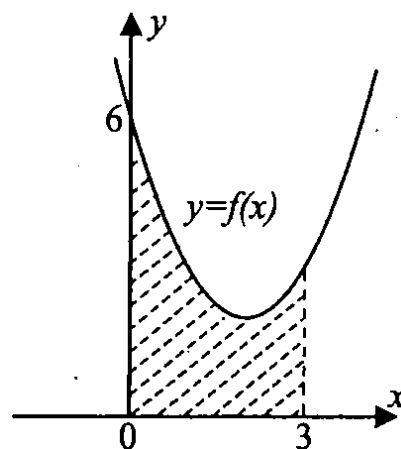


Рис. 193

5. На рисунке 193 (см. с. 211) изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Одна из первообразных этой функции $F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x - 4$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

Вариант 4

1. Прямая $y = -3x + 2$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 8x + 1$. Найдите абсциссу точки касания.

2. На рисунке 194 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.

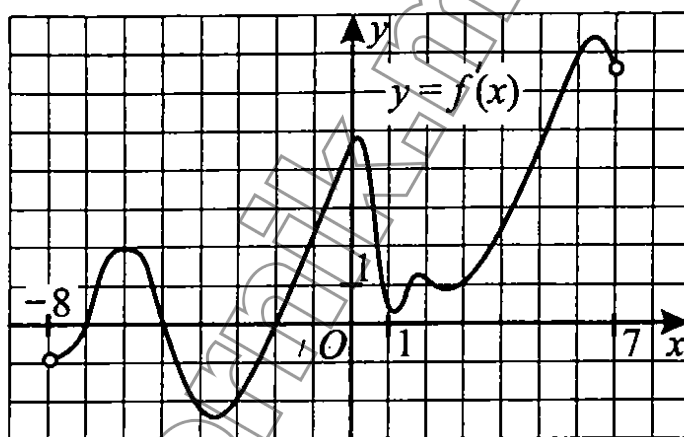


Рис. 194

3. На рисунке 195 изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и отмечены девять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_9$. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам возрастания функции $f(x)$?

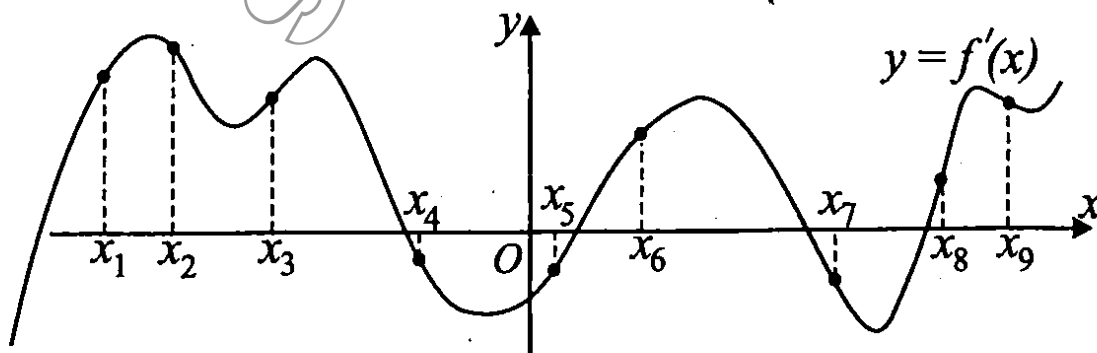


Рис. 195

4. На рисунке 196 изображены график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

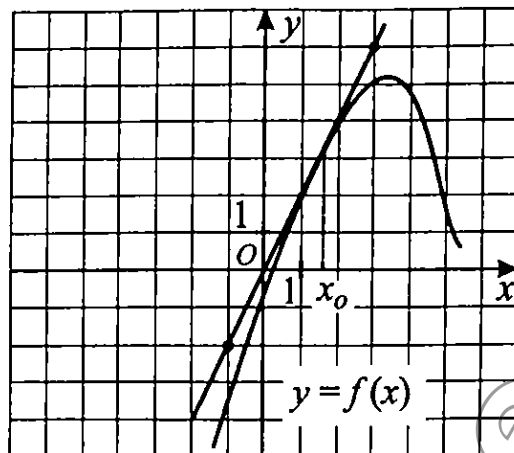


Рис. 196

5. На рисунке 197 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -2x^3 + 51x^2 - 420x + 14$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

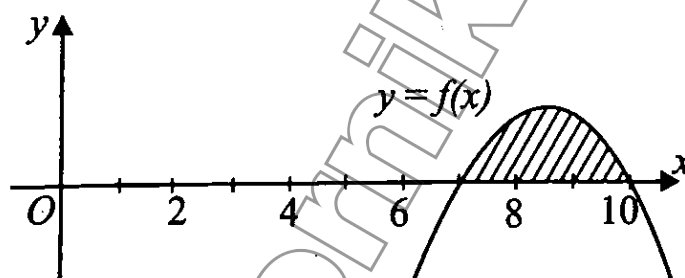


Рис. 197

§ 14. Исследование функции с помощью производной

Производные некоторых элементарных функций

$$(c)' = 0, \text{ где } c = \text{const};$$

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \text{ где } \alpha = \text{const};$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$$

$$(\sin x)' = \cos x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(a^x)' = a^x \ln a;$$

$$(e^x)' = e^x;$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Правила дифференцирования

$$(c \cdot u)' = c \cdot u', \text{ } c - \text{const};$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v';$$

$$(uv)' = u'v + uv';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$

$$y = f(g(x)), \quad y' = f'_u(u) \cdot g'_x(x), \text{ где } u = g(x).$$

Нахождение наибольшего (наименьшего) значения

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке можно находить двумя способами.

I способ

- 1) Находим все точки, в которых производная равна нулю или не существует.
- 2) Вычисляем значения функции в этих точках и на концах промежутка.
- 3) Из указанных значений находим наибольшее и наименьшее значения.

II способ

- 1) Находим все точки, в которых производная равна нулю или не существует, а также концы промежутка.
- 2) По знаку производной на каждом промежутке между соседними, указанными в пункте 1 точками определяем промежутки возрастания и убывания функции.
- 3) Строим эскиз графика функции на отрезке и находим точки, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения.

Точки максимума могут как совпадать, так и не совпадать с точками, где функция принимает наибольшее значение. То же можно сказать про точки минимума и точки, где функция принимает наименьшее значение.

14.1. Многочлены

- 657.** Найдите точку минимума функции $y = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 12$.
- 658.** Найдите точку минимума функции $y = 10x^3 + 15x^2 - 180x + 17$.
- 659.** Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 2,5x^2 - 2x + 6$ на отрезке $[0; 2]$.
- 660.** Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 + 14x^2 + 64x + 96$ на отрезке $[-4; 2]$.
- 661.** Найдите точку максимума функции $y = (x - 2)^2(-2x - 3) + 5$.
- 662.** Найдите точку максимума функции $y = (x - 6)^2(2x + 3) + 4$.
- 663.** Найдите точку минимума функции $y = -2x^3 + 21x^2 - 36x + 4$.
- 664.** Найдите точку максимума функции $y = 6 + 81x - \frac{x^3}{3}$.

14.2. Тригонометрические функции

- 665.** Найдите наименьшее значение функции $y = 3\sqrt{2}\sin x + 3\sqrt{2}x - 15$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- 666.** Найдите наибольшее значение функции $y = 4\sin x + 4x - 2\pi$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- 667.** Найдите наименьшее значение функции $y = 6\cos x - 7x - 12$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

668. Найдите наибольшее значение функции $y = 5\sqrt{2} \sin x - 5x + \frac{5\pi}{4} - 3$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

669. Найдите наибольшее значение функции $y = 16x - 16 \operatorname{tg} x + 4\pi - 56$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

670. Найдите наименьшее значение функции $y = 18x - 18 \operatorname{tg} x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

671. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{44\sqrt{3}}{\pi} + \frac{6}{\pi}(44x - 22 \operatorname{tg} x)$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$.

672. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{15\sqrt{3}}{\pi} + \frac{3}{\pi}(24x - 5 \operatorname{tg} x)$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$.

14.3. Степени и корни

673. Найдите наименьшее значение функции $y = (x + 7)e^{x+8}$ на отрезке $[-9; -7]$.

674. Найдите наименьшее значение функции $y = (4 - x)e^{5-x}$ на отрезке $[4; 6]$.

675. Найдите наибольшее значение функции $y = (x^2 + 8x + 17)e^{x-3} + 1$ на отрезке $[0; 3]$.

676. Найдите наименьшее значение функции $y = (x^2 - 8x + 17)e^{4-x}$ на отрезке $[0; 4]$.

677. Найдите точку минимума функции $y = x^{\frac{5}{2}} - 6x\sqrt{x} + 18$.

678. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x - 2$.

679. Найдите точку максимума функции $y = \frac{9}{x} + x + 6$.

680. Найдите точку минимума функции $y = -\frac{16}{x} - x + 7$.

681. Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{x} + 2013$

на отрезке $[\frac{1}{2}; 10]$.

682. Найдите наименьшее значение функции $y = -\frac{7}{2}x^2 - \frac{7}{x} + 2018$

на отрезке $[\frac{1}{3}; 5]$.

683. Найдите наименьшее значение функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{10x-x^2-29}$.

684. Найдите наименьшее значение функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{6x-x^2-12}$.

14.4. Логарифмы

685. Найдите наименьшее значение функции $y = \log_3(x^2 + 2x + 4) + 3$.

686. Найдите наибольшее значение функции $y = \log_3(18 + 6x - x^2) + 4$.

687. Найдите наименьшее значение функции $y = 4x - \ln(4x + 2) - 8$

на отрезке $[-\frac{3}{8}; -\frac{1}{8}]$.

688. Найдите наименьшее значение функции $y = 2x - \ln(2x) - 4$

на отрезке $[\frac{1}{4}; \frac{7}{4}]$.

Задания для контроля

Вариант 1

1. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 3x^2$ на отрезке $[-2; 5]$.

2. Найдите наименьшее значение функции $y = 16 \cos x + 27x - 6$

на отрезке $[0; \frac{3\pi}{2}]$.

3. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{28x}{\pi} + 7 \sin x + 2$ на отрезке

$[-\frac{5\pi}{6}; 0]$.

4. Найдите наибольшее значение функции $y = 5 \ln(x + 5) - 5x + 11$

на отрезке $[-4,8; 0]$.

5. Найдите точку максимума функции $y = (31 - x)e^{x+31}$.

Вариант 2

1. Найдите наибольшее значение функции $y = (x + 5)^2(x - 3) - 6$ на отрезке $[-5; 0]$.

2. Найдите наибольшее значение функции $y = 18x - 17 \sin x + 2$ на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; 0]$.

3. Найдите наименьшее значение функции $y = 8x - \ln(x + 12)^8$ на отрезке $[-11,5; 0]$.

4. Найдите наибольшее значение функции $y = x^2 - 15x + 13 \ln x + 11$ на отрезке $[\frac{2}{5}; \frac{7}{5}]$.

5. Найдите точку минимума функции $y = (35 - x)e^{35-x}$.

Вариант 3

1. Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 3)^2(x + 1) + 2$ на отрезке $[-1; 5]$.

2. Найдите наибольшее значение функции $y = 15x - 14 \sin x + 8$ на отрезке $[-\frac{3\pi}{2}; 0]$.

3. Найдите наименьшее значение функции $y = 15x - 15 \ln(x + 11) + 4$ на отрезке $[-10,5; 8]$.

4. Найдите наибольшее значение функции $y = 80x - 80 \operatorname{tg} x + 20\pi$ на отрезке $[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}]$.

5. Найдите точку максимума функции $y = (23 + x)e^{23-x}$.

Вариант 4

1. Найдите наибольшее значение функции $y = (x + 7)^2(x - 2) + 10$ на отрезке $[-1; 3]$.

2. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{51x}{\pi} + 17 \sin x + 15$ на отрезке $[-\frac{2\pi}{3}; 0]$.

3. Найдите наименьшее значение функции $y = -8x + 8 \operatorname{tg} x - 14$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

4. Найдите наименьшее значение функции $y = 5x^2 - 5x - 5 \ln x + 11$ на отрезке $\left[\frac{1}{4}; \frac{5}{4}\right]$.

5. Найдите точку минимума функции $y = (x^2 - x - 5)e^{x+8}$.

sbornik.me

§ 15. Содержательные задачи из различных областей науки

15.1. «Экономические» задачи

689. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности In , оперативности Op , объективности публикаций Tr , а также качества сайта Q . Каждый отдельный показатель оценивается читателями по 9-балльной шкале целыми числами от -4 до 4 . Аналитики, составляющие формулу рейтинга, считают, что объективность ценится втрое, а информативность публикаций — всемеро дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид $R = \frac{7In + Op + 3Tr + Q}{A}$. Если по всем четырём показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число A , при котором это условие будет выполняться.

690. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности In , оперативности Op , объективности публикаций Tr , а также качества сайта Q . Каждый отдельный показатель оценивается целыми числами от -4 до 4 . Аналитики, составляющие формулу рейтинга, считают, что объективность ценится впятеро, информативность — втрое, а оперативность — вдвое дороже, чем качество сайта. Таким образом, формула приняла вид $R = \frac{3In + 2Op + 5Tr + Q}{A}$. Если по всем четырём показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число A , при котором это условие будет выполняться.

691. Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле

$$R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K + 1) \cdot \frac{0,02K}{r_{\text{пок}} + 0,1}}, \text{ где } r_{\text{пок}} \text{ — средняя оценка магазина}$$

покупателями (от 0 до 1), $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина экспертами (от 0 до $0,7$) и K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина «Центы», если число покупателей, оставивших отзыв о магазине, равно 19 , их средняя оценка равна $0,4$, а оценка экспертов равна $0,21$.

692. Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле

$$R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K - 1) \cdot \frac{0,03K}{r_{\text{пок}} + 0,2}}, \text{ где } r_{\text{пок}} \text{ — средняя оценка магазина}$$

покупателями (от 0 до 1), $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина экспертами (от 0 до 0,7) и K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина «Gold», если число покупателей, оставивших отзыв о магазине, равно 21, их средняя оценка равна 0,4, а оценка экспертов равна 0,19.

693. Зависимость объёма спроса на продукцию некоторой фирмы от цены продукции задаётся формулой $q(p) = 280 - 10p$, где p — цена (тыс. руб.), q — спрос (единиц в месяц). Определите максимальный уровень цены (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит не менее 960 тыс. руб.

694. Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 175 - 20p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 375 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

695. Операционная прибыль предприятия за краткосрочный период вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p - v) - f$. Компания продаёт свою продукцию по цене $p = 400$ руб. за штуку, затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 300$ руб. за штуку, постоянные расходы предприятия $f = 800\,000$ руб. в месяц. Определите наименьший месячный объём производства q (шт.), при котором прибыль предприятия будет не меньше 700 000 руб. в месяц.

696. Некоторая компания продаёт свою продукцию по цене $p = 750$ руб. за единицу. Переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 250$ руб., постоянные расходы предприятия — $f = 800\,000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в руб.) вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p - v) - f$. Определите наименьший месячный объём производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет не меньше 400 000 руб.

15.2. «Физические» задачи

697. Коэффициент полезного действия теплового двигателя вычисляется по формуле $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$. При каком наименьшем значении температуры нагревателя T_1 КПД двигателя будет не менее 75%, если температура холодильника $T_2 = 350$ К?

698. Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$, где T_1 — температура нагревателя (в градусах Кельвина), T_2 — температура холодильника (в градусах Кельвина). При какой минимальной температуре нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не меньше 20%, если температура холодильника $T_2 = 310$ К? Ответ выразите в градусах Кельвина.

699. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых $R_{\text{пр}}$ составляет 70 Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Чему равно наименьшее возможное сопротивление (в омах) этого электрообогревателя $R_{\text{об}}$, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями $R_{\text{пр}}$ и $R_{\text{об}}$ их общее сопротивление определяется формулой $R = \frac{R_{\text{пр}} \cdot R_{\text{об}}}{R_{\text{пр}} + R_{\text{об}}}$, а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 21 Ом?

700. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых $R_{\text{пр}}$ составляет 90 Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрочайник. Каково наименьшее возможное сопротивление электрочайника $R_{\text{ч}}$, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями $R_{\text{пр}}$ и $R_{\text{ч}}$ их общее сопротивление задаётся формулой $R = \frac{R_{\text{пр}} \cdot R_{\text{ч}}}{R_{\text{пр}} + R_{\text{ч}}}$, а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не менее 36 Ом?

701. Изменение высоты полёта брошенного вертикально вверх мяча описывается формулой $h(t) = -5t^2 + 30t$ (h — высота в метрах, t — время в секундах). Сколько секунд мяч находился на высоте не менее 25 м?

702. Скорость автомобиля v , разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l км с постоянным ускорением a км/ч², вычисляется по формуле $v^2 = 2la$. Определите, с какой наименьшей ско-

ростью будет двигаться автомобиль на расстоянии 0,4 километра от старта, если по конструктивным особенностям автомобиля приобретаемое им ускорение не меньше 8000 км/ч^2 . Ответ выразите в км/ч.

703. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 20 \text{ м}$. При прокладке путей между рельсами оставили зазор в 6 мм. При возрастании температуры будет происходить тепловое расширение рельса, и его длина будет меняться по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha t^\circ)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой минимальной температуре между рельсами исчезнет зазор? (Ответ выразите в градусах Цельсия.)

704. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 12,5 \text{ м}$. При прокладке между рельсами оставили зазор 9 мм. При возрастании температуры будет происходить тепловое расширение рельса, и его длина будет меняться по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha t^\circ)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (\text{ }^\circ\text{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой минимальной температуре между рельсами исчезнет зазор? Ответ выразите в градусах Цельсия.

705. Камень бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности Луны. Время полёта камня (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время полёта будет не меньше 5 секунд, если камень бросают с начальной скоростью $v_0 = 8 \text{ м/с}$? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 1,6 \text{ м/с}^2$.

706. Деталью некоторого прибора является квадратная рамка с намотанным на неё проводом, через который пропущен постоянный ток. Рамка помещена в однородное магнитное поле так, что она может вращаться. Момент силы Ампера (в Н·м), стремящейся повернуть рамку, определяется формулой $M = NIBl^2 \sin \alpha$, где $I = 8 \text{ А}$ — сила тока в рамке, $B = 0,05 \text{ Тл}$ — значение индукции магнитного поля, $l = 0,03 \text{ м}$ — размер рамки, $N = 500$ — число витков провода в рамке, α — острый угол между перпендикуляром к рамке и вектором индукции. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) рамка может начать вращаться, если для этого нужно, чтобы раскручивающий момент M был не меньше $0,09 \text{ Н·м}$?

707. Плоский замкнутый контур площадью $S = 0,3 \text{ м}^2$ находится в магнитном поле, индукция которого равномерно возрастает. При этом согласно закону электромагнитной индукции Фарадея в контуре появляется ЭДС индукции, значение которой, выраженное в вольтах, определяет-

ся формулой $\epsilon_i = aS \cos \alpha$, где α — острый угол между направлением магнитного поля и перпендикуляром к контуру, $a = 25 \cdot 10^{-4}$ Тл/с — постоянная, S — площадь замкнутого контура, находящегося в магнитном поле (в м^2). При каком минимальном угле α (в градусах) ЭДС индукции не будет превышать $375 \cdot 10^{-6}$ В?

708. Скейтбордист прыгает на стоящую на рельсах платформу со скоростью $v = 2$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью $u = \frac{m}{m+M} v \cos \alpha$ (м/с), где $m = 60$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 240$ кг — масса платформы. Под каким максимальным углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу не менее чем до 0,2 м/с?

709. Груз массой 0,16 кг колеблется на пружине со скоростью, меняющейся по закону $v(t) = 2 \cos \pi t$, где t — время в секундах. Кинетическая энергия груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза (в кг), v — скорость груза (в м/с). Определите, какую долю времени из первой секунды после начала движения кинетическая энергия груза будет не менее 0,24 Дж. Ответ выразите десятичной дробью, при необходимости округлите до сотых.

710. Два тела массой $m = 3$ кг каждое движутся с одинаковой скоростью $v = 4$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, определяется выражением $Q = mv^2 \sin^2 \alpha$. Под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось не менее 24 джоулей?

711. При нормальном падении света с длиной волны $\lambda = 500$ нм на дифракционную решётку с периодом d нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол φ (отсчитываемый от перпендикуляра к решётке), под которым наблюдается максимум, и номер максимума k связаны соотношением $d \sin \varphi = k\lambda$. Под каким минимальным углом φ (в градусах) можно наблюдать третий максимум на решётке с периодом, не превосходящим 3000 нм?

712. Очень лёгкий заряженный металлический шарик с зарядом $q = 5 \cdot 10^{-6}$ Кл скатывается по гладкой наклонной плоскости. В момент, когда его скорость составляет $v = 2$ м/с, на него начинает действовать постоянное магнитное поле, вектор индукции B которого лежит в той же плоскости и составляет угол α с направлением движения шарика. Значе-

ние индукции поля $B = 5 \cdot 10^{-3}$ Тл. При этом на шарик действует сила Лоренца, равная $F_L = qvB \sin \alpha$ (Н) и направленная вверх перпендикулярно плоскости. При каком наименьшем значении угла $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ шарик оторвётся от поверхности, если для этого нужно, чтобы сила F_L была не менее $25 \cdot 10^{-9}$ Н? Ответ дайте в градусах.

713. При вращении ведёрка с водой на верёвке в вертикальной плоскости сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет неотрицательной во всех точках траектории. В верхней точке сила давления $P = m \left(\frac{v^2}{L} - g \right)$, где m — масса воды, v — скорость движения ведёрка, L — длина верёвки, g — ускорение свободного падения. С какой минимальной скоростью (в м/с) надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась из него, если длина верёвки равна 90 см? (g считать равным 10 м/с^2 .)

714. При быстром вращении ведёрка с водой на верёвке в вертикальной плоскости вода из него не будет выливаться. При этом сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не выливается, если сила её давления на дно будет неотрицательной во всех точках траектории. В верхней точке сила давления выражается формулой $P = m \left(\frac{v^2}{L} - g \right)$, где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения ($g = 10 \text{ м/с}^2$). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 0,729 м? Ответ выразите в метрах в секунду.

715. Зависимость температуры нагревательного элемента прибора от времени имеет вид $T(t) = T_0 + at + bt^2$, где $T_0 = 100 \text{ К}$, $a = 37,5 \text{ К/мин}$, $b = -0,25 \text{ К/мин}^2$. Прибор может испортиться при температуре выше 1000 К. Определите момент времени (в минутах), когда прибор необходимо отключить, чтобы он не вышел из строя.

716. Зависимость температуры нагревательного элемента прибора от времени имеет вид $T(t) = T_0 + at + bt^2$, где $T_0 = 50 \text{ К}$, $a = 20 \text{ К/мин}$, $b = -0,25 \text{ К/мин}^2$. Прибор может испортиться при температуре выше 350 К. Определите момент времени (в минутах), когда прибор необходимо отключить, чтобы он не вышел из строя.

717. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий $\nu = 40$ моль воздуха при давлении $p_1 = 1,3$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$ (Дж), где $\alpha = 3,5$, $T = 300$ К — температура воздуха, p_1 (атм) — начальное давление, а p_2 (атм) — конечное давление воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления p_2 можно сжать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха совершается работа не более 126 000 Дж? Ответ приведите в атмосферах.

718. Для обогрева помещения, температура в котором равна $T_n = 25^\circ\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду с начальной температурой $T_b = 65^\circ\text{C}$. Расход проходящей через трубу воды $m = 0,2$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x (м), вода охлаждается до температуры T ($^\circ\text{C}$), причём $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_b - T_n}{T - T_n}$ (м), где $c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 21 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 0,7$.

До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы 28 м?

719. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 (мг) — начальная масса изотопа, t (мин) — время, прошедшее от начального момента, T (мин) — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа $m_0 = 100$ мг. Период его полураспада $T = 4$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 25 мг?

720. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 (мг) — начальная масса изотопа, t (мин) — время, прошедшее от начального момента, T (мин) — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа $m_0 = 50$ мг. Период его полураспада $T = 5$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 25 мг?

721. Расстояние (в километрах) от наблюдателя, находящегося на высоте h километров над землёй, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{2Rh}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. С какой высоты горизонт виден на расстоянии 16 километров? Ответ выразите в километрах.

722. Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h километров над землёй, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{2Rh}$, где $R = 6400$ (км) — радиус Земли. С какой высоты горизонт виден на расстоянии 24 километра? Ответ выразите в километрах.

723. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана — Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma ST^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ — числовой коэффициент, площадь измеряется в квадратных метрах, температура — в градусах Кельвина, а мощность — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{7} \cdot 10^{16}$ м², а излучаемая ею мощность P составляет $19,551 \cdot 10^{22}$ Вт. Определите температуру этой звезды.

724. Для определения температуры звёзд используют закон Стефана — Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma ST^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная Стефана — Больцмана, площадь измеряется в квадратных метрах, температура — в градусах Кельвина, а мощность — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = 1,5 \cdot 10^{10}$ м², а излучаемая ею мощность P равна $8,55 \cdot 10^{18}$ ватт. Определите температуру этой звезды.

725. Глубоководники проектируют новый батискаф в виде сферы радиусом R . Выталкивающая сила Архимеда, действующая на батискаф, вычисляется по формуле $F_A = \rho g V = \rho g \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$. Определите максимальный радиус батискафа (в метрах), если сила Архимеда по технологии не должна превосходить 1 130 400 Н. При расчёте примите следующие значения постоянных: $\rho = 1000$ кг/м³, $g = 10$ Н/кг, $\pi = 3,14$.

726. Для поддержания навеса планируется использовать цилиндрическую колонну. Давление P (в паскалях), оказываемое навесом и колонной на опору, определяется по формуле $P = \frac{4mg}{\pi D^2}$, где $m = 270$ кг — общая масса навеса и колонны, D — диаметр колонны (в метрах). Считая ускорение свободного падения $g = 10$ м/с², а $\pi = 3$, определите наименьший возможный диаметр колонны, если давление, оказываемое на опору, не должно быть больше 640 000 Па. Ответ выразите в метрах.

727. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 490$ Гц. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе другой тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону $f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}}$ (Гц), где c — скорость звука

в воздухе (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 10 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью v приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 340$ м/с. Ответ выразите в м/с.

728. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 470$ Гц. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе другой тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону $f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}}$ (Гц), где c — ско-

рость звука в воздухе (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 10 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью v приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 330$ м/с. Ответ выразите в м/с.

729. Парашютисты-экстремалы определяют высоту сооружений для будущих прыжков, засекая время падения небольших камней с вершин сооружений до поверхности приземления. Приближённая зависимость высоты от времени свободного падения имеет вид $h = 4,9t^2$. Здесь h — высота в метрах, t — время в секундах. С вершины первого сооружения камень падал 4,5 с. На сколько метров второе сооружение выше первого, если с вершины второго сооружения камень падал на 1 с дольше?

730. После дождя уровень воды в колодеце может повыситься. Мальчик измеряет время падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где h — расстояние в метрах, t — время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 1,6 с. На сколько метров должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,4 с?

731. К источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 100$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, задаётся формулой

$U = \frac{\varepsilon R}{R + r}$. При каком наименьшем значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет не менее 80 В? Ответ выразите в омах.

732. При сближении источника и приёмника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 250$ Гц и определяется следующим выражением: $f = f_0 \frac{c + u}{c - v}$ (Гц), где c — скорость распространения сигнала в среде (в м/с); $u = 20$ м/с и $v = 5$ м/с — скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике f будет не менее 270 Гц?

Задания для контроля

Вариант 1

1. Независимое агентство намерено ввести рейтинг R новостных изданий на основе показателей информативности In , оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый показатель оценивается целыми числами от -3 до 3 . Аналитик, составляющий формулу, считает, что объективность публикаций ценится вдвое, а информативность — втрое дороже, чем оперативность. В результате формула примет вид $R = \frac{2In + Op + 3Tr}{A}$.

Каким должно быть число A , чтобы издание, у которого все показатели наибольшие, получило рейтинг 60?

2. Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = -4t^2 + 25t$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Найдите, сколько секунд камень находился на высоте не менее 25 метров.

3. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 15$ м. При температуре 0°C между рельсами оставили зазор в 9 мм. При возрастании температуры будет происходить тепловое расширение рельса, и его длина будет меняться по закону $l(t) = l_0(1 + \alpha t)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (^\circ\text{C}^{-1})$ — коэффициент теплового расширения, t — температура (в градусах Цельсия). При какой минимальной температуре между рельсами исчезнет зазор? (Ответ выразите в градусах Цельсия.)

4. Небольшой мячик бросают под острым углом α к поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мячик, вычисляется по формуле

$$L = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \text{ (м)}, \text{ где } v_0 = 14 \text{ м/с} \text{ — начальная скорость мячика, а } g \text{ —}$$

ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ м/с}^2$). При каком наименьшем значении угла (в градусах) мячик перелетит реку шириной 9,8 м?

5. Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $pV^{1,2} = \text{const}$, где p (атм.) — давление, V — объём газа в литрах. Изначально объём газа равен 51,2 л, а его давление равно одной атмосфере. В соответствии с техническими характеристиками сосуд выдерживает давление не более 64 атмосфер. Определите, до какого минимального объёма можно сжать газ. Ответ выразите в литрах.

Вариант 2

1. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности In , оперативности Op , объективности публикаций Tr , а также качества сайта Q . Каждый отдельный показатель оценивается читателями по 5-балльной шкале целыми числами от -2 до 2 . Аналитики, составляющие формулу рейтинга, считают, что объективность ценится вдвое, а информативность публикаций — вшестеро дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид $R = \frac{6In + Op + 2Tr + Q}{A}$. Если по всем четырём показате-

лям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число A , при котором это условие будет выполняться.

2. После паводка уровень воды в колодце может повыситься. Можно определить его, измеряя время падения t небольших камушков в колодец и рассчитывая по формуле $h = -5t^2$ м. До паводка время падения камушков составляло 1,2 с. На какую минимальную высоту должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось больше чем на 0,2 с? (Ответ выразите в метрах.)

3. При сближении источника и приёмника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 280$ Гц и определяется следующим выражением-

ем: $f = f_0 \frac{c+u}{c-v}$ (Гц), где c — скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а $u = 30$ м/с и $v = 20$ м/с — скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике f будет не менее 330 Гц?

4. Два тела, массой $m = 5$ кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $v = 4$ м/с под углом α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, определяется выражением $Q = mv^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$. Под каким наименьшим углом α (в градусах)

должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось не менее 60 джоулей энергии?

5. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана — Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma ST^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ — числовой коэффициент, площадь измеряется в квадратных метрах, температура — в градусах Кельвина, а мощность — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{324} \cdot 10^{17} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P равна $184,68 \cdot 10^{18}$ Вт. Определите температуру этой звезды.

Вариант 3

1. Операционная прибыль предприятия за краткосрочный период вычисляется по формуле $h(q) = q(p - m) - k$. Компания продаёт свою продукцию по цене $p = 8000$ руб. за штуку, затраты на производство одной единицы продукции составляют $m = 2000$ руб., постоянные расходы предприятия $k = 10\,500\,000$ руб. в месяц. Определите наименьший месячный объём производства q (шт.), при котором прибыль предприятия будет не меньше 1 500 000 руб. в месяц.

2. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет 120 Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить холодильник. Чему равно наименьшее возможное сопротивление (в омах) этого холодильника, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление определяется формулой $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$, а для нормального

функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 48 Ом?

3. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 60$ см. Расстояние от линзы до лампочки d_1 может изменяться в пределах от 85 см до 105 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 160 см до 180 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$. Укажите, на каком наименьшем

расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

4. При нормальном падении света с длиной волны $\lambda = 300\sqrt{2}$ нм на дифракционную решётку с периодом d нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол φ (отсчитываемый от перпендикуляра к решётке), под которым наблюдается максимум, и номер максимума k связаны соотношением $d \sin \varphi = k\lambda$. Под каким минимальным углом φ (в градусах) можно наблюдать седьмой максимум на решётке с периодом, не превосходящим 4200 нм?

5. Опорные башмаки шагающего экскаватора, имеющего массу 900 тонн, представляют собой две пустотелые балки длиной 15 метров и шириной s метров каждая. Давление экскаватора на почву, выражаемое в килопаскалях, определяется формулой $p = \frac{mg}{2ls}$, где m — масса экскаватора (в тоннах), l — длина балок в метрах, s — ширина балок в метрах, $g = 10$ м/с² — ускорение свободного падения. Определите наименьшую возможную ширину опорных балок, если известно, что давление p не должно превышать 120 кПа. Ответ выразите в метрах.

Вариант 4

1. Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле

$$R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K + 1) \frac{0,02K}{r_{\text{пок}} + 0,1}},$$

где $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями (от 0 до 1), $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина экспертами (от 0 до 0,9) и K — число покупателей, оценивших магазин.

Найдите рейтинг интернет-магазина, если число покупателей, оставивших отзыв о магазине, равно 20, их средняя оценка равна 0,6, а оценка экспертов равна 0,45.

2. К источнику с ЭДС $E = 12$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, определяется формулой $U = \frac{E \cdot R}{R + r}$.

При каком наименьшем значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет не менее 10 В? Ответ выразите в омах.

3. Автомобиль, масса которого равна $m = 1200$ кг, начинает двигаться с ускорением, которое в течение t секунд остаётся неизменным, и проходит за это время путь $s = 300$ метров. Значение силы (в ньютонах), приложенной в это время к автомобилю, можно вычислить по формуле $F = \frac{2ms}{t^2}$.

Определите наибольшее время после начала движения автомобиля, за которое он пройдёт указанный путь, если известно, что сила F , приложенная к автомобилю, не меньше 1800 Н. Ответ выразите в секундах.

4. Катер должен пересечь реку шириной $L = 45$ м и скоростью течения $u = 0,3$ м/с так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Он может двигаться с разными скоростями, при этом время в пути, измеряемое в секундах, определяется выражением $t = \frac{L}{u} \cdot \operatorname{ctg} \alpha$, где α —

острый угол, задающий направление его движения (отсчитывается от берега). Под каким минимальным углом α (в градусах) нужно плыть, чтобы время в пути было не больше 150 с?

5. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий $\nu = 200$ моль воздуха при давлении $p_1 = 1,1$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением

$A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$ (Дж), где $\alpha = 9,15$, $T = 280$ К — температура воздуха,

p_1 (атм.) — начальное давление, а p_2 (атм.) — конечное давление воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления можно сжать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха совершается работа не более 1 537 200 Дж? Ответ приведите в атмосферах.

16.2. Расположение чисел на координатной прямой

737. При распределении семейного бюджета были определены суммы, выделяемые на ремонт, питание, одежду и коммунальные услуги. Сумма, выделяемая на ремонт, больше суммы, выделяемой на питание, а сумма, выделяемая на одежду, меньше суммы, выделяемой на питание, и меньше суммы, выделяемой на коммунальные услуги. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

- 1) Сумма, выделяемая на одежду, — наименьшая.
- 2) Сумма, выделяемая на коммунальные услуги, равна сумме, выделяемой на питание.
- 3) Сумма, выделяемая на одежду, меньше суммы, выделяемой на ремонт.
- 4) Сумма, выделяемая на коммунальные услуги, меньше суммы, выделяемой на ремонт.

738. Фирма приобрела планшет, принтер, компьютерный стол и шкаф. Известно, что планшет дешевле принтера, а компьютерный стол дешевле шкафа, шкаф дороже принтера. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

- 1) Шкаф — самая дорогая покупка.
- 2) Стол дешевле принтера.
- 3) Планшет дороже стола.
- 4) Шкаф дороже планшета.

739. На соревнованиях по метанию диска Иван метнул диск дальше, чем это сделали Никита и Пётр. Пётр метнул диск дальше Николая, а Фёдор — ближе Ивана. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

- 1) Никита и Пётр метнули диск дальше Фёдора.
- 2) Иван метнул диск дальше всех.
- 3) Фёдор метнул диск ближе Ивана, но дальше Никиты.
- 4) Фёдор метнул диск ближе всех.

740. На соревнованиях по отжиманию от пола Илья отжался большее число раз, чем Николай и Павел. Павел отжался большее количество раз, чем Николай, а Филипп — меньшее количество раз, чем Илья. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

- 1) Николай и Павел отжалась большее количество раз, чем Филипп.
- 2) Филипп отжался меньшее количество раз, чем Илья, но большее количество раз, чем Николай.
- 3) Илья отжался самое большое количество раз.
- 4) Филипп отжался самое меньшее количество раз.

16.3. Непересекающиеся подмножества

741. Некоторые сотрудники издательского отдела отдыхали летом в Китае, а некоторые — в Японии. Те сотрудники, которые отдыхали в Китае, не отдыхали в Японии. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

- 1) Каждый сотрудник издательского отдела где-то отдыхал.
- 2) Среди сотрудников, которые не отдыхали в Китае, есть хоть один сотрудник, который отдыхал в Японии.
- 3) Сотрудник отдела, который летом не отдыхал в Китае, обязательно отдыхал в Японии.
- 4) Нет ни одного сотрудника отдела, который летом отдыхал в Китае и в Японии.

742. Некоторые ученики 8-го класса ходят в танцевальный кружок, а некоторые — в драматический. Те ученики, которые ходят в танцевальный кружок, не ходят в драматический. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

- 1) Ученик этого класса Сливкин, который не ходит в танцевальный кружок, обязательно ходит в драматический.
- 2) Каждый учащийся в этом классе ходит или в танцевальный, или в драматический кружок.
- 3) Среди тех учащихся в этом классе, которые не ходят в танцевальный кружок, есть хотя бы один, который ходит в драматический кружок.
- 4) В классе нет ни одного ученика, который ходит и в танцевальный, и в драматический кружок.

743. В свободное время некоторые ученики одиннадцатого класса смотрят телевизор, а некоторые — ходят в кинотеатр. При этом те, кто ходит в кинотеатр, не смотрят телевизор. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

- 1) В этом классе есть ученики, которые в свободное время смотрят телевизор и ходят в кинотеатр.
- 2) Все ученики этого класса, которые в свободное время смотрят телевизор, не ходят в кинотеатр.
- 3) Не все ученики этого класса в свободное время смотрят телевизор или ходят в кинотеатр.
- 4) В этом классе все ученики, которые в свободное время смотрят телевизор, ходят в кинотеатр.

744. Некоторые пенсионеры многоквартирного жилого дома играют вечерами во дворе в домино, а некоторые — в лото. Причём те, кто играет в домино, не играют в лото. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

- 1) В этом доме найдётся хотя бы один пенсионер, который вечерами играет в лото и домино.
- 2) Каждый пенсионер этого дома играет вечерами либо в лото, либо в домино.
- 3) Все пенсионеры этого дома, которые вечерами играют в лото, не играют в домино.
- 4) В этом доме все пенсионеры, которые вечерами играют в лото, играют в домино.

16.4. Пересекающиеся подмножества

745. В классе учатся 25 человек. Из них 14 посещают кружок по химии, а 15 — кружок по биологии. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

- 1) Если ученик из этого класса ходит на занятия кружка по химии, то он обязательно ходит на занятия кружка по биологии.
- 2) Каждый ученик посещает оба кружка.
- 3) Найдутся хотя бы двое из этого класса, кто посещает оба кружка.
- 4) Не найдётся 11 человек из этого класса, которые посещают оба кружка.

746. В пансионате отдыхают 23 человека. Из них 12 посещают бассейн, а 15 — тренажёрный зал. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

- 1) Если отдыхающий посещает бассейн, то он обязательно посещает тренажёрный зал.
- 2) Найдутся хотя бы трое отдыхающих, которые посещают и бассейн, и тренажёрный зал.
- 3) Каждый отдыхающий посещает и бассейн, и тренажёрный зал.
- 4) Не найдётся 9 отдыхающих, которые одновременно посещают и бассейн, и тренажёрный зал.

747. Среди 15 рыбаков международного рыболовецкого судна английский язык знают 8, а немецкий — 10. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

- 1) Найдётся хотя бы один рыбак, который знает оба языка — английский и немецкий.
- 2) На судне не менее трёх рыбаков знают оба языка — английский и немецкий.
- 3) На этом судне ровно девять рыбаков знают оба языка — английский и немецкий.
- 4) На этом судне есть рыбаки, которые не знают ни одного из указанных языков.

748. На флагштоке вывешены 18 флагов. На 11 из них есть красный цвет, а на 9 — белый. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

- 1) На флагштоке вывешен хотя бы один флаг, на котором есть оба цвета — красный и белый.
- 2) На всех флагах этого флагштока есть либо белый, либо красный цвет.
- 3) На флагштоке вывешены ровно 10 флагов, на которых есть оба цвета — красный и белый.
- 4) На флагштоке вывешено не менее двух флагов, на которых есть оба цвета — красный и белый.

16.5. Числовые промежутки

749. Перед санаторной сменой измерили массу всех приехавших отдыхающих. Оказалось, что масса каждого отдыхающего меньше 100 кг и больше 56 кг. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

- 1) Среди отдыхающих нет никого с массой 98 кг.
- 2) Найдётся двое отдыхающих, разница в массе которых будет меньше 12 кг.
- 3) Среди отдыхающих обязательно есть человек с массой от 60 кг до 75 кг.
- 4) Разница в массе любых двух отдыхающих меньше 44 кг.

750. Результаты школьных соревнований по бегу на 100 м оказались включительно в промежутке от 11,2 с до 12,8 с. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

- 1) Среди достигнутых результатов нет результата 11,1 с.
- 2) Среди достигнутых результатов нет результата 11,5 с.
- 3) Среди достигнутых результатов есть результат 11,7 с.
- 4) Разница любых двух достигнутых результатов не превосходит 1,6 с.

751. При взвешивании боксёров супертяжёлой массы оказалось, что их масса колеблется от 125 до 160 кг включительно. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

- 1) Масса каждого из боксёров равна 130 кг.
- 2) Нет ни одного боксёра, масса которого равна 120 кг.
- 3) Масса каждого из боксёров больше 115 кг.
- 4) Разность в массе любых двух боксёров меньше 36 кг.

752. Температура воздуха в квартире в течение суток была не менее 13°C и не более 22°C . Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

- 1) Температура воздуха в квартире на протяжении двух часов была 13°C .
- 2) Температура воздуха в квартире ночью была меньше 23°C .
- 3) Температура воздуха в квартире ночью была меньше, чем днём.
- 4) Разность температуры воздуха в квартире в любые два момента суток была не более 10°C .

Задания для контроля**Вариант 1**

1. Когда учительница русского языка ведёт урок, она отключает свой телефон. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

- 1) Если учительница разговаривает по телефону, значит, она не ведёт урок.
- 2) Если учительница ведёт урок русского языка, значит, её телефон не отключён.
- 3) Если телефон учительницы включён, значит, она ведёт урок.
- 4) Если учительница проводит на уроке диктант, значит, её телефон выключен.

2. Для школьной столовой были куплены плита, духовой шкаф, набор кастрюль и посудомоечная машина. Известно, что духовой шкаф дороже посудомоечной машины, а набор кастрюль дешевле посудомоечной машины и дешевле плиты. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

- 1) Духовой шкаф — самая дорогая покупка.
- 2) Набор кастрюль — самая дешёвая покупка.
- 3) Плита дешевле посудомоечной машины.
- 4) Плита и духовой шкаф стоят одинаково.

3. Некоторые альпинисты одного спортивного клуба летом 2016 года поднялись на вершину горы Эльбрус, а некоторые — на красноярские Столбы. Оказалось, что альпинисты, поднявшиеся на вершину горы Эльбрус, не поднимались на красноярские Столбы. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

- 1) Если альпинист этого спортивного клуба поднялся на вершину горы Эльбрус, то он поднимался и на красноярские Столбы.
- 2) Каждый альпинист этого спортивного клуба поднимался на красноярские Столбы.
- 3) Среди альпинистов спортивного клуба, которые поднимались на вершину горы Эльбрус летом 2016 года, есть хотя бы один, который поднимался на красноярские Столбы.
- 4) Нет ни одного альпиниста в этом клубе, который поднимался летом 2016 года и на вершину горы Эльбрус, и на красноярские Столбы.

4. В бюро работают 15 переводчиков, 9 из которых знают английский язык, 8 — немецкий язык. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

- 1) Ни один из переводчиков не владеет одновременно английским и немецким языками.
 - 2) Хотя бы двое переводчиков знают и английский, и немецкий языки.
 - 3) Хотя бы один переводчик владеет двумя указанными иностранными языками.
 - 4) Не найдётся 7 переводчиков, знающих оба названных иностранных языка.
5. Перед соревнованиями по борьбе измерили массу всех участников команды школы № 4. Оказалось, что масса каждого участника этой команды меньше 70 кг и больше 50 кг. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

- 1) В команде школы № 4 нет участника с массой 48 кг.
- 2) В команде школы № 4 обязательно есть участник с массой 60 кг.
- 3) Масса любого участника этой команды меньше 90 кг.
- 4) Не найдутся два участника этой команды, чья суммарная масса будет превышать 120 кг.

Вариант 2

1. В жилых домах, в которых больше 12 этажей, на кухне установлены электрические плиты вместо газовых. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

- 1) Если в доме установлены газовые плиты, то в этом доме менее 13 этажей.
- 2) Если в доме установлены электрические плиты, то в этом доме менее 13 этажей.
- 3) Если в доме больше 15 этажей, то в нём установлены электрические плиты.
- 4) Если в доме установлены газовые плиты, то в нём более 12 этажей.

2. Елена старше Натальи, но младше Дарьи. Светлана не старше Натальи. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

- 1) Дарья самая старшая из четырёх подруг.
- 2) Светлана и Наталья одного возраста.
- 3) Елена и Дарья одного возраста.
- 4) Наталья младше Дарьи.

3. Некоторые учащиеся одной школы на летних каникулах отдыхали в городском оздоровительном лагере, а некоторые — за пределами города. Все учащиеся, которые отдыхали за пределами города, не отдыхали в городском оздоровительном лагере. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

- 1) Если учащийся этой школы отдыхал на летних каникулах в городском оздоровительном лагере, то он отдыхал и за пределами города.
- 2) Каждый учащийся этой школы отдыхал летом в городском оздоровительном лагере.
- 3) Среди учащихся этой школы, которые не отдыхали за пределами города, есть хотя бы один, который отдыхал в городском оздоровительном лагере.
- 4) Нет ни одного учащегося в этой школе, который отдыхал и в городском оздоровительном лагере, и за пределами города.

4. В классе обучается 18 человек, из них 10 участвовали в экскурсионной поездке в Санкт-Петербург, а 9 — в Ростов-на-Дону. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

- 1) По крайней мере один обучающийся участвовал в каждой из этих поездок.
- 2) Не найдётся 10 обучающихся, которые посетили оба города.
- 3) Обе экскурсии проходили в одно и то же время.
- 4) Обе экскурсии проходили в разное время.

5. В классе рост каждого учащегося меньше 1 м 90 см, но не меньше 1 м 40 см. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

- 1) Рост каждого учащегося класса не больше 189 см.
- 2) Рост каждого учащегося больше 140 см.
- 3) Разница в росте двух учащихся в классе меньше 51 см.
- 4) В классе есть учащиеся ростом 155 см.

Вариант 3

1. Когда учительница биологии ведёт урок, она отключает свой телефон. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

- 1) Если телефон учительницы включён, то она ведёт урок.
- 2) Если учительница ведёт урок биологии, то её телефон отключён.
- 3) Если телефон учительницы включён, значит, она не ведёт урок.
- 4) Если учительница проводит на уроке контрольную работу по биологии, значит, её телефон включён.

2. Молодой семье на новоселье подарили стол, картину, ковёр и сушилку для белья. Известно, что ковёр дороже картины, а стол дешевле ковра и дороже сушилки. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

- 1) Стол дороже картины.
- 2) Картина дороже стола.
- 3) Картина и стол по отдельности дешевле ковра.
- 4) Сушилка дешевле ковра.

3. Среди сотрудников коммерческого банка летом 2016 года некоторые отдыхали в Европе, а некоторые — в Южной Америке. Те сотрудники, которые отдыхали в Европе, не отдыхали в Южной Америке. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

- 1) Каждый сотрудник этого коммерческого банка летом 2016 года отдыхал хоть где-то.
- 2) Среди тех сотрудников, которые не отдыхали в Южной Америке летом 2016 года, есть хотя бы один, который отдыхал в Европе.
- 3) Каждый сотрудник этого банка, который летом 2016 года не отдыхал в Европе, обязательно отдыхал в Южной Америке.
- 4) Нет ни одного сотрудника этого банка, который летом 2016 года отдыхал и в Европе, и в Южной Америке.

4. В спортивном офисе работают 18 сотрудников, каждый из которых занимается либо волейболом, либо плаванием. 12 сотрудников занимаются волейболом, а 8 — плаванием. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

- 1) Все сотрудники этого офиса занимаются одновременно волейболом и плаванием.
- 2) Есть сотрудники, которые занимаются одновременно и волейболом, и плаванием.
- 3) Ровно два сотрудника офиса занимаются одновременно и волейболом, и плаванием.
- 4) Всякий, кто занимается волейболом, занимается также и плаванием.

5. На предыгровой разминке тренер команды дал всем игрокам задание выполнить броски с попаданием в кольцо. Оказалось, что за оставшееся время количество бросков, выполненных каждым игроком, было больше 5 и меньше 9. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

- 1) В команде есть игрок, который выполнил ровно 4 броска.
- 2) В команде нет игрока, который бы выполнил 10 бросков.
- 3) Любой игрок выполнил меньше 9 бросков.
- 4) Разница в количестве бросков с попаданием любых двух игроков больше двух.

Вариант 4

1. Когда какая-нибудь мышка выглядывает из норки, кот Мурзик обязательно мяукает. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

- 1) Если Мурзик молчит, значит, мышка не выглядывает из норки.
- 2) Если Мурзик мяукает, значит, мышка не выглядывает из норки.
- 3) Если из норки выглянула маленькая мышка, то Мурзик будет мяукать.
- 4) Если Мурзик молчит, значит, мышка выглядывает из норки.

2. Петя, Ваня, Олег и Дима взвесились перед тренировкой в фитнес-клубе. Оказалось, что Дима весит больше, чем Олег, а Петя легче Вани и легче Олега. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

- 1) Ваня легче Димы.
- 2) Ваня тяжелее Димы.
- 3) Петя – самый лёгкий из этой компании.
- 4) Олег легче Вани.

3. Среди сотрудников издательского отдела есть те, кто посещает тренажёрный зал, и есть те, кто посещает бассейн. Ни один из тех, кто посещает тренажёрный зал, не посещает бассейн. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

- 1) Каждый сотрудник издательского отдела посещает либо тренажёрный зал, либо бассейн.
 - 2) В издательском отделе есть сотрудники, которые посещают и тренажёрный зал, и бассейн.
 - 3) В издательском отделе есть сотрудники, которые не посещают бассейн, но посещают тренажёрный зал.
 - 4) Все сотрудники издательского отдела, которые посещают бассейн, не посещают тренажёрный зал.
4. Инструментальный ансамбль состоит из 17 музыкантов, каждый из которых играет либо на скрипке, либо на флейте. 11 музыкантов умеют играть на скрипке, а 9 — на флейте. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.
- 1) Каждый музыкант, играющий на скрипке, играет также и на флейте.
 - 2) Все музыканты играют на флейте.
 - 3) Есть музыканты, умеющие играть и на скрипке, и на флейте.
 - 4) Ровно трое музыкантов умеют играть и на скрипке, и на флейте.
5. В районных соревнованиях по жиму гири 32 кг наименьший результат составил 27 раз, а наибольший — 52 раза. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.
- 1) Разница любых двух показанных результатов меньше 26 раз.
 - 2) Среди показанных результатов нет результата 35 раз.
 - 3) Среди показанных результатов есть результат 57 раз.
 - 4) Среди показанных результатов есть результат 34 раза.

§ 17. Планиметрия: площади фигур

17.1. Прямоугольный треугольник

Для вычисления сторон прямоугольного треугольника можно применять теорему Пифагора.

Теорема Пифагора: В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы c равен сумме квадратов катетов a и b :

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов: $S = \frac{ab}{2}$.

На рисунке 198 на клетчатой бумаге с клетками размером 1 см \times 1 см изображены прямоугольные треугольники, у которых катеты a и b (за исключением одного треугольника) состоят из нескольких сторон клеток. Находим a и b по рисунку, а затем площади треугольников по формуле $S = \frac{ab}{2}$.

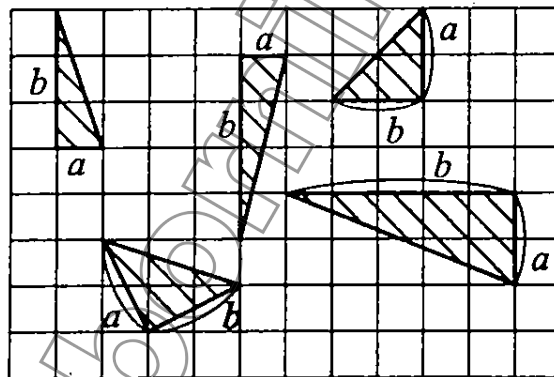


Рис. 198

Получаем соответственно: $S = \frac{ab}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2} = 1,5$;

$$S = \frac{ab}{2} = \frac{1 \cdot 4}{2} = 2; S = \frac{ab}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2; S = \frac{ab}{2} = \frac{2 \cdot 5}{2} = 2,5.$$

В последнем случае катеты a и b прямоугольного треугольника равны и являются гипотенузами прямоугольных треугольников с катетами, равными 1 см и 2 см (рис. 198). Находим эти гипотенузы по теореме Пифагора ($\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$), а затем площадь указанного прямоугольного треугольника по формуле $S = \frac{ab}{2} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{2} = 2,5$.

На рисунке 199 на координатной плоскости изображён прямоугольный треугольник ATC . Точки A , T и C имеют координаты $A(4; 10)$, $T(4; 2)$, $C(8; 2)$.

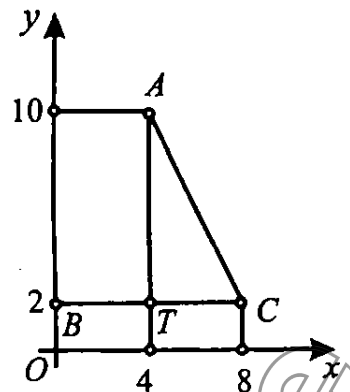


Рис. 199

Катеты AT и TC этого треугольника параллельны координатным осям. Поэтому длина AT равна разности ординат точек A и T (из большей ординаты вычитается меньшая: $AT = 10 - 2 = 8$). Длина TC равна разности абсцисс точек C и T (из большей абсциссы вычитается меньшая: $TC = 8 - 4 = 4$). Тогда площадь S_{ATC} треугольника ATC находим по формуле $S_{ATC} = \frac{AT \cdot TC}{2} = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16$.

Длина AC находится по теореме Пифагора: $AC^2 = TC^2 + AT^2$.

$$AC^2 = 4^2 + 8^2 = 16 + 64 = 80. \quad AC = \sqrt{80}.$$

753. На клетчатой бумаге с клетками размером $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ изображён треугольник (см. рис. 200). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

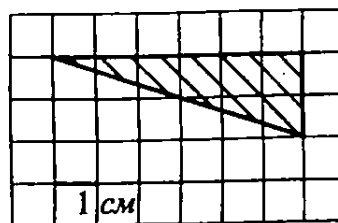


Рис. 200

754. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён треугольник (см. рис. 201). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

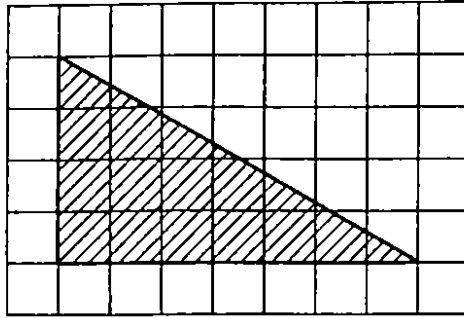


Рис. 201

755. Найдите площадь треугольника (в см²), вершины которого имеют координаты (4; 2), (6; 2), (4; 10) (см. рис. 202).

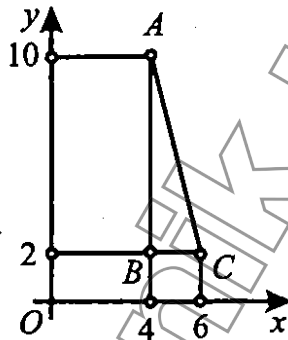


Рис. 202

756. Найдите площадь треугольника (в см²), вершины которого имеют координаты (4; 10), (0; 2), (4; 2) (см. рис. 203).

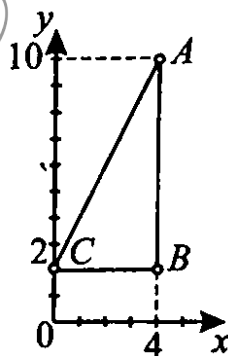


Рис. 203

17.2. Треугольник

Площадь произвольного треугольника равна половине произведения длины его стороны a на высоту h , проведённую к этой стороне:

$$S = \frac{ah}{2}.$$

На рисунке 204 изображены некоторые треугольники, у которых a — одна из сторон треугольника, а h — высота этого треугольника, проведённая к стороне a (h — расстояние от вершины, противолежащей этой стороне, до прямой, проходящей через эту сторону).

Как правило, для нахождения площади удобно брать ту сторону, которая проходит по линиям клетчатой бумаги (или же проходит параллельно осям координат).

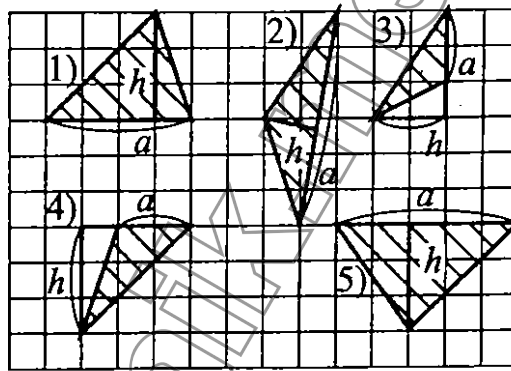


Рис. 204

Площади треугольников, расположенных в углах рисунка 204, равны соответственно: 1) $S = \frac{ah}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$; 3) $S = \frac{ah}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$;

$$4) S = \frac{ah}{2} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3; 5) S = \frac{ah}{2} = \frac{5 \cdot 3}{2} = 7,5.$$

757. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён треугольник (см. рис. 205). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

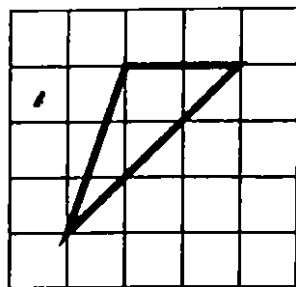


Рис. 205

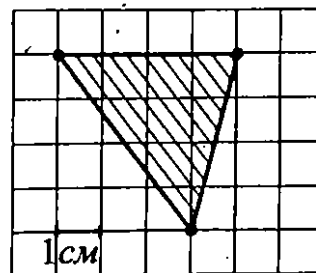


Рис. 206

758. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рис. 206 на с. 250). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

759. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рис. 207). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

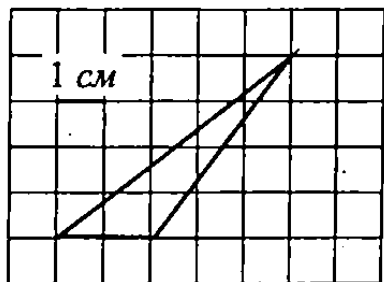


Рис. 207

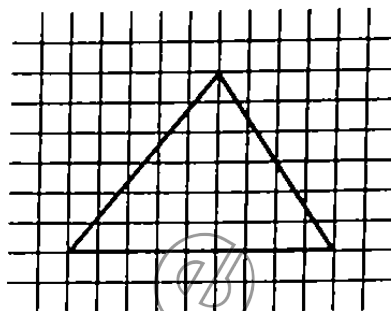


Рис. 208

760. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рис. 208). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

17.3. Прямоугольник

Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон: $S = ab$.

На рисунке 209 изображены некоторые прямоугольники, у которых показаны смежные стороны a и b .

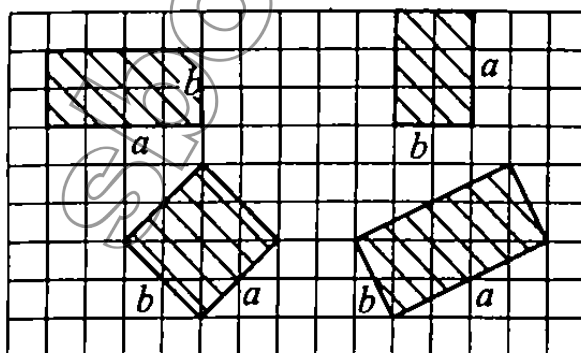


Рис. 209

Если стороны прямоугольника лежат на линиях клетчатой бумаги, то площадь прямоугольника вычисляем, определяя по рисунку длины смежных сторон. Площади прямоугольников, изображённых в верхней части рисунка 209, соответственно равны: $S = a \cdot b = 4 \cdot 2 = 8$; $S = a \cdot b = 3 \cdot 2 = 6$.

Если сторона прямоугольника не лежит на линии клетчатой бумаги, то её длину определяем по теореме Пифагора как гипотенузу соответствующего прямоугольного треугольника. Площади прямоугольников, изображённых в нижней части рисунка 209 (см. с. 251), соответственно равны: $S = a \cdot b = \sqrt{2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} \cdot \sqrt{8} = 8$; $S = a \cdot b = \sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{100} = 10$.

761. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён прямоугольник (см. рис. 210). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

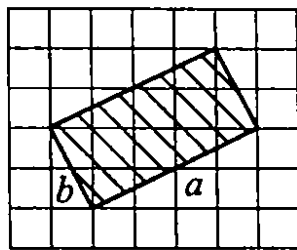


Рис. 210

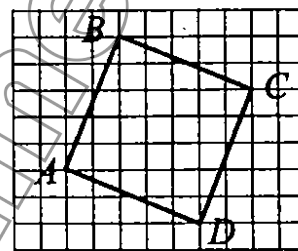


Рис. 211

762. Найдите площадь квадрата $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1 (см. рис. 211). Ответ дайте в см^2 .

763. Найдите площадь прямоугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 212). Ответ дайте в см^2 .

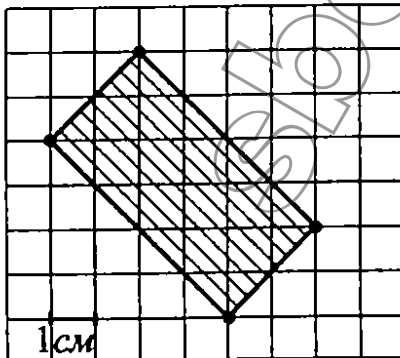


Рис. 212

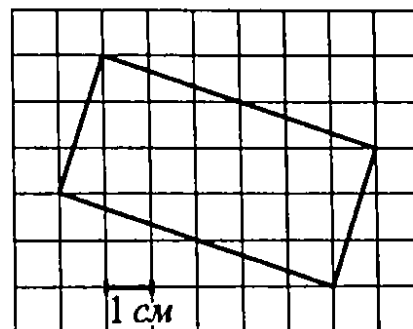


Рис. 213

764. Найдите площадь прямоугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 213). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

765. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на рисунке 214, вершины которого имеют координаты $A(4; 0)$, $B(0; 6)$, $C(3; 8)$, $D(7; 2)$.

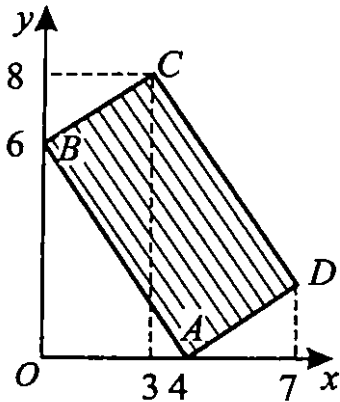


Рис. 214

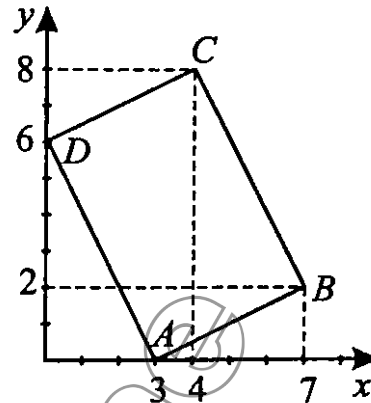


Рис. 215

766. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на рисунке 215, вершины которого имеют координаты $A(3; 0)$, $D(0; 6)$, $B(7; 2)$, $C(4; 8)$.

767. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на рисунке 216, вершины которого имеют координаты $(2; 4)$, $(5; 1)$, $(7; 9)$, $(10; 6)$.

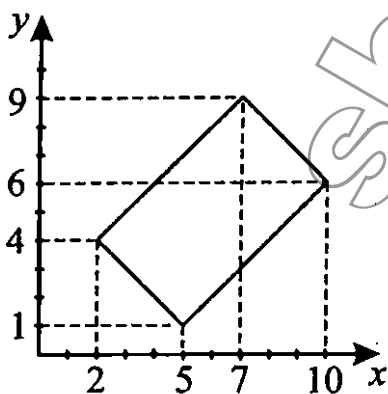


Рис. 216

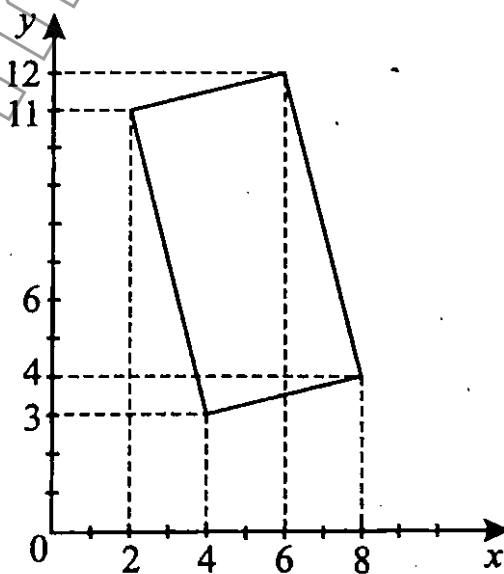


Рис. 217

768. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на рисунке 217, вершины которого имеют координаты $(2; 11)$, $(4; 3)$, $(6; 12)$, $(8; 4)$.

17.4. Трапеция

Напомним, что трапеция — это четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны.

Площадь трапеции равна половине произведения суммы оснований ($a + b$) на высоту (h):

$$S = \frac{(a + b)h}{2}.$$

На рисунке 218 изображены некоторые трапеции, у каждой из которых показаны основания a и b и высота h .

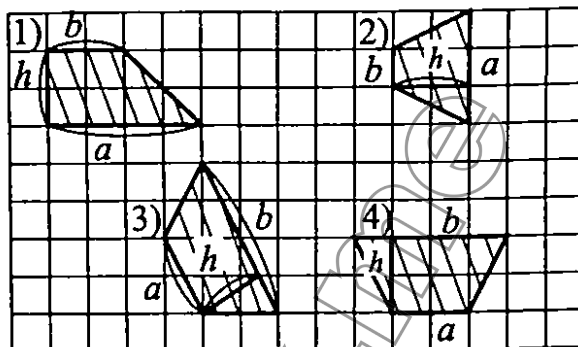


Рис. 218

Тогда площади двух трапеций, расположенных в верхней части рисунка 218, равны соответственно: 1) $S = \frac{(a + b)h}{2} = \frac{(4 + 2)2}{2} = 3$;

$$2) S = \frac{(a + b)h}{2} = \frac{(3 + 1)2}{2} = 4.$$

769. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рис. 219). Найдите её площадь в квадратных сантиметрах.

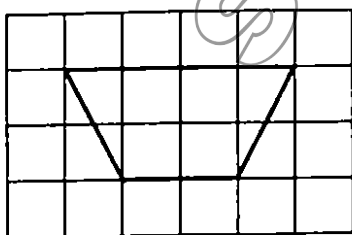


Рис. 219

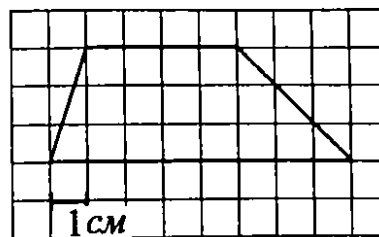


Рис. 220

770. Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 220). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

771. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (3; 1), (7; 1), (7; 7), (9; 7) (см. рис. 221).

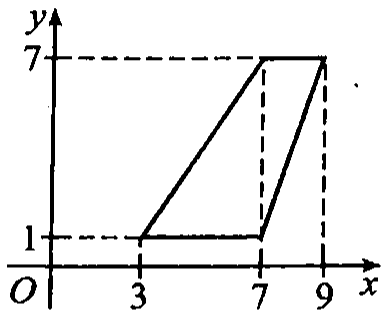


Рис. 221

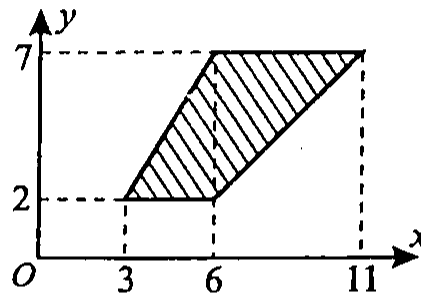


Рис. 222

772. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке 222.

17.5. Ромб

Напомним, что **ромб** — это четырёхугольник, у которого все стороны равны. В ромбе диагонали взаимно перпендикулярны и делятся пополам точкой пересечения.

На рисунке 223 приведены чертежи некоторых ромбов, у которых показаны диагонали.

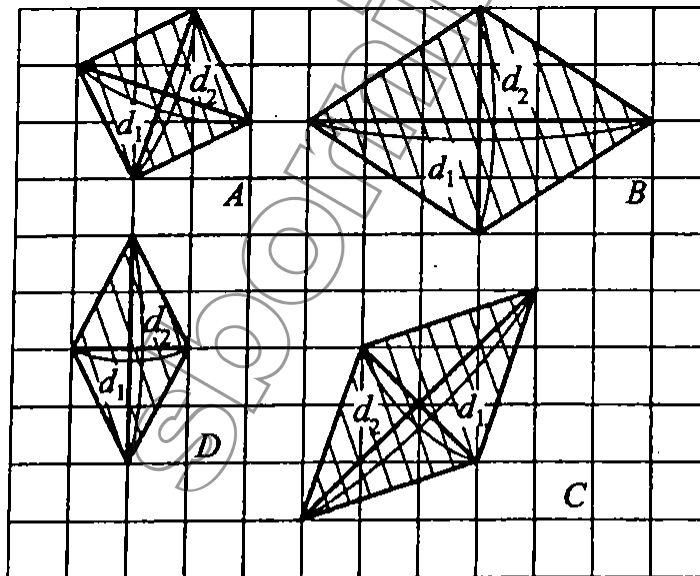


Рис. 223

Площадь ромба равна половине произведения диагоналей:

$$S = \frac{d_1 d_2}{2}.$$

Обратите внимание на то, что площади ромбов для рисунков B и D легко посчитать по этой формуле, а для рисунков A и C сначала придёт-

ся вычислить длины диагоналей. Например, для рисунка *A* длины диагоналей вычислим по теореме Пифагора: $d_1 = d_2 = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$,
 $S_A = \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}}{2} = 5$.

На рисунках *B* и *D* диагонали каждого из ромбов проходят по линиям клеток, считаем их длину по рисунку. Диагонали ромба *B* равны 6 и 4, диагонали ромба *D* равны 2 и 4. Найдём их площади.

$$S_B = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12; S_D = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4.$$

773. Найдите площадь ромба *C*, изображённого выше (см. рис. 223 на с. 255).

774. Найдите площадь ромба, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 224). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

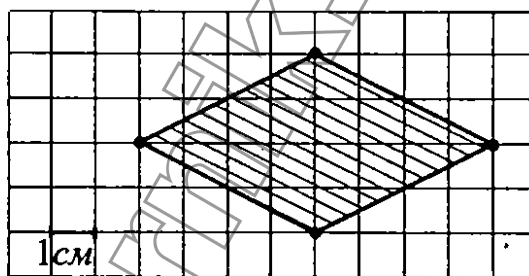


Рис. 224

775. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 225). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

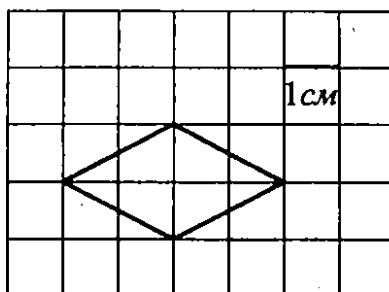


Рис. 225

776. Найдите площадь заштрихованной фигуры на координатной плоскости (см. рис. 226).

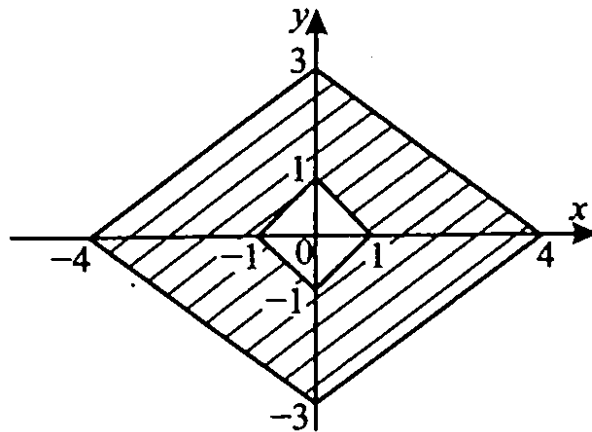


Рис. 226

17.6. Произвольный многоугольник

Площадь произвольного многоугольника, изображённого на клетчатой бумаге, можно находить в два этапа. Сначала следует построить прямоугольник, содержащий заданный многоугольник. Затем от площади этого прямоугольника необходимо вычесть площади тех фигур, которые дополняют заданный многоугольник до построенного прямоугольника. Этот метод можно также использовать для поиска площадей уже рассмотренных нами фигур: треугольника, прямоугольника, ромба, трапеции.

777. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён четырёхугольник (см. рис. 227). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

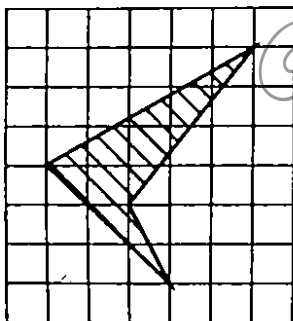


Рис. 227

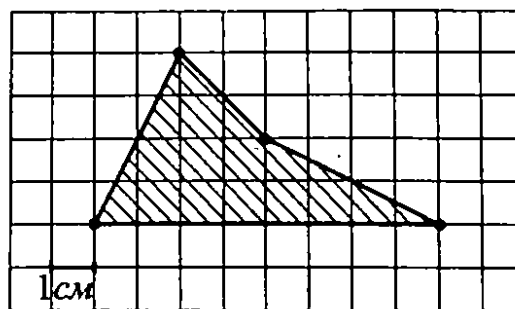


Рис. 228

778. Найдите площадь четырёхугольника (в см²), изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 228).

779. Найдите площадь фигуры, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рис. 229). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

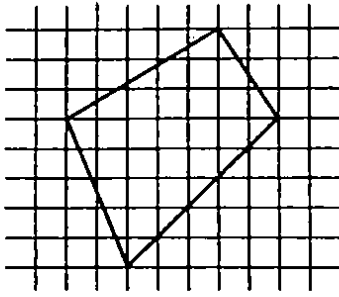


Рис. 229

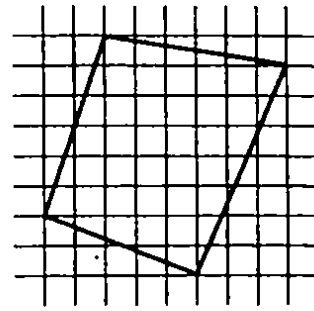


Рис. 230

780. Найдите площадь фигуры, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рис. 230). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

17.7. Круг и сектор

Площадь круга равна произведению числа π на квадрат радиуса:
 $S = \pi R^2$.

Площадь сектора с углом α градусов равна $\frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$.

781. Найдите площадь S круга, считая стороны клеток равными 1 (см. рис. 231). В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

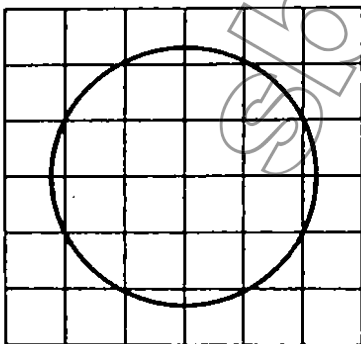


Рис. 231

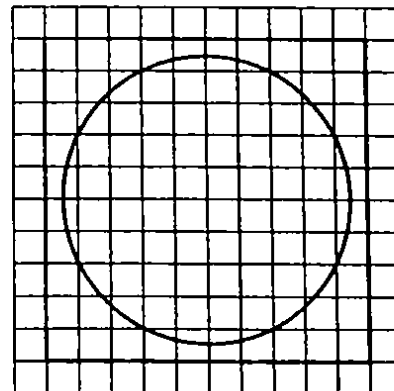


Рис. 232

782. Найдите площадь S круга, считая стороны клеток равными 1 (см. рис. 232). В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

783. На клетчатой бумаге (см. рис. 233) нарисовано два круга. Площадь внутреннего круга равна 9π . Найдите площадь S заштрихованной фигуры.

В ответе запишите результат $\frac{S}{\pi}$.

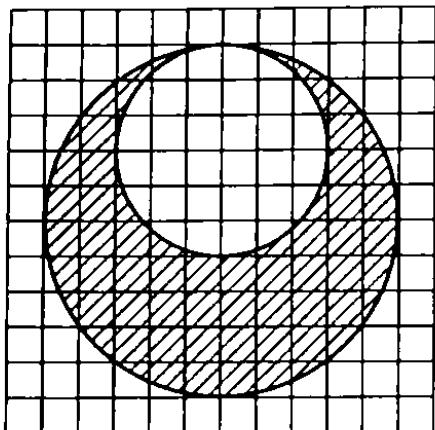


Рис. 233

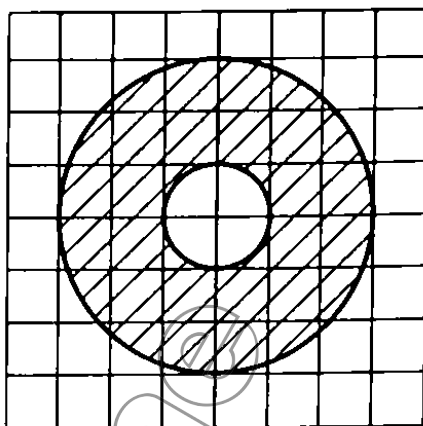


Рис. 234

784. На клетчатой бумаге (см. рис. 234) нарисовано два круга. Площадь внутреннего круга равна π . Найдите площадь S заштрихованной фигуры.

В ответе запишите результат $\frac{S}{\pi}$.

785. Найдите площадь S заштрихованного сектора (см. рис. 235A), считая стороны клеток равными 1. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

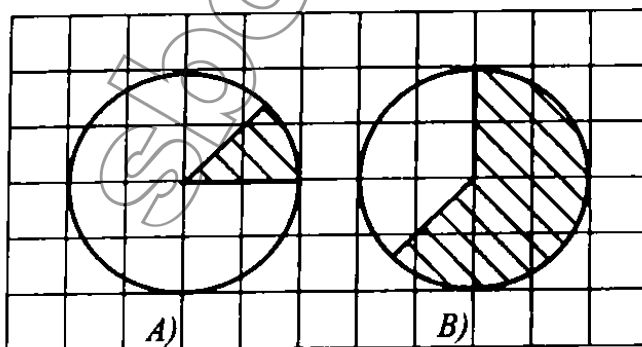


Рис. 235

786. Найдите площадь S заштрихованного сектора (см. рис. 235B), считая стороны клеток равными 1. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

787. Найдите площадь заштрихованной фигуры (в см^2), изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$. (см. рис. 236). В ответе запишите результат $\frac{S}{\pi}$.

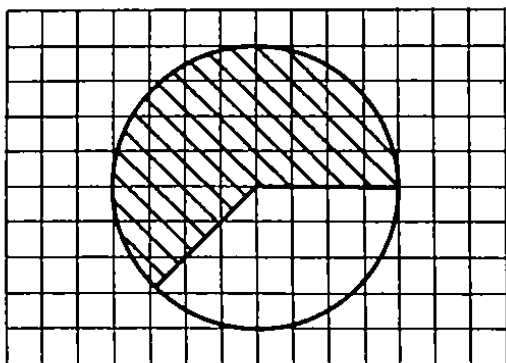


Рис. 236

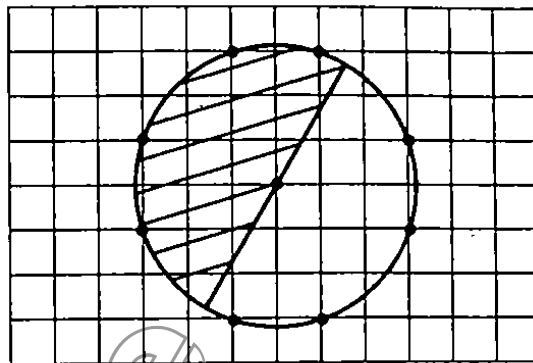


Рис. 237

788. Найдите (в см^2) площадь S заштрихованной фигуры, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рис. 237). В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

Задания для контроля

Вариант 1

1. На клетчатой бумаге с клетками размером $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ изображён треугольник (см. рис. 238). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

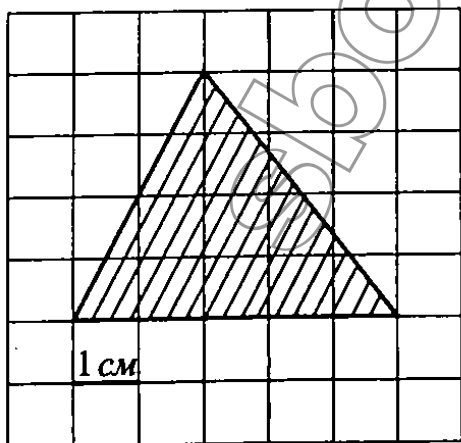


Рис. 238

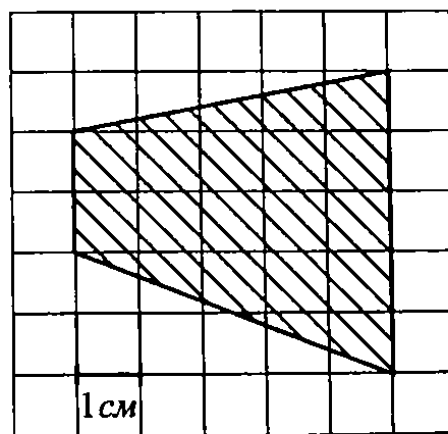


Рис. 239

2. На клетчатой бумаге с клетками размером $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ изображена трапеция (см. рис. 239). Найдите её площадь в квадратных сантиметрах.

3. Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке 240.

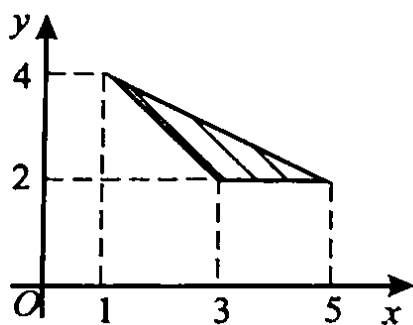


Рис. 240

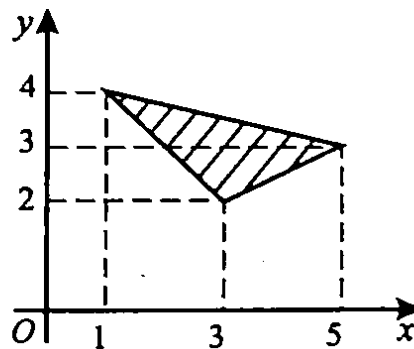


Рис. 241

4. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (1; 4), (5; 3), (3; 2) (см. рис. 241).

5. Найдите площадь S кольца, ограниченного окружностями, считая стороны клеток равными 1 (см. рис. 242). В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

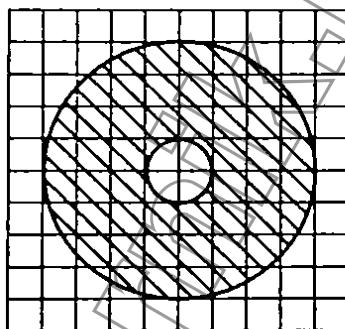


Рис. 242

Вариант 2

1. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рис. 243). Найдите её площадь в квадратных сантиметрах.

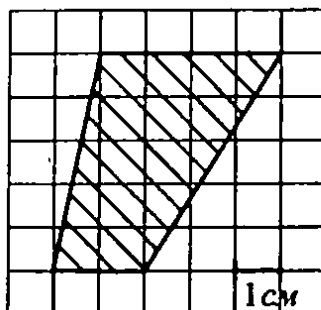


Рис. 243

2. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты $(1; 2)$, $(1; 5)$, $(3; 3)$, $(3; 6)$ (см. рис. 244).

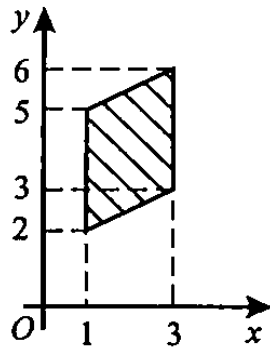


Рис. 244

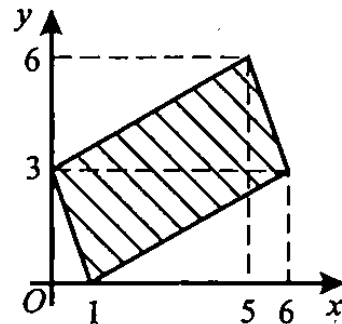


Рис. 245

3. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты $(1; 0)$, $(6; 3)$, $(5; 6)$, $(0; 3)$ (см. рис. 245).

4. Найдите площадь S треугольника, считая стороны квадратных клеток равными 1 (см. рис. 246).

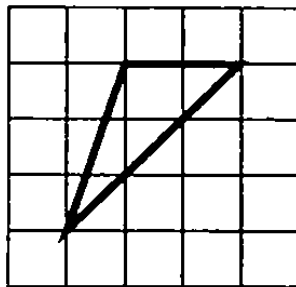


Рис. 246

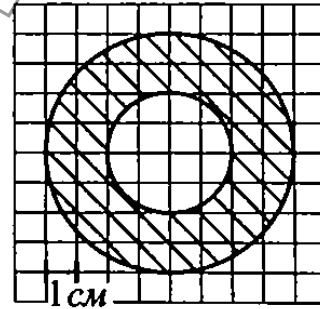


Рис. 247

5. Найдите площадь S кольца, считая стороны клеток равными 1 (см. рис. 247). В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

Вариант 3

1. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см \times 1 см изображён треугольник (см. рис. 248). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

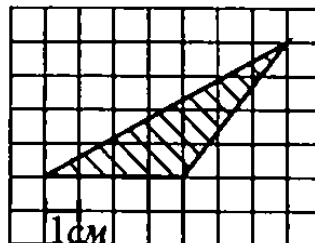


Рис. 248

2. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (1; 2), (3; 5), (6; 5), (6; 2) (см. рис. 249).

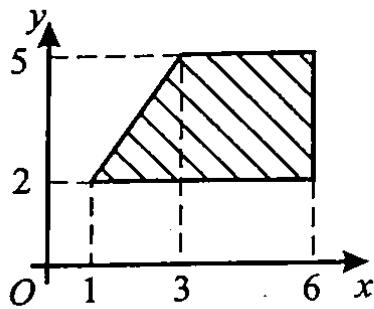


Рис. 249

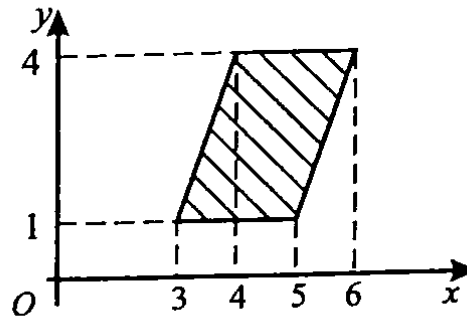


Рис. 250

3. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на рисунке 250.

4. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён прямоугольник (см. рис. 251). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

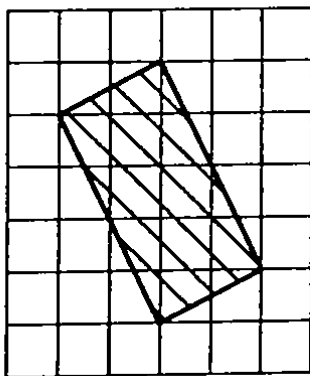


Рис. 251

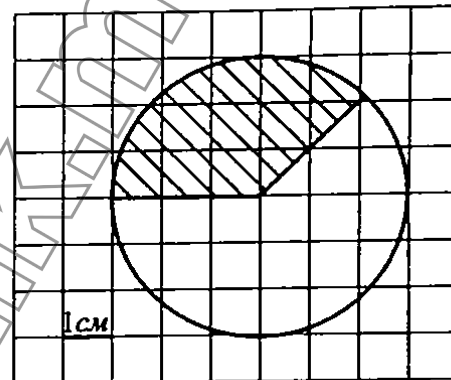


Рис. 252

5. Найдите площадь S заштрихованного сектора, считая стороны клеток равными 1 (см. рис. 252). В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

Вариант 4

1. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке 253.

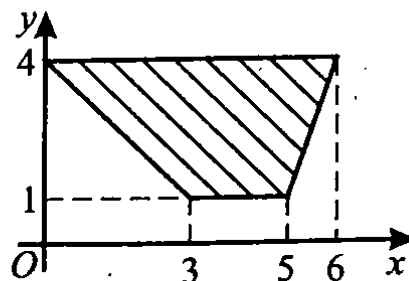


Рис. 253

2. На рисунке 254 изображён треугольник. Найдите его площадь.

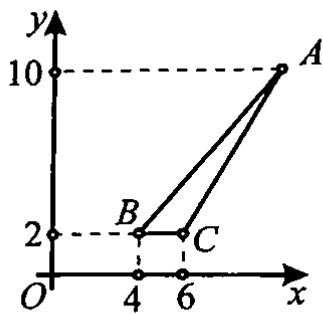


Рис. 254

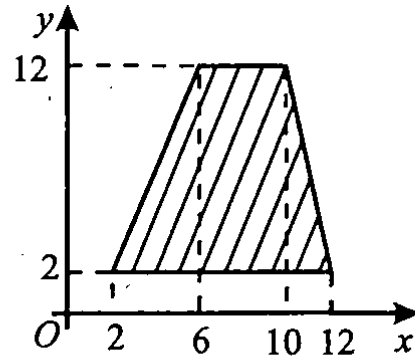


Рис. 255

3. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты $(2; 2)$, $(12; 2)$, $(10; 12)$, $(6; 12)$ (см. рис. 255).

4. На клетчатой бумаге с клетками размером $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ изображён четырёхугольник (см. рис. 256). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

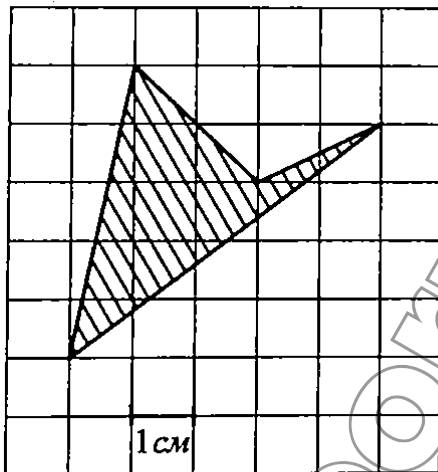


Рис. 256

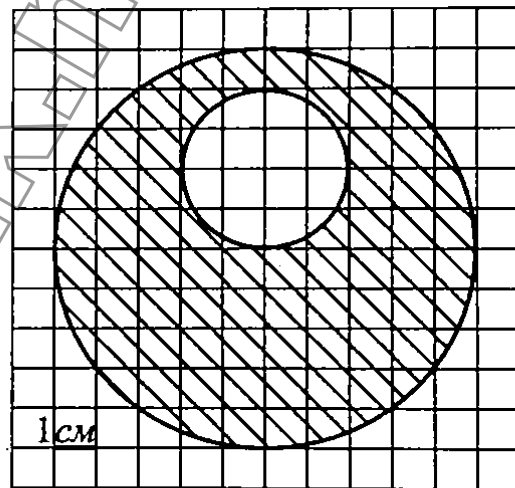


Рис. 257

5. На клетчатой бумаге с клетками размером $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ изображены две окружности (см. рис. 257). Найдите площадь S заштрихованной фигуры в квадратных сантиметрах. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

§ 18. Планиметрия: углы и длины

18.1. Свойства треугольника

Сумма длин трёх сторон треугольника называется его периметром.

$$P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC.$$

Сумма углов треугольника равна 180° . На рисунке 258 $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

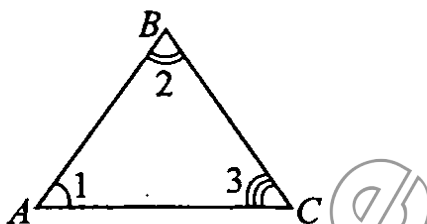


Рис. 258

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника. Сумма внешнего угла треугольника и смежного с ним угла составляет 180° .

Например, $\angle 4$ и $\angle 3$ — смежные, следовательно, $\angle 4$ — внешний угол треугольника ABC (см. рис. 259). Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним. $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$.

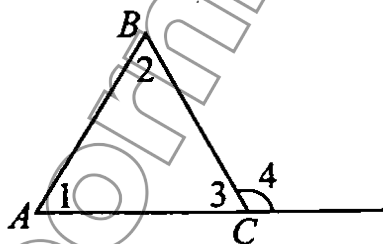


Рис. 259

Два треугольника будут равны при выполнении любого из трёх условий:

- три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника;
- две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника;
- сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника.

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется медианой треугольника.

Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называется **биссектрисой треугольника**.

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны (или её продолжения) и перпендикулярный этой стороне, называется **высотой треугольника**.

Средняя линия треугольника — отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника. На рисунке 260 MN — средняя линия треугольника ABC .

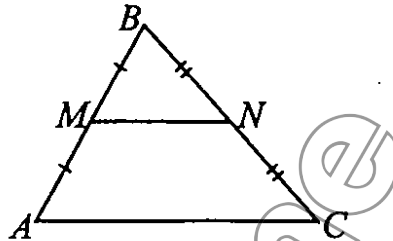


Рис. 260

Средняя линия треугольника параллельна его стороне и равна половине этой стороны. $MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2}AC$.

Треугольник, у которого две стороны равны между собой, называют **равнобедренным**, равные стороны называют **боковыми сторонами**, а третью сторону — **основанием**. Углы при основании равнобедренного треугольника равны. Высота, медиана и биссектриса равнобедренного треугольника, проведённые из вершины, совпадают.

Треугольник, у которого один угол прямой, называют **прямоугольным**. Стороны прямого угла прямоугольного треугольника называют **катетами**, а сторону, лежащую против прямого угла, называют **гипотенузой**. Медиана, проведённая из вершины прямого угла к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

Для вычисления длин отрезков применяют **теорему Пифагора**. Если a и b — катеты прямоугольного треугольника, а c — гипотенуза, то

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Медиана, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника к гипотенузе, равна половине гипотенузы. Середина гипотенузы равноудалена от всех вершин прямоугольного треугольника.

789. На рисунке 261 угол 1 равен 52° , угол 2 равен 26° , угол 3 равен 48° . Найдите угол 4. Ответ дайте в градусах.

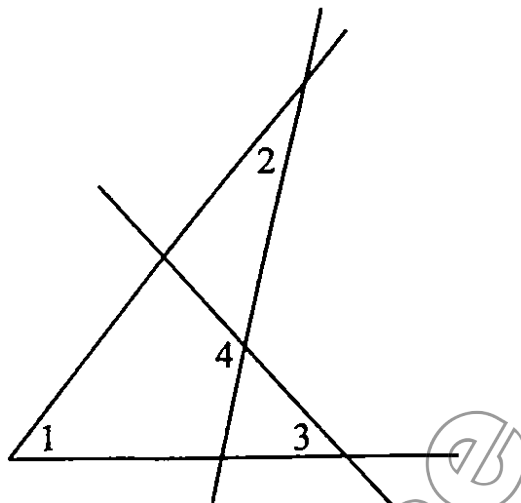


Рис. 261

790. На рисунке 261 угол 3 равен 47° , угол 2 равен 35° , угол 4 равен 125° . Найдите угол 1. Ответ дайте в градусах.

791. В треугольнике ABC угол C равен 108° , биссектриса CD является перпендикуляром к AB (см. рис. 262). Найдите угол DBC . Ответ выразите в градусах.

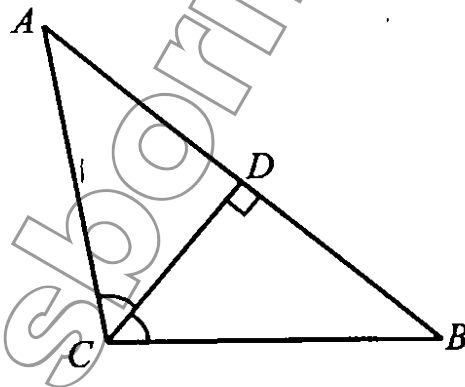


Рис. 262

792. В треугольнике ABC угол C равен 106° , биссектриса CD является перпендикуляром к AB (см. рис. 262). Найдите угол CAD . Ответ выразите в градусах.

793. В треугольнике ABC угол A равен 62° , угол B равен 76° . AL , BN и CK — биссектрисы, пересекающиеся в точке O (см. рис. 263 на с. 268). Найдите угол AOK . Ответ дайте в градусах.

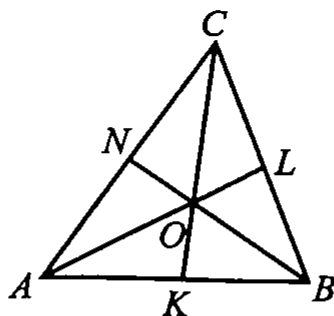


Рис. 263

794. В треугольнике ABC угол A равен 50° , угол B равен 30° . AL , BN и CK — биссектрисы, пересекающиеся в точке O (см. рис. 264). Найдите угол BOL . Ответ дайте в градусах.

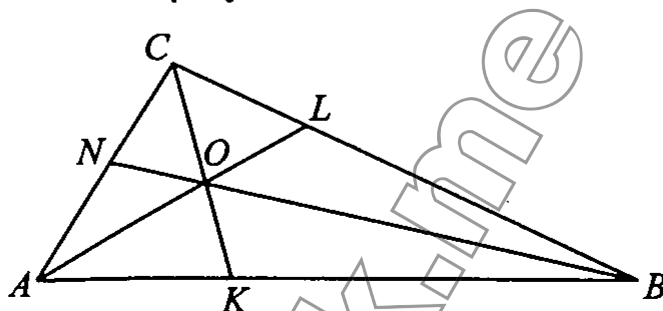


Рис. 264

795. В треугольнике ABC угол A равен 44° , угол B равен 72° , AD , BE , CF — высоты, пересекающиеся в точке O . Найдите угол COE (см. рис. 265). Ответ дайте в градусах.

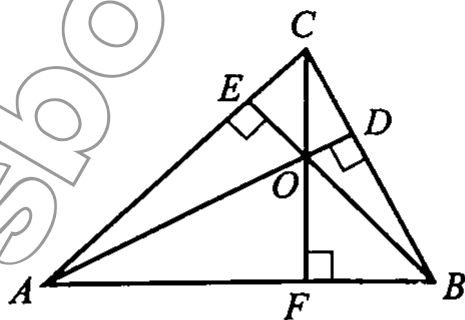


Рис. 265

796. В треугольнике ABC угол A равен 46° , угол B равен 70° , AD , BE , CF — высоты, пересекающиеся в точке O . Найдите угол COD (см. рис. 265). Ответ дайте в градусах.

797. Острые углы прямоугольного треугольника равны 39° и 51° . Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла (см. рис. 266). Ответ дайте в градусах.

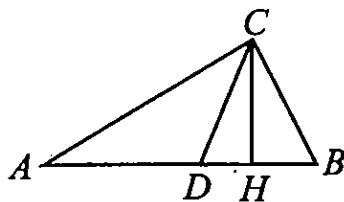


Рис. 266

798. Острые углы прямоугольного треугольника равны 37° и 53° . Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла (см. рис. 266). Ответ дайте в градусах.

799. Острые углы прямоугольного треугольника равны 34° и 56° . Найдите угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла (см. рис. 267). Ответ дайте в градусах.

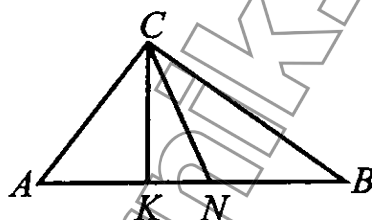


Рис. 267

800. Острые углы прямоугольного треугольника равны 35° и 55° . Найдите угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла (см. рис. 267). Ответ дайте в градусах.

801. В треугольнике MPK угол P равен 35° (см. рис. 268), угол K равен 95° , MB — биссектриса, E — такая точка на MP , что $ME = MK$. Найдите угол PBE . Ответ дайте в градусах.

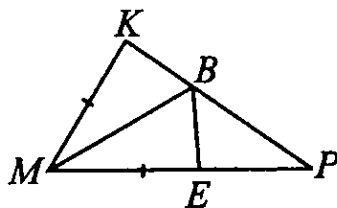


Рис. 268

802. В треугольнике MPK угол P равен 38° (см. рис. 268 на с. 269), угол K равен 92° , MB — биссектриса, E — такая точка на MP , что $ME = MK$. Найдите угол MBE . Ответ дайте в градусах.

803. В прямоугольном треугольнике ABC внешний угол при вершине B равен 112° , $\angle C$ — острый (см. рис. 269). AO — медиана треугольника BAC . Найдите угол AOC . Ответ выразите в градусах.

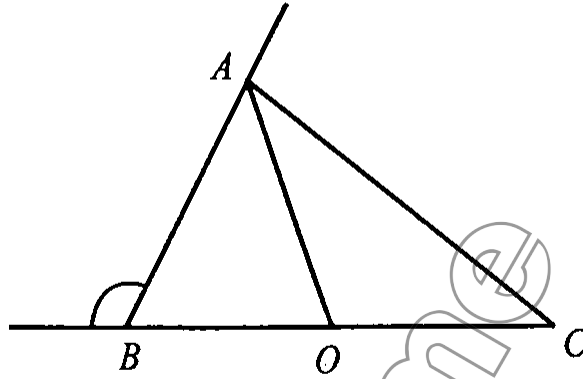


Рис. 269

804. В прямоугольном треугольнике ABC внешний угол при вершине B равен 110° , $\angle C$ — острый (см. рис. 269). AO — медиана треугольника BAC . Найдите угол AOC . Ответ выразите в градусах.

805. Основания трапеции AB и DC равны 14 и 10 соответственно (см. рис. 270). Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции диагональ BD .

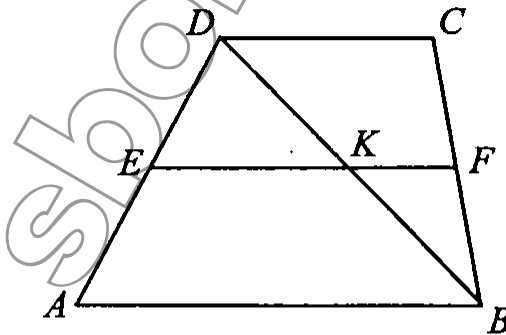


Рис. 270

806. Основания трапеции AB и DC равны 20 и 12 соответственно (см. рис. 270). Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции диагональ BD .

807. Средняя линия трапеции равна 22. Одна из диагоналей делит её на два отрезка, разность которых равна 4. Найдите меньшее основание трапеции (см. рис. 271).

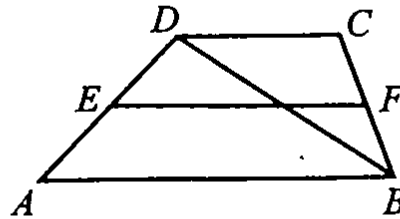


Рис. 271

808. Средняя линия трапеции равна 25. Одна из диагоналей делит её на два отрезка, разность которых равна 7. Найдите меньшее основание трапеции (см. рис. 271).

809. Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Большая сторона параллелограмма равна 14. Найдите меньшую сторону параллелограмма (см. рис. 272).

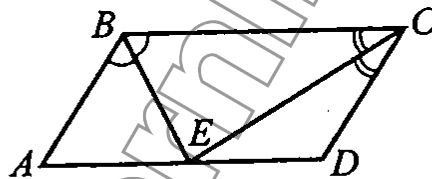


Рис. 272

810. Точка пересечения биссектрис двух углов прямоугольника, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Меньшая сторона прямоугольника равна 4. Найдите большую сторону прямоугольника (см. рис. 273).

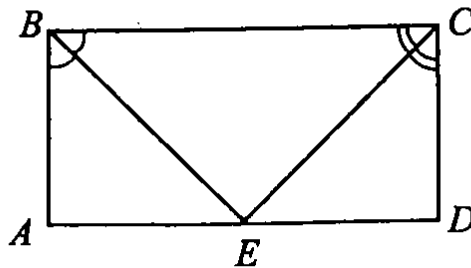


Рис. 273

811. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 5 : 6, считая от вершины тупого угла (см. рис. 274). Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 68.

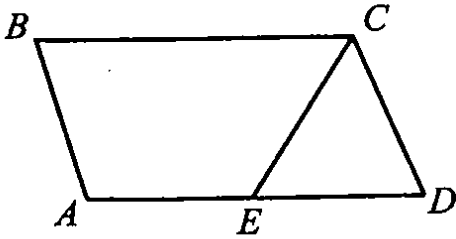


Рис. 274

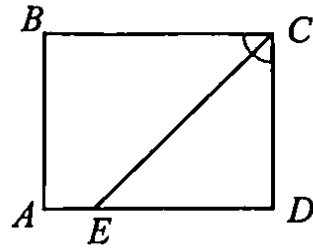


Рис. 275

812. Биссектриса угла C прямоугольника $ABCD$ делит противоположную сторону AD в отношении 2 : 7, считая от вершины угла A (см. рис. 275). Найдите меньшую сторону прямоугольника, если его периметр равен 64.

813. Один из внешних углов треугольника равен 85° . Углы, не смежные с данным внешним углом, относятся как 2 : 3 (см. рис. 276). Найдите наибольший из них. Ответ дайте в градусах.

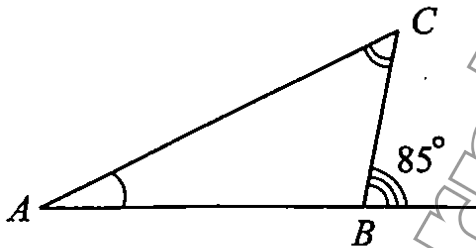


Рис. 276

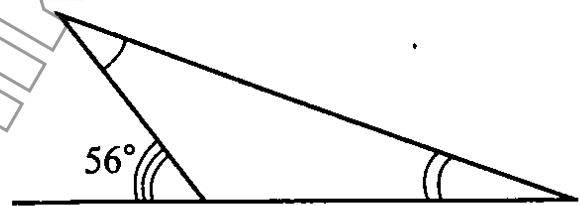


Рис. 277

814. Один из внешних углов треугольника равен 56° . Углы, не смежные с данным внешним углом, относятся как 2 : 5 (см. рис. 277). Найдите наибольший из них (в градусах).

815. В треугольнике ABC угол A равен 48° . На продолжении стороны AB отложен отрезок $BD \equiv BC$, $\angle ACD = 102^\circ$ (см. рис. 278). Найдите угол BCD . Ответ дайте в градусах.

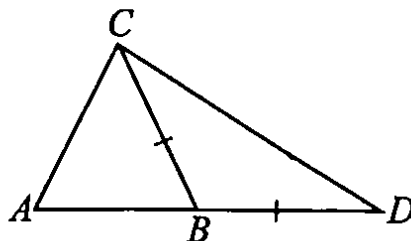


Рис. 278

816. В треугольнике ABC угол A равен 58° , а угол B равен 102° . На стороне AC этого треугольника взята точка D так, что $BC = DC$ (см. рис. 279). Найдите угол CBD . Ответ дайте в градусах.

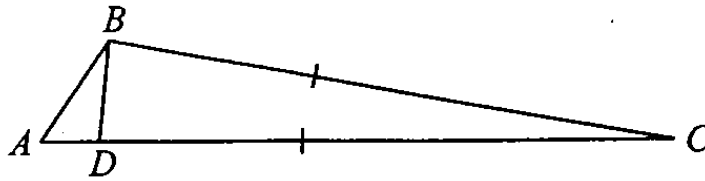


Рис. 279

817. Найдите высоту треугольника ABC , опущенную на сторону BC (см. рис. 280), если стороны квадратных клеток равны $\sqrt{2}$.

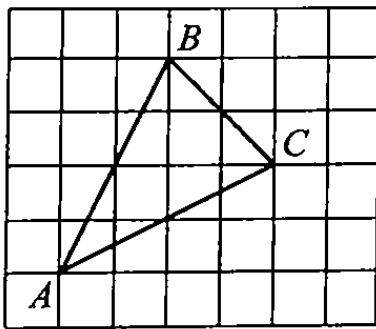


Рис. 280

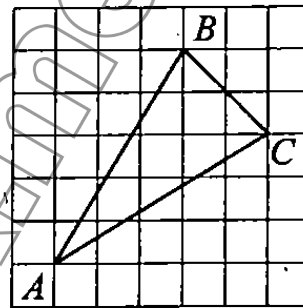


Рис. 281

818. Найдите высоту треугольника ABC , опущенную на сторону BC (см. рис. 281), если стороны квадратных клеток равны $\sqrt{2}$.

819. В треугольнике ABC $AB = BC = 8$, $\angle BAN = 60^\circ$ (см. рис. 282). Найдите высоту AH .

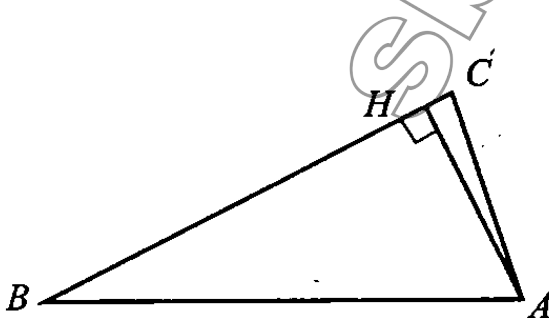


Рис. 282

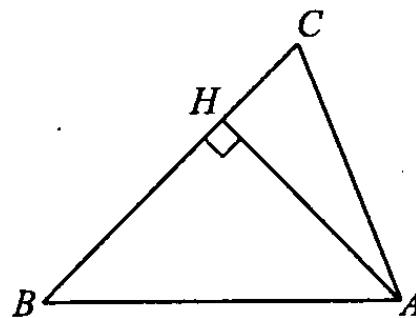


Рис. 283

820. В треугольнике ABC $AB = BC = \sqrt{8}$, $\angle BAN = 45^\circ$ (см. рис. 283). Найдите высоту AH .

18.2. Окружность. Касательные, секущие, хорды

Окружность — это множество точек плоскости, расположенных на одинаковом расстоянии от данной точки (центра).

Отрезок, соединяющий центр окружности с любой точкой окружности, называется **радиусом**.

Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется **касательной**. k — касательная, OM — радиус, проведённый к точке касания (см. рис. 284).

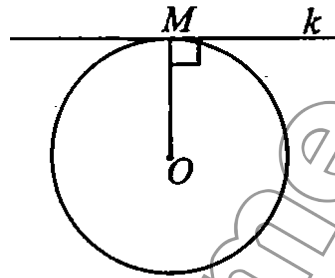


Рис. 284

Прямая, имеющая с окружностью две общие точки, называется **секущей**.

Свойства касательных и секущих

1. Касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

2. Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через центр окружности и эту общую точку.

Пусть дана окружность с центром O , MP и MK — касательные, K и P — точки касания. Тогда $MP = MK$, $\angle 1 = \angle 2$, $OP^2 + PM^2 = OM^2$ (см. рис. 285).

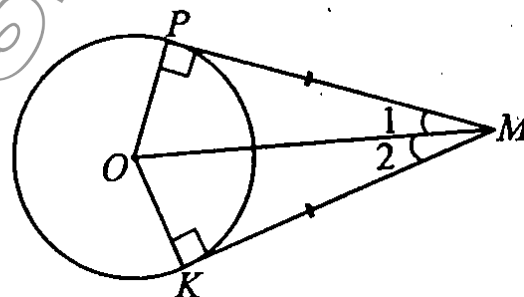


Рис. 285

3. Если касательная и секущая проведены из одной точки, лежащей вне окружности, то квадрат отрезка касательной равен произведению

расстояний от общей точки прямых до точек пересечения секущей с окружностью.

Пусть дана окружность с центром O , MK — секущая, MP — касательная, P — точка касания. Тогда $MP^2 = MK \cdot MK_1$ (см. рис. 286).

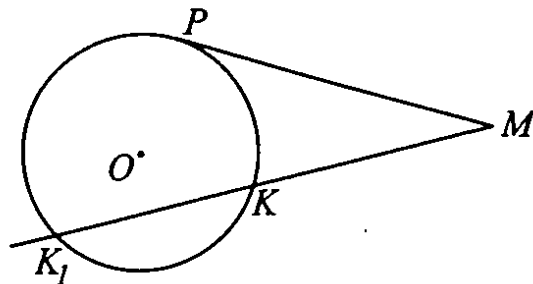


Рис. 286

Хорда — это отрезок, концы которого лежат на окружности.
 AB — хорда, $\overset{\frown}{AB}$ — дуга (см. рис. 287).

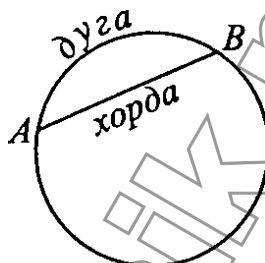


Рис. 287

Дуга — это часть окружности, соединяющая две точки окружности (см. рис. 287).

Угол с вершиной в центре окружности называется **центральный углом**.

O — центр окружности, $\angle AOB$ — центральный угол, опирающийся на дугу BA (см. рис. 288).

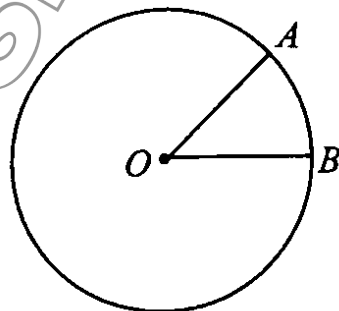


Рис. 288

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется **вписанным углом**.

Пусть точки A, B, C лежат на окружности, тогда $\angle BAC$ — вписанный угол, опирающийся на дугу BC (см. рис. 289).

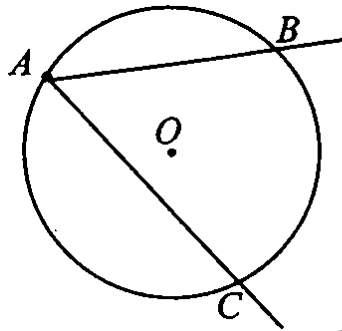


Рис. 289

1. Центральный угол равен угловой величине дуги, на которую он опирается.

O — центр окружности, A и B лежат на окружности. $\angle AOB = \sphericalcap AB$ (см. рис. 288 на с. 275).

2. Вписанный угол равен половине угловой величины дуги, на которую он опирается.

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \sphericalcap BC \text{ (см. рис. 289).}$$

3. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

A, B, M, C лежат на окружности. $\angle ABC = \angle AMC$ (см. рис. 290).

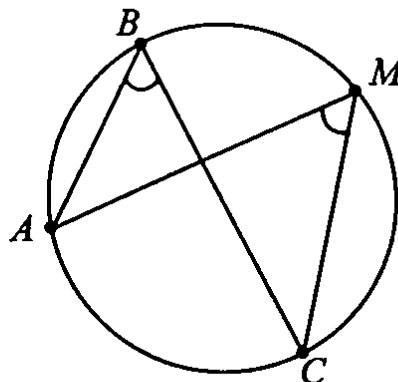


Рис. 290

4. Вписанный угол, опирающийся на полуокружность (на диаметр), равен 90° (см. рис. 291).

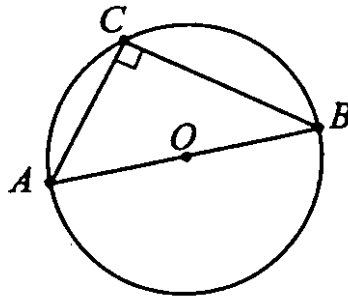


Рис. 291

5. Угол между касательной и хордой равен половине угловой величины дуги, заключённой между ними.

BA — хорда, BC — касательная $\Rightarrow \angle ABC = \frac{1}{2} \sphericalcap AB$
(см. рис. 292).

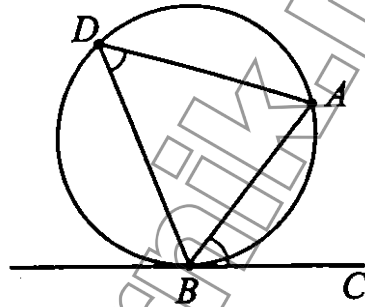


Рис. 292

6. Угол между касательной и хордой равен вписанному углу, который опирается на дугу, заключённую между касательной и хордой.

BA — хорда, BC — касательная $\Rightarrow \angle ABC = \angle ADB$
(см. рис. 292).

821. Найдите угол ACO , если прямая CA касается окружности в точке A , точка O — центр окружности, дуга AD окружности, заключённая внутри этого угла, равна 128° (см. рис. 293). Ответ дайте в градусах.

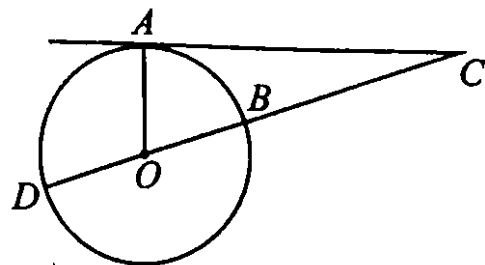


Рис. 293

822. Найдите угол $СВО$, если сторона $ВС$ касается окружности, а меньшая дуга окружности $АС$, заключённая внутри этого угла, равна 67° (см. рис. 294). Ответ дайте в градусах.

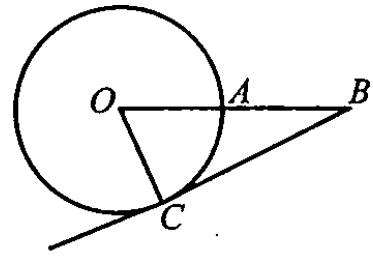


Рис. 294

823. Угол $АСО$ равен 38° . Его сторона $СА$ касается окружности, точка O — центр окружности. Найдите градусную величину большей дуги (AD) окружности, заключённой внутри этого угла (см. рис. 295).

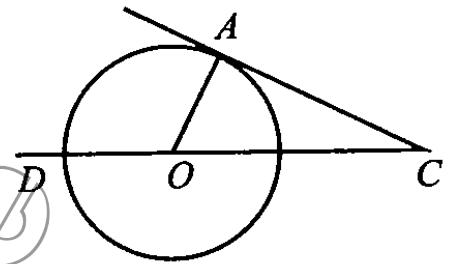


Рис. 295

824. Угол $АСО$ равен 40° . Его сторона $СА$ касается окружности. Найдите градусную величину большей дуги (AD) окружности, заключённой внутри этого угла (см. рис. 295).

825. Найдите угол ACB , если вписанные углы AMB и MAK опираются на дуги окружности, градусные величины которых равны соответственно 106° и 42° (см. рис. 296). Ответ дайте в градусах.

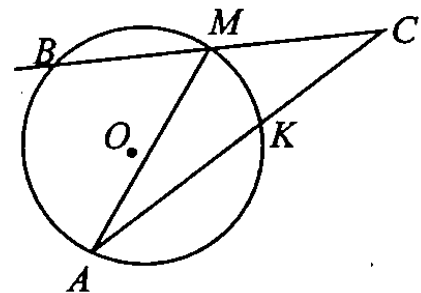


Рис. 296

826. Вписанные углы BAD и ADC опираются на дуги окружности, градусные величины которых равны соответственно 22° и 58° (см. рис. 297). Найдите угол ABC . Ответ дайте в градусах.

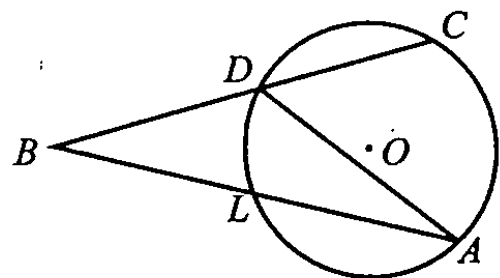


Рис. 297

827. Угол ACB равен 26° . Градусная величина дуги AB окружности, не содержащей точек K и L , равна 80° (см. рис. 298). Найдите угол KAL . Ответ дайте в градусах.

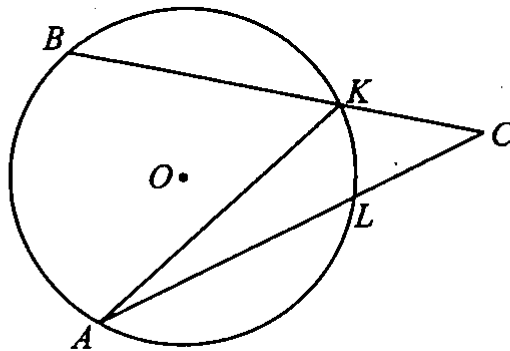


Рис. 298

828. Угол ACB равен 28° . Градусная величина дуги AB окружности, не содержащей точек K и L , равна 76° (см. рис. 298). Найдите угол KAL . Ответ дайте в градусах.

829. Хорда AB стягивает дугу окружности в 104° . Найдите угол ABC между этой хордой и касательной к окружности, проведённой через точку B . Ответ дайте в градусах (см. рис. 299).

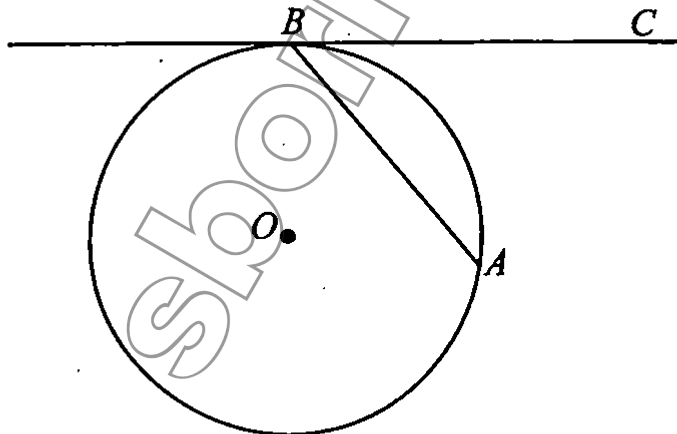


Рис. 299

830. Хорда AB стягивает дугу окружности в 102° . Найдите угол ABC между этой хордой и касательной к окружности, проведённой через точку B . Ответ дайте в градусах (см. рис. 299).

831. В окружности с центром O AB и CD — диаметры (см. рис. 300). Центральный угол AOD равен 108° . Найдите вписанный угол ABC . Ответ дайте в градусах.

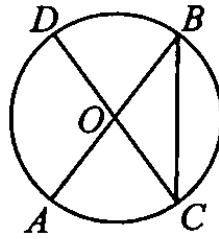


Рис. 300

832. В окружности с центром O AB и CD — диаметры (см. рис. 300). Центральный угол AOD равен 106° . Найдите вписанный угол ABC . Ответ дайте в градусах.

Описанные и вписанные окружности

Окружность называют **вписанной** в угол или многоугольник (в частности, в треугольник), если она касается всех сторон соответствующего угла или многоугольника (см. рис. 301).

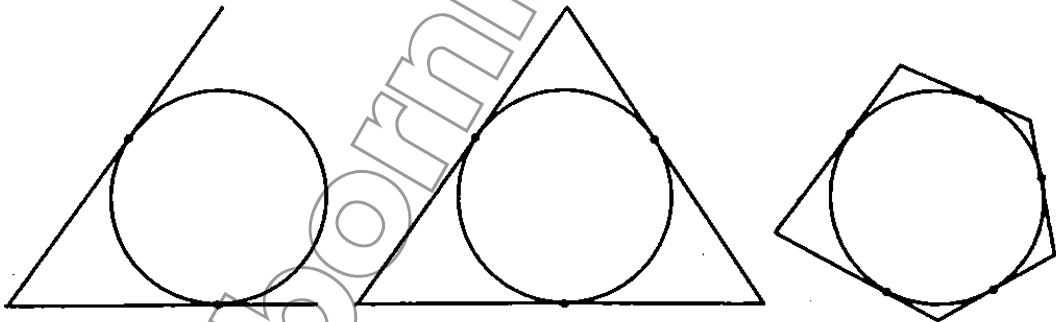


Рис. 301

Окружность называют **описанной** вокруг многоугольника, если все его вершины лежат на этой окружности (см. рис. 302).

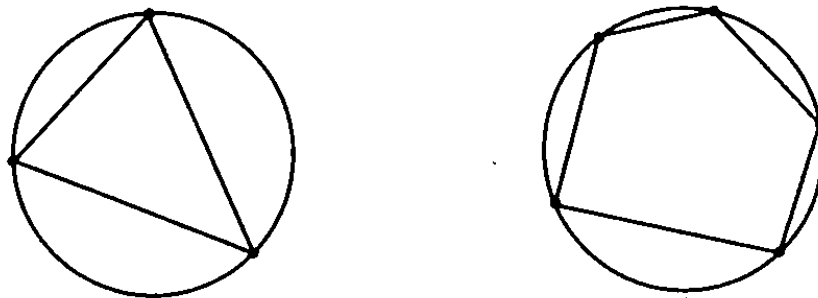


Рис. 302

1. Центр вписанной в угол окружности лежит на биссектрисе угла.
 Пусть окружность с центром O вписана в угол BAC . Тогда $\angle BAO = \angle CAO$ (см. рис. 303).

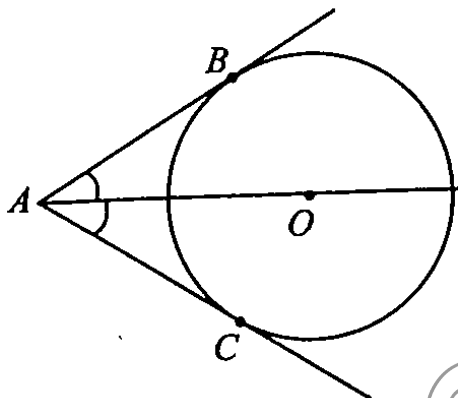


Рис. 303

2. Если в многоугольник можно вписать окружность, то её центр — точка пересечения биссектрис всех его углов.

Пусть точка O — центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности. Тогда BO , CO , AO — биссектрисы углов $\triangle ABC$ (см. рис. 304).

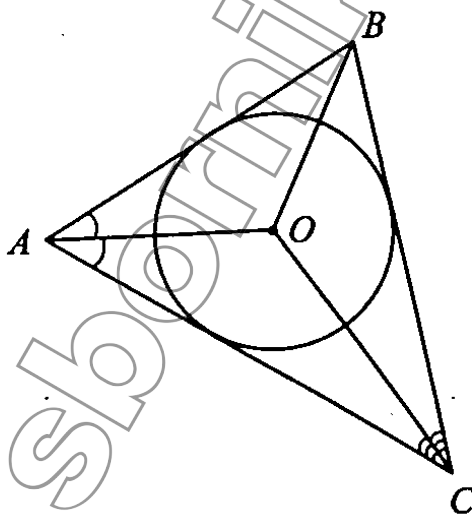


Рис. 304

3. Если в четырёхугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны.

Пусть окружность вписана в четырёхугольник $ABCD$. Тогда $AD + BC = AB + DC = \frac{1}{2}P$ (см. рис. 305 на с. 282), где P — периметр этого четырёхугольника.

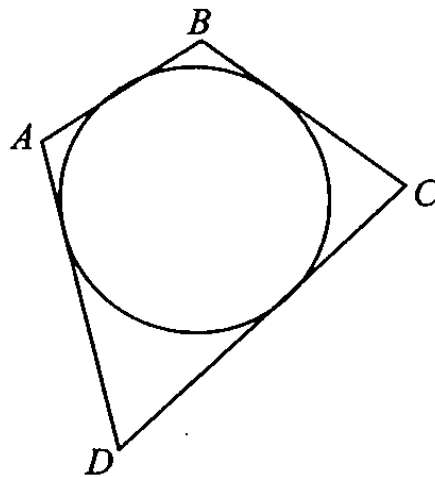


Рис. 305

4. Центр окружности, описанной около многоугольника, — точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.

O — центр окружности, описанной около треугольника ABC (см. рис. 306).

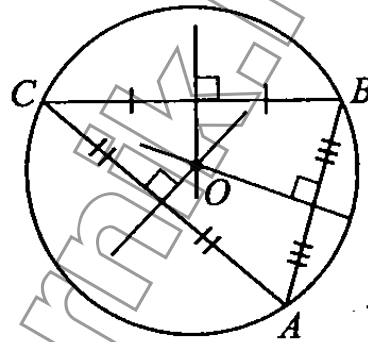


Рис. 306

5. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, — середина гипотенузы.

Пусть окружность с центром O описана около прямоугольного треугольника ABC . Тогда диаметр этой окружности — гипотенуза треугольника ABC , точка O лежит на AC , $\angle B = 90^\circ$, $AO = OC = OB$ (см. рис. 307).

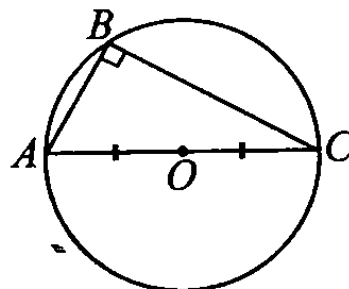


Рис. 307

6. Радиус r окружности, вписанной в треугольник со сторонами a , b и c , можно вычислить по формуле $r = \frac{S}{p}$, где S — площадь треугольника, а p — полупериметр. Радиус R окружности, описанной около треугольника со сторонами a , b и c , можно вычислить по формуле $R = \frac{abc}{4S}$, где S — площадь треугольника. Для нахождения радиуса R описанной окружности можно применять также теорему синусов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где A , B и C — углы, лежащие соответственно против сторон a , b и c .

7. Центры вписанной и описанной окружностей правильного треугольника совпадают, центр лежит на высоте треугольника и делит её в отношении $2 : 1$, считая от вершины.

8. Если четырёхугольник вписан в окружность, то суммы его противоположных углов равны 180° . $ABCD$ вписан в окружность (см. рис. 308). $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$.

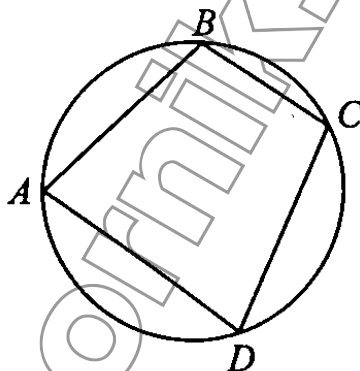


Рис. 308

9. Если трапеция вписана в окружность, то она равнобедренная.

833. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность (см. рис. 309). Угол ABC равен 113° , угол DAC равен 52° . Найдите угол ABD . Ответ дайте в градусах.

834. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность (см. рис. 309). Угол ABC равен 112° , угол DAC равен 50° . Найдите угол ABD . Ответ дайте в градусах.

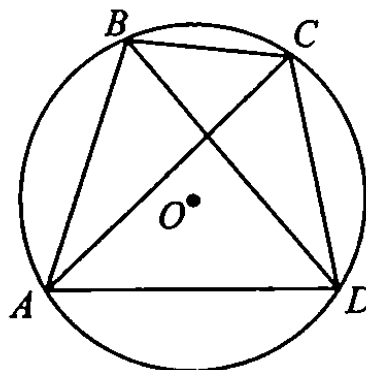


Рис. 309

835. Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 120° и 82° (см. рис. 310). Найдите меньший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.

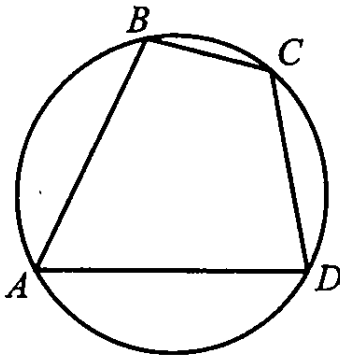


Рис. 310

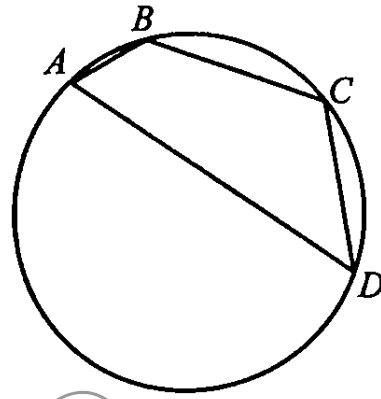


Рис. 311

836. Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 29° и 43° . Найдите больший из оставшихся углов (см. рис. 311). Ответ запишите в градусах.

837. Точки A, B, C, D , расположенные на окружности, являются вершинами четырёхугольника $ABCD$. Градусные величины углов A, B и D относятся соответственно как $5 : 2 : 6$ (см. рис. 312). Найдите угол C четырёхугольника $ABCD$. Ответ дайте в градусах.

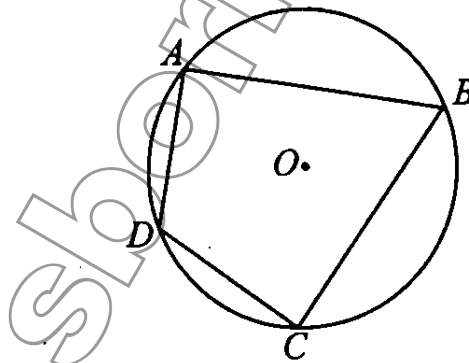


Рис. 312

838. Точки A, B, C, D , расположенные на окружности, являются вершинами четырёхугольника $ABCD$. Градусные величины углов A, B и D относятся соответственно как $24 : 10 : 30$ (см. рис. 312). Найдите угол C четырёхугольника $ABCD$. Ответ дайте в градусах.

839. Три стороны описанного около окружности четырёхугольника относятся (в последовательном порядке) как $4 : 7 : 9$ (см. рис. 313). Найдите большую сторону этого четырёхугольника, если известно, что периметр его равен 338.

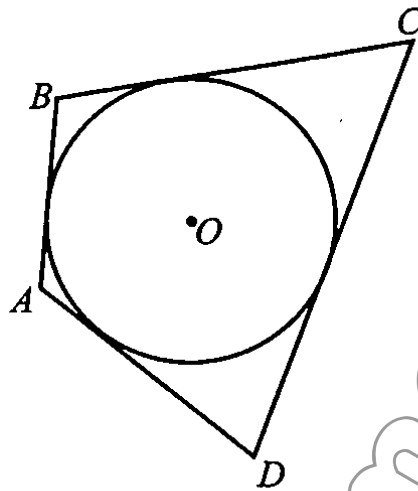


Рис. 313

840. Три стороны описанного около окружности четырёхугольника относятся (в последовательном порядке) как $4 : 3 : 5$ (см. рис. 313). Найдите меньшую сторону этого четырёхугольника, если известно, что периметр его равен 216.

841. Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 42, её большая боковая сторона равна 12 (см. рис. 314). Найдите радиус окружности.

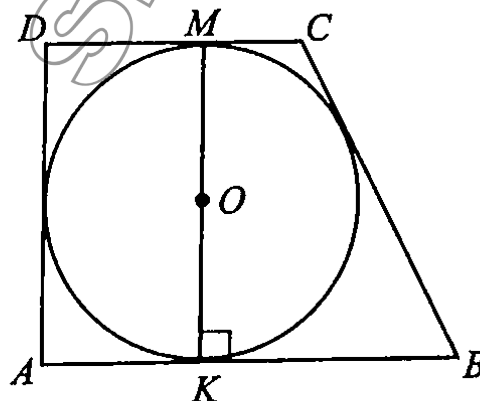


Рис. 314

842. Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 86, её большая боковая сторона равна 27 (см. рис. 315). Найдите радиус окружности.

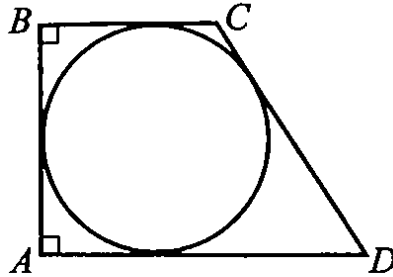


Рис. 315

843. Периметр четырёхугольника, описанного около окружности, равен 132, две его стороны (в последовательном порядке) равны 15 и 21 (см. рис. 316). Найдите большую из оставшихся сторон.

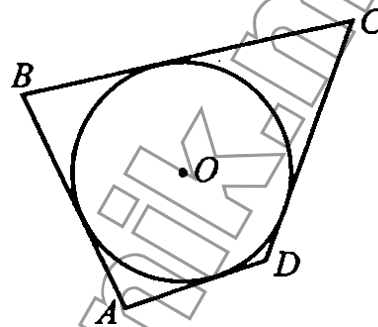


Рис. 316

844. Периметр четырёхугольника, описанного около окружности, равен 136, две его стороны (в последовательном порядке) равны 16 и 23 (см. рис. 316). Найдите меньшую из оставшихся сторон.

845. Меньшая сторона прямоугольника равна 12, угол между диагоналями равен 60° . Найдите радиус описанной окружности (см. рис. 317).

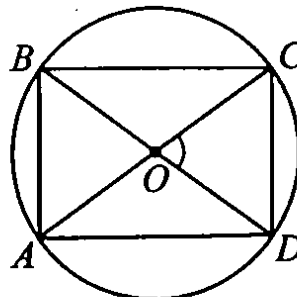


Рис. 317

846. Меньшая сторона прямоугольника равна 5, больший угол между диагоналями равен 120° . Найдите радиус описанной окружности (см. рис. 318).

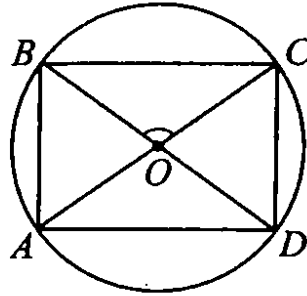


Рис. 318

847. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника, две стороны которого равны 9 и $3\sqrt{7}$ (см. рис. 319).

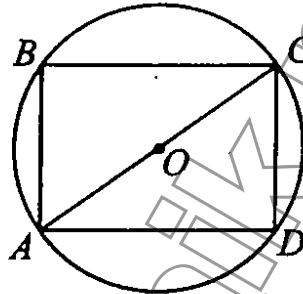


Рис. 319

848. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника, две стороны которого равны 7 и $4\sqrt{2}$ (см. рис. 319).

849. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 25, основание равно 30. Найдите радиус вписанной окружности (см. рис. 320).

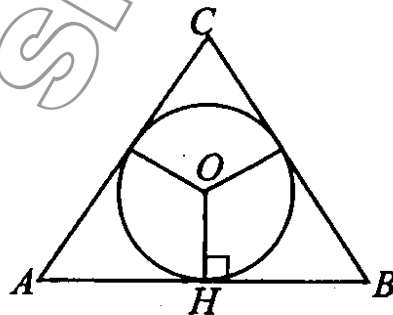


Рис. 320

850. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 13, основание равно 24. Найдите радиус вписанной окружности (см. рис. 320).

851. В равнобедренном треугольнике с основанием b и высотой, проведённой к основанию, равной 4, найдите радиус описанной окружности (см. рис. 321).

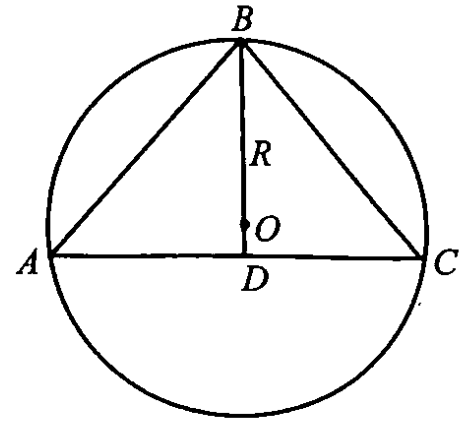


Рис. 321

852. В равнобедренном треугольнике с основанием 8 и высотой, проведённой к основанию, равной 8, найдите радиус описанной окружности (см. рис. 321).

853. Сторона AB треугольника ABC равна 7. Противлежащий ей угол C равен 30° . Найдите радиус R окружности, описанной около этого треугольника (см. рис. 322).

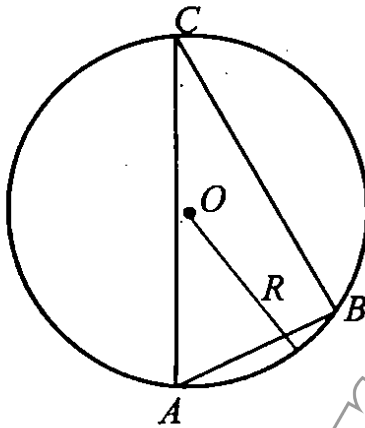


Рис. 322

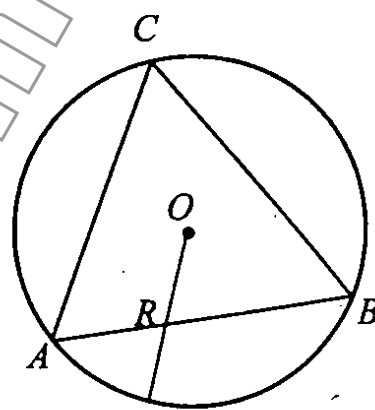


Рис. 323

854. Сторона AB треугольника ABC равна $8\sqrt{3}$. Противлежащий ей угол C равен 60° . Найдите радиус R окружности, описанной около этого треугольника (см. рис. 323).

855. Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен $5\sqrt{3}$ (см. рис. 324). Найдите сторону этого треугольника.

856. Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен $7\sqrt{3}$ (см. рис. 324). Найдите сторону этого треугольника.

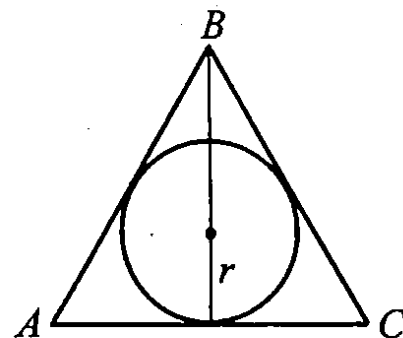


Рис. 324

Задания для контроля

Вариант 1

1. В треугольнике ABC угол A равен 38° , угол C равен 58° . На продолжении стороны AB отложен отрезок $BK = BC$. Найдите угол K треугольника BCK (см. рис. 325). Ответ дайте в градусах.

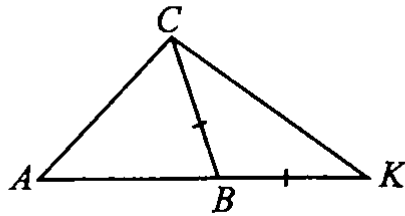


Рис. 325

2. Угол ACO равен 32° . Его сторона CA в точке A касается окружности с центром в точке O . Найдите градусную величину дуги AD окружности, заключённой внутри этого угла (см. рис. 326). Ответ дайте в градусах.

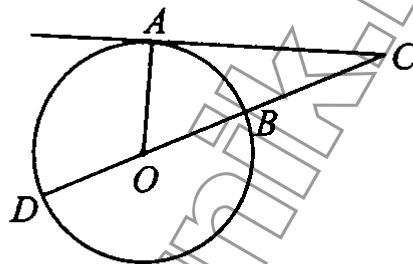


Рис. 326

3. Хорда PK делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как $11 : 7$ (см. рис. 327). Под каким углом видна эта хорда из точки M , принадлежащей меньшей дуге окружности? Ответ дайте в градусах.

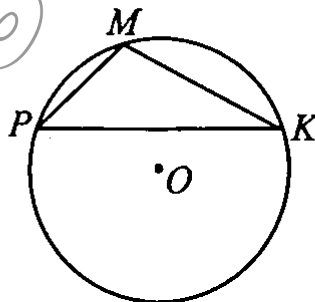


Рис. 327

4. Найдите радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, высота которого равна 18 (см. рис. 328).

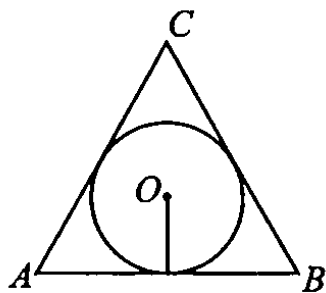


Рис. 328

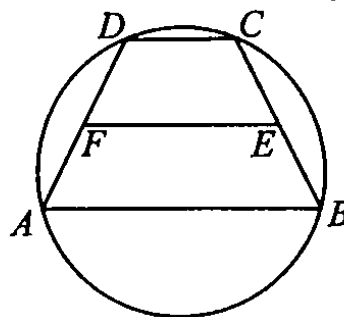


Рис. 329

5. Около трапеции описана окружность (см. рис. 329). Периметр трапеции равен 142, средняя линия равна 50. Найдите боковую сторону трапеции.

Вариант 2

1. Один из внешних углов треугольника равен 72° . Углы, не смежные с данным внешним углом, относятся как 5 : 13 (см. рис. 330). Найдите наибольший из них. Ответ дайте в градусах.

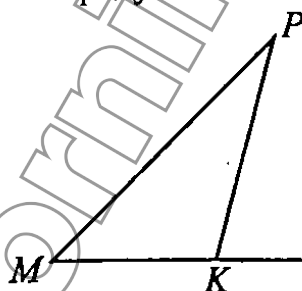


Рис. 330

2. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 50° (см. рис. 331). Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.

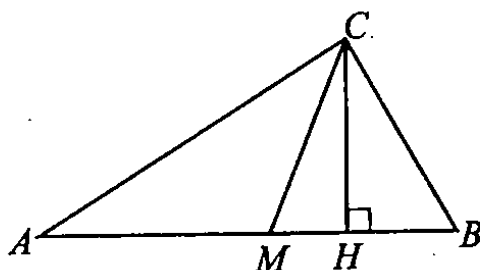


Рис. 331

3. Найдите угол ACO , если его сторона CA касается окружности в точке A , O — центр окружности, а меньшая дуга окружности AB , заключённая внутри этого угла, равна 71° (см. рис. 332). Ответ дайте в градусах.

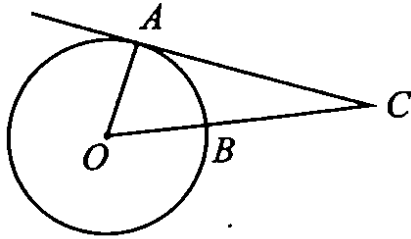


Рис. 332

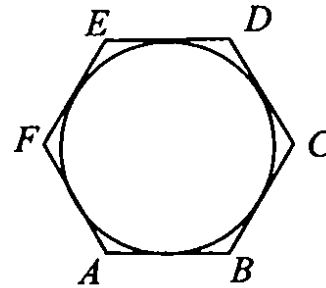


Рис. 333

4. Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около окружности, радиус которой равен $5\sqrt{12}$ (см. рис. 333).

5. Найдите радиус окружности, описанной около квадрата со стороной, равной $5\sqrt{2}$ (см. рис. 334).

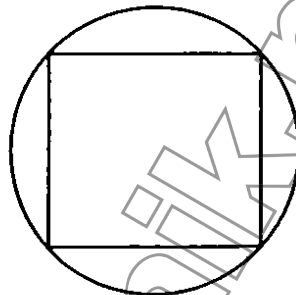


Рис. 334

Вариант 3

1. Углы треугольника относятся как $2 : 3 : 7$. Найдите меньший из них. Ответ дайте в градусах.

2. Острые углы прямоугольного треугольника равны 27° и 63° (см. рис. 335). Найдите угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

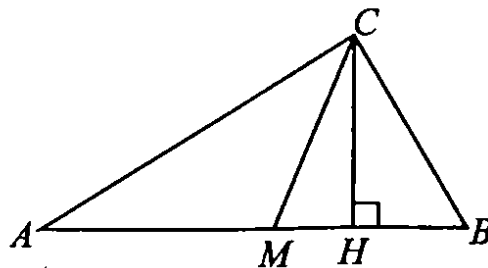


Рис. 335

3. Хорда AB стягивает дугу окружности в 104° (см. рис. 336). Найдите угол ABC между этой хордой и касательной к окружности, проведённой через точку B . Ответ дайте в градусах.

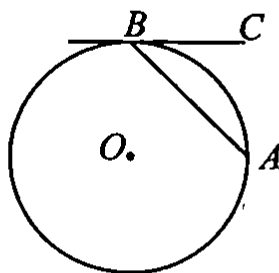


Рис. 336

4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность (см. рис. 337). Угол ABD равен 65° , угол CAD равен 42° . Найдите угол ABC . Ответ дайте в градусах.

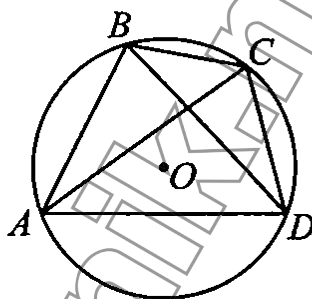


Рис. 337

5. Три стороны описанного около окружности четырёхугольника относятся (в последовательном порядке) как $2 : 3 : 4$. Найдите большую сторону этого четырёхугольника, если известно, что его периметр равен 36 (см. рис. 338).

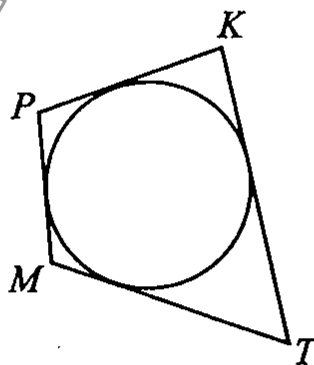


Рис. 338

Вариант 4

1. В треугольнике MPK $MK = PK = 18\sqrt{3}$, угол K равен 120° . Найдите высоту MH (см. рис. 339).

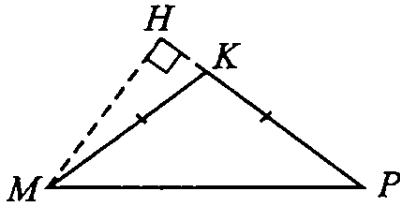


Рис. 339

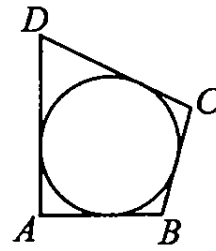


Рис. 340

2. В четырёхугольнике $ABCD$ вписана окружность, $AB = 11$, $CD = 24$ (см. рис. 340). Найдите периметр четырёхугольника.

3. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 31° (см. рис. 341). Найдите меньший угол данного треугольника. Ответ дайте в градусах.

4. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника MPK , если стороны клеток равны 1 (см. рис. 342).

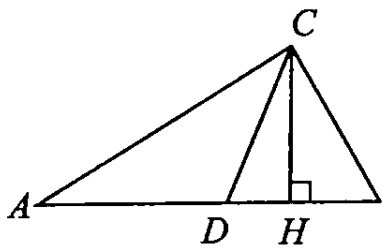


Рис. 341

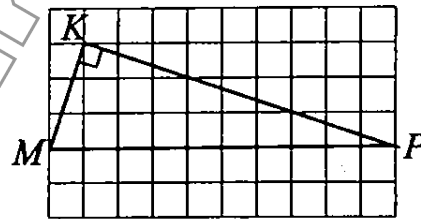


Рис. 342

5. Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 22, её большая боковая сторона равна 7. Найдите радиус окружности (см. рис. 343).

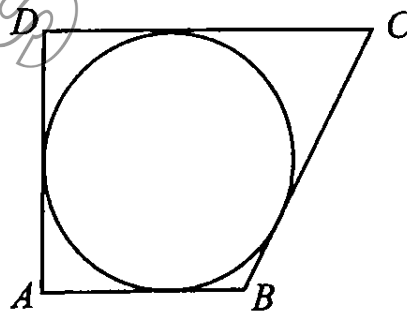


Рис. 343

§ 19. Практические задания по планиметрии

При решении предлагаемых заданий следует использовать теоретические сведения из двух предыдущих параграфов, посвящённых планиметрии.

857. Масштаб карты такой, что в одном сантиметре 0,5 км. Чему равно расстояние между городами A и B (в километрах), если на карте оно составляет 6 см?

858. Масштаб карты такой, что в одном сантиметре 0,4 км. Чему равно расстояние между городами A и B (в километрах), если на карте оно составляет 10 см?

859. На рисунке 344 показано, как выглядит колесо с 4 спицами. Сколько будет спиц в колесе, если угол между соседними спицами в нём будет равен 10° ?

860. На рисунке 344 показано, как выглядит колесо с 4 спицами. Сколько будет спиц в колесе, если угол между соседними спицами в нём будет равен 18° ?

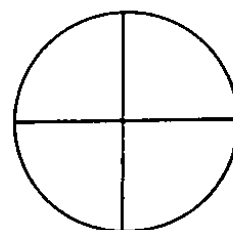


Рис. 344

861. Дачный участок имеет форму прямоугольника, стороны которого равны 30 м и 60 м (см. рис. 345). Дом, расположенный на участке, также имеет форму прямоугольника, стороны которого равны 6 м и 4 м. Найдите площадь оставшейся части участка. Ответ дайте в квадратных метрах.

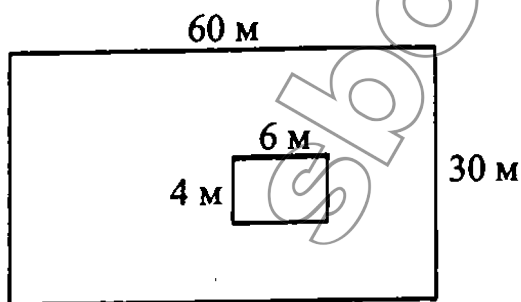


Рис. 345

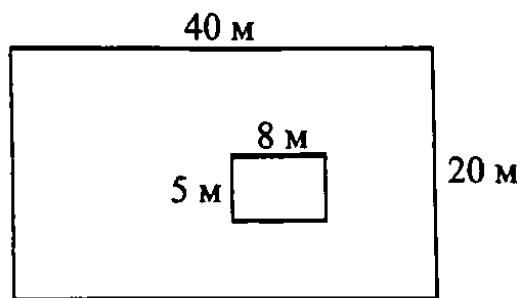


Рис. 346

862. Дачный участок имеет форму прямоугольника, стороны которого равны 20 м и 40 м (см. рис. 346). Дом, расположенный на участке, также имеет форму прямоугольника, стороны которого равны 8 м и 5 м. Найдите площадь оставшейся части участка. Ответ дайте в квадратных метрах.

863. Пол комнаты, имеющей форму прямоугольника со сторонами 4 м и 3 м, требуется покрыть паркетом из прямоугольных дощечек со сторонами 30 см и 25 см. Сколько потребуется таких дощечек?

864. Пол комнаты, имеющей форму прямоугольника со сторонами 6 м и 4 м, требуется покрыть паркетом из прямоугольных дощечек со сторонами 15 см и 20 см. Сколько потребуется таких дощечек?

865. Частная спортивная площадка имеет форму прямоугольника со сторонами 30 метров и 35 метров (см. рис. 347). Хозяин планирует обнести её изгородью и отгородить такой же изгородью квадратный участок со стороной 20 метров. Найдите суммарную длину изгороди в метрах.

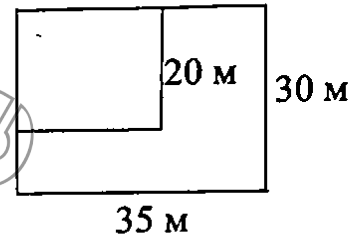


Рис. 347

866. Дачный участок имеет форму прямоугольника со сторонами 30 метров и 35 метров (см. рис. 347). Хозяин планирует обнести его изгородью и отгородить такой же изгородью квадратный участок со стороной 20 метров под строительство дома. Найдите суммарную длину изгороди, ограждающую весь участок не для дома. Ответ дайте в метрах.

867. Участок земли под строительство санатория имеет форму прямоугольника, стороны которого равны 1200 м и 600 м. Одна из больших сторон (см. рис. 348) идёт вдоль моря, а три остальные стороны нужно огородить забором. Найдите длину этого забора. Ответ дайте в метрах.

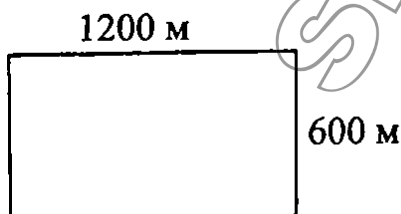


Рис. 348

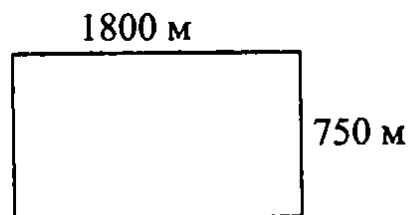


Рис. 349

868. Участок земли под строительство санатория имеет форму прямоугольника, стороны которого равны 1800 м и 750 м. Одна из больших сторон (см. рис. 349) идёт вдоль моря, а три остальные стороны нужно огородить забором. Найдите длину этого забора. Ответ дайте в метрах.

869. От столба к палатке «Мороженое» натянут провод длиной 13 м, который закреплён на стене палатки на высоте 3 м от земли (см. рис. 350). Вычислите высоту столба, если расстояние от палатки до столба равно 12 м. Ответ дайте в метрах.

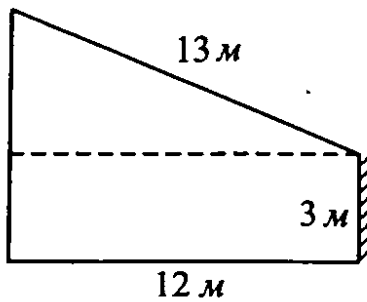


Рис. 350

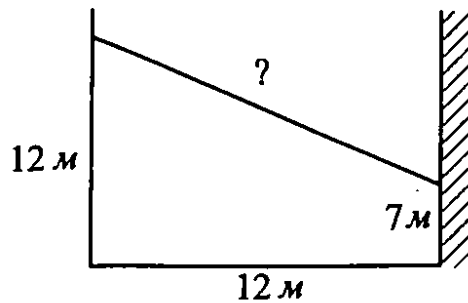


Рис. 351

870. От столба высотой 12 м к дому натянут провод, который крепится на высоте 7 м от земли (см. рис. 351). Расстояние от дома до столба 12 м. Найдите длину провода. Ответ дайте в метрах.

871. Пожарную лестницу длиной 15 м поставили к окну дома (см. рис. 352). Нижний конец лестницы отстоит от стены на 9 м. На какой высоте расположено окно? Ответ дайте в метрах.

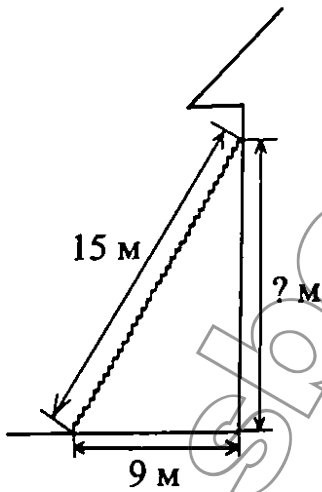


Рис. 352

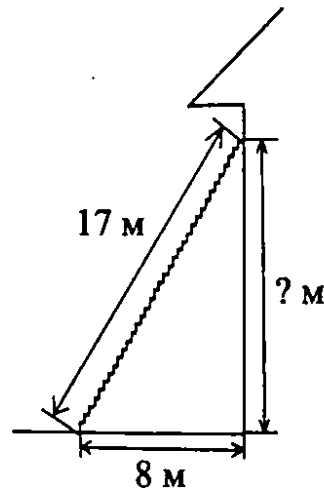


Рис. 353

872. Пожарную лестницу длиной 17 м поставили к окну дома (см. рис. 353). Нижний конец лестницы отстоит от стены на 8 м. На какой высоте расположено окно? Ответ дайте в метрах.

873. Человек ростом 1,8 м стоит на расстоянии 20 шагов от фонарного столба и отбрасывает тень длиной в 20 шагов (см. рис. 354). Определите высоту столба в метрах.

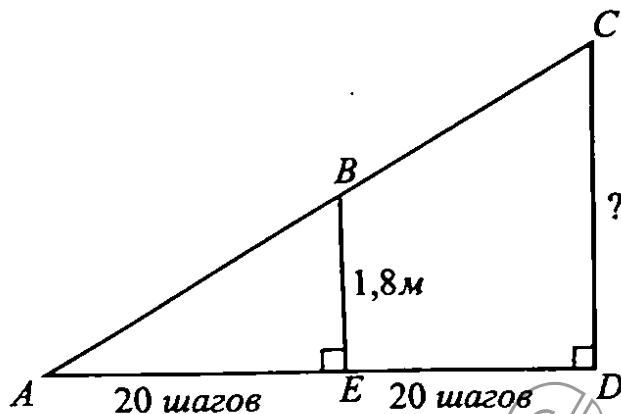


Рис. 354

874. Человек, рост которого равен 2 м, стоит на расстоянии 4,5 м от уличного фонаря (см. рис. 355). При этом длина тени человека равна 1,5 м. Определите высоту фонаря (в метрах).

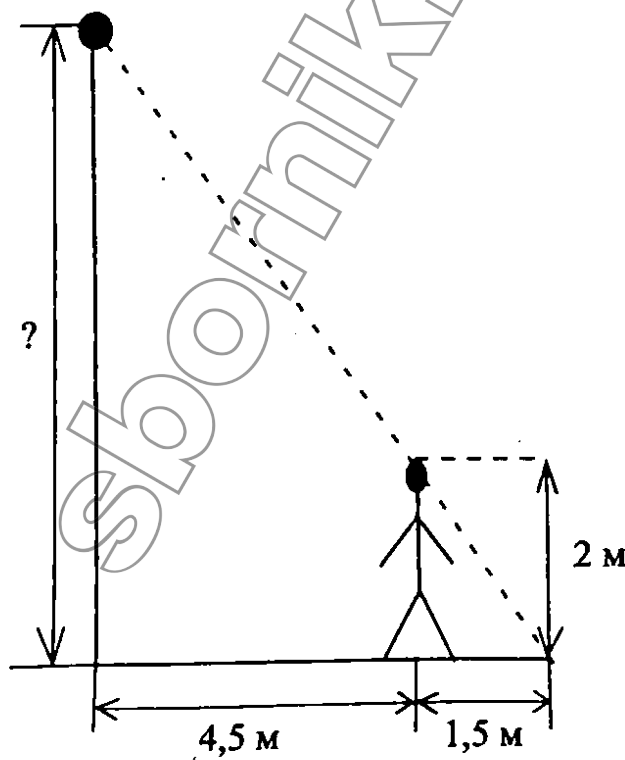


Рис. 355

875. Детская горка укреплена вертикальным столбом, расположенным посередине спуска (см. рис. 356). Найдите высоту L этого столба, если высота H горки равна 7 метров. Ответ дайте в метрах.

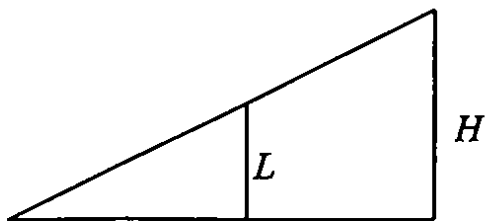


Рис. 356

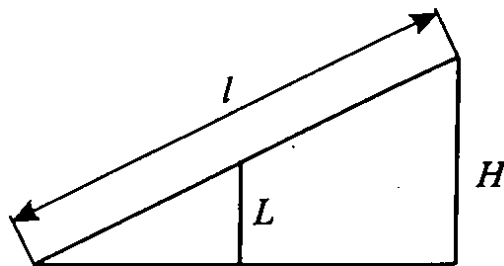


Рис. 357

876. Детская горка укреплена вертикальным столбом, расположенным на расстоянии $\frac{3}{7}l$ от основания спуска, где l — длина всего спуска (см. рис. 357). Найдите высоту L этого столба, если высота H горки равна 3,5 метра. Ответ дайте в метрах.

Задания для контроля

Вариант 1

1. Квартира состоит из комнаты, коридора, кухни и санузла (см. рис. 358). Кухня имеет размеры 3 м × 3 м, санузел 2,5 м × 2 м, длина комнаты 6 м. Определите площадь коридора в квадратных метрах.

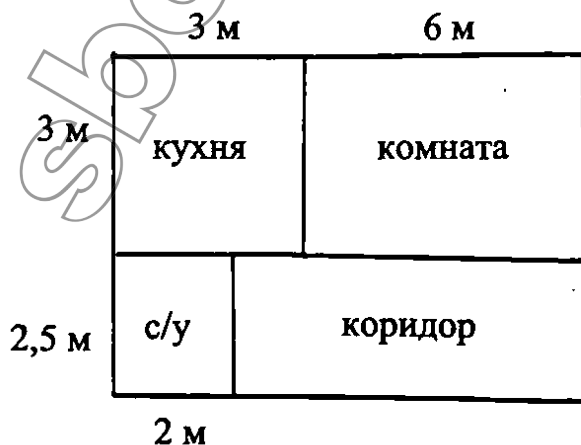


Рис. 358

2. Дачный участок имеет форму прямоугольника со сторонами 42 метра и 23 метра (см. рис. 359). Хозяин планирует обнести его забором и разделить таким же забором на две части, одна из которых имеет форму квадрата. Найдите общую длину забора в метрах.

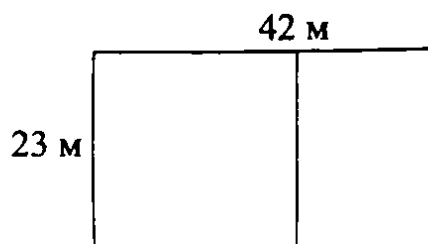


Рис. 359

3. Перила лестницы дачного дома для надёжности укреплены посередине вертикальным столбом (см. рис. 360). Найдите высоту l этого столба, если наименьшая высота h_1 перил относительно земли равна 1,2 м, а наибольшая высота h_2 равна 2,4 м. Ответ дайте в метрах.

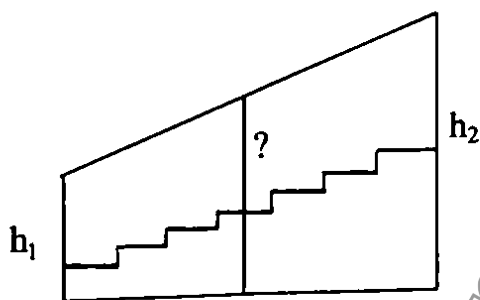


Рис. 360

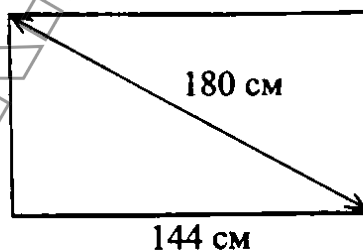


Рис. 361

4. Диагональ прямоугольного телевизионного экрана равна 180 см, а ширина — 144 см (см. рис. 361). Найдите высоту экрана. Ответ укажите в сантиметрах.

5. В квартире две прямоугольные комнаты. Размеры первой комнаты 7 м × 4 м, а размеры второй комнаты — 6 м × 5 м. Какая из этих комнат больше по площади? В ответ запишите площадь этой комнаты в квадратных метрах.

Вариант 2

1. На плане указано, что прямоугольная комната имеет площадь 12,7 кв. м. Точные измерения показали, что ширина комнаты равна 3 м, а длина — 4,2 м (см. рис. 362 на с. 300). На сколько квадратных метров площадь комнаты отличается от значения, указанного на плане?

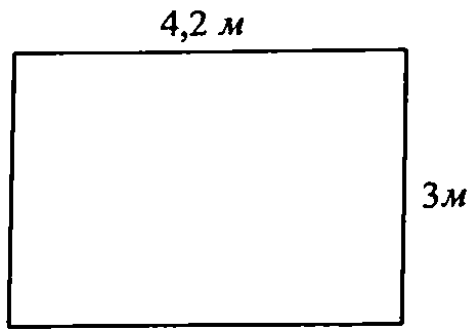


Рис. 362

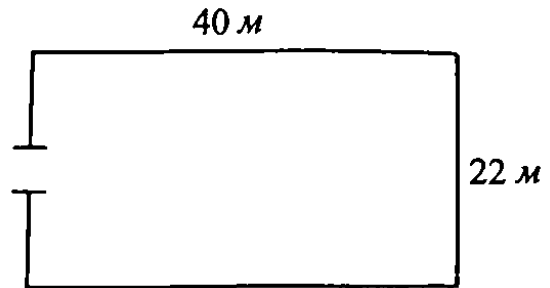


Рис. 363

2. Участок земли имеет прямоугольную форму. Стороны прямоугольника равны 22 м и 40 м. Найдите длину забора (в метрах), которым нужно огородить участок, предусмотрев проезд шириной 3 м (см. рис. 363).

3. На рисунке 364 изображён колодец с «журавлём». Короткое плечо имеет длину 4 м, а длинное плечо — 10 м. На сколько метров опустится конец длинного плеча, когда конец короткого поднимется на 1 м?

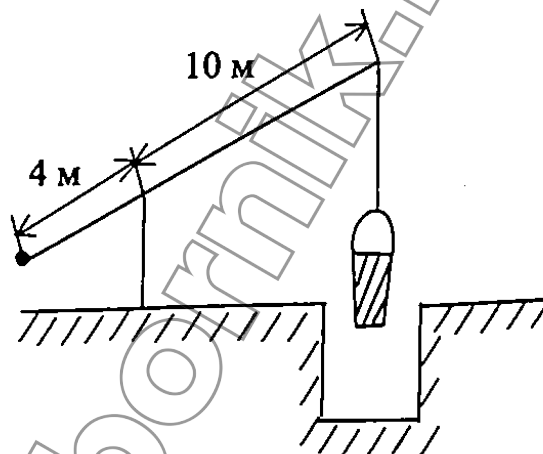


Рис. 364

4. Диагональ прямоугольного телевизионного экрана равна 250 см, а высота — 150 см (см. рис. 365). Найдите ширину экрана. Ответ укажите в сантиметрах.

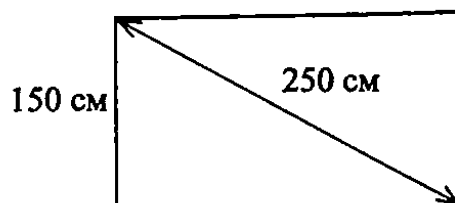


Рис. 365

5. В спортивном центре два плавательных бассейна. Размеры первого бассейна $25\text{ м} \times 10\text{ м}$, а размеры второго — $20\text{ м} \times 15\text{ м}$. В каком из этих бассейнов площадь поверхности воды больше? В ответе запишите площадь этого бассейна в квадратных метрах.

Вариант 3

1. Масштаб карты такой, что в одном сантиметре $3,5\text{ км}$. Чему равно расстояние между городами A и B (в километрах), если на карте оно составляет 8 см ?

2. Пол комнаты, имеющей форму прямоугольника со сторонами 5 м и 8 м , требуется покрыть паркетом из прямоугольных дощечек со сторонами 10 см и 20 см . Сколько потребуется таких дощечек?

3. План местности разбит на клетки. Каждая клетка обозначает квадрат $1\text{ м} \times 1\text{ м}$ (см. рис. 366). Найдите площадь участка, выделенного на плане. Ответ дайте в квадратных метрах.

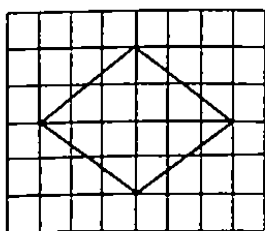


Рис. 366

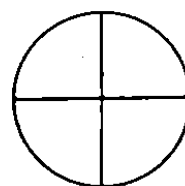


Рис. 367

4. На рисунке 367 показано, как выглядит колесо с 4 спицами. Сколько будет спиц в колесе, если угол между соседними спицами в нём будет равен 9° ?

5. На местности расположены две прямоугольные спортивные площадки. Размеры первой площадки $20\text{ м} \times 30\text{ м}$, а размеры второй площадки $15\text{ м} \times 35\text{ м}$. Какая из этих спортивных площадок больше по площади? В ответе запишите площадь этой площадки в квадратных метрах.

Вариант 4

1. Масштаб карты такой, что в одном сантиметре 25 км . Чему равно расстояние на карте между городами A и B , если на местности оно равняется 750 км ? Ответ укажите в сантиметрах.

2. Два садовода, имеющих прямоугольные участки размером 20 м на 40 м с общей границей, договорились и сделали общий круглый пруд площадью 120 квадратных метров (см. рис. 368), причём граница участков проходит точно через центр пруда. Какова площадь (в квадратных метрах) оставшейся части участка каждого садовода?

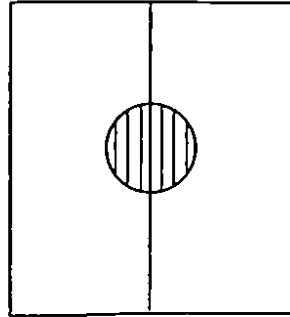


Рис. 368

3. Пол комнаты, имеющей форму прямоугольника со сторонами 2 м и 3,3 м, требуется покрыть паркетом из прямоугольных дощечек со сторонами 8 см и 15 см. Сколько потребуется таких дощечек?

4. Какой угол (в градусах) образуют минутная и часовая стрелки в 20:00 (см. рис. 369)?

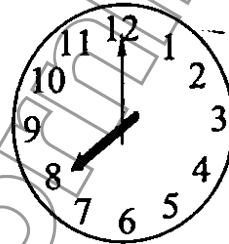


Рис. 369

5. Участок земли для выпаса скота имеет форму прямоугольника, стороны которого равны 300 м и 200 м. Одна из больших сторон участка идёт вдоль озера, а три другие огорожены забором. Найдите длину этого забора. Ответ дайте в метрах.

§ 20. Тригонометрия, координаты и векторы

20.1. Тригонометрия в прямоугольном треугольнике

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC , в котором угол C равен 90° (см. рис. 370).

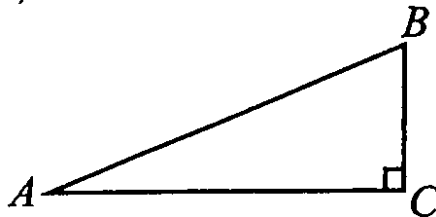


Рис. 370

Стороны BC и AC называются катетами, сторона AB , лежащая против угла 90° , называется гипотенузой. Для угла A прилежащий катет AC (лежит на стороне угла), противолежащий катет BC .

Синусом угла называют отношение противолежащего катета к гипотенузе. Для нашего треугольника $\sin A = \frac{BC}{AB}$; $\sin B = \frac{AC}{AB}$.

Косинусом угла называют отношение прилежащего катета к гипотенузе. Для нашего треугольника $\cos A = \frac{AC}{AB}$; $\cos B = \frac{BC}{AB}$.

Обратите внимание, в одном и том же прямоугольном треугольнике синус одного острого угла равен косинусу другого острого угла, т. е. $\sin A = \cos B$, $\sin B = \cos A$.

Тангенсом угла называют отношение противолежащего катета к прилежащему. Для нашего треугольника $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$; $\operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC}$.

Отметим, что $\operatorname{tg} A = \frac{\frac{BC}{AB}}{\frac{AC}{AB}} = \frac{\sin A}{\cos A}$, аналогично $\operatorname{tg} B = \frac{\sin B}{\cos B}$.

Используя определения и теорему Пифагора, можно получить основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

Оно позволяет найти синус угла, если известен косинус этого угла, и наоборот. А именно, для острого угла $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$;
 $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$.

877. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 20$, $AC = 16$. Найдите $\sin A$.

878. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой. Найдите $\cos A$, если $AB = 10\sqrt{2}$ и $AC = 7\sqrt{2}$.

879. В прямоугольном треугольнике ABC известны катеты $AC = 16$, $CB = 12$. Найдите $\sin B$.

880. В треугольнике ABC угол C прямой. Известно, что $BC = 8\sqrt{3}$ и $AC = 8$. Найдите $\cos A$.

881. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\cos A = 0,28$. Найдите $\sin A$.

882. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\sin A = 0,96$. Найдите $\cos A$.

883. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\sin A = \frac{5\sqrt{34}}{34}$. Найдите $\operatorname{tg} B$.

884. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $\cos B = \frac{6\sqrt{61}}{61}$. Найдите $\operatorname{tg} A$.

885. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C $BC = 3\sqrt{17}$ и $\operatorname{tg} A = 4$. Найдите AB .

886. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C $AC = 7\sqrt{5}$ и $\operatorname{tg} B = 2$. Найдите AB .

887. В треугольнике ABC угол C прямой. Известно, что $AC = 8\sqrt{5}$ и $BC = 11\sqrt{5}$. Найдите $\operatorname{tg} A$.

888. В треугольнике ABC угол C прямой. Известно, что $AC = 3\sqrt{7}$ и $BC = 8\sqrt{7}$. Найдите $\operatorname{tg} A$.

889. Найдите тангенс угла CAB , изображённого на рисунке 371. В ответе укажите значение тангенса, умноженное на 3.

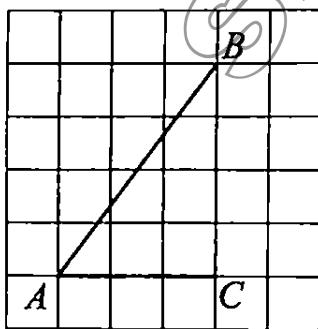


Рис. 371

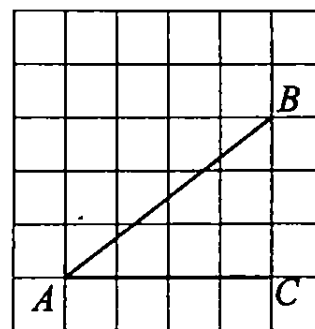


Рис. 372

890. Найдите тангенс угла CAB , изображённого на рисунке 372.

891. Найдите косинус угла MON . В ответе укажите значение косинуса, умноженное на $5\sqrt{2}$ (см. рис. 373).

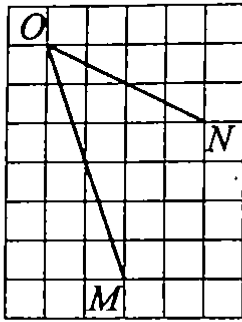


Рис. 373

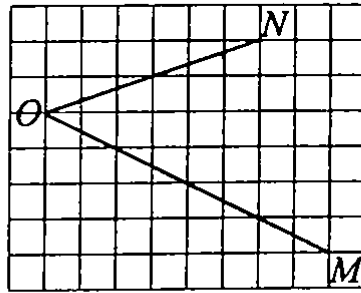


Рис. 374

892. Найдите косинус угла MON . В ответе укажите значение косинуса, умноженное на $7\sqrt{2}$ (см. рис. 374).

20.2. Высоты в прямоугольном треугольнике

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C две высоты AC и BC являются катетами. Третья высота CH , проведённая из вершины прямого угла к гипотенузе, делит треугольник на два прямоугольных треугольника, углы которых равны соответственно углам исходного треугольника (см. рис. 375).

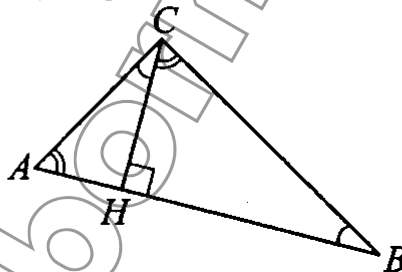


Рис. 375

893. В треугольнике ABC угол C равен 90° , высота $CH = 2\sqrt{54}$, $BC = 15$. Найдите $\cos B$.

894. В треугольнике ABC угол C равен 90° , высота $CH = 7$, $AC = 25$. Найдите $\cos A$.

895. В треугольнике ABC угол C прямой, высота $CH = 12$, $BC = 15$. Найдите $\sin A$.

896. В треугольнике ABC угол C прямой, высота $CH = 3\sqrt{21}$, $BC = 15$. Найдите $\sin A$.

20.3. Равнобедренный треугольник

Равнобедренным треугольником называют треугольник, у которого две стороны равны. Эти стороны называют боковыми, третью сторону называют основанием. Если в задаче дан равнобедренный треугольник, то пользуются его свойствами.

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Высота, проведённая к основанию равнобедренного треугольника, является медианой и биссектрисой (см. рис. 376).

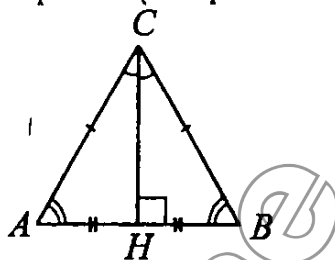


Рис. 376

897. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 24$, $\cos A = 0,6$. Найдите AC .
898. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 32$, $\cos B = 0,8$. Найдите BC .
899. В равнобедренном треугольнике ABC основание $AB = 3$, $\operatorname{tg} A = 5$. Найдите высоту, опущенную на AB .
900. В равнобедренном треугольнике ABC основание $AB = 5$, $\operatorname{tg} A = 8$. Найдите высоту, опущенную на AB .
901. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 24$, $\cos A = 0,6$. Найдите высоту CH .
902. В равнобедренном треугольнике ABC $BC = CA$, $AB = 7$, $\sin A = 0,96$. Найдите длину высоты CH .
903. В равнобедренном треугольнике ABC $BC = CA = 15$. Чему равна высота, опущенная на AB , если $\sin A = 0,9$?
904. В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $BC = CA = 40$. Чему равна высота, опущенная на AB , если $\cos A = 0,28$?
905. В треугольнике ABC $AC = BC = 15$, $\sin B = \frac{\sqrt{21}}{5}$. Найдите AB .
906. В треугольнике ABC $AC = BC = 14$, $\sin B = \frac{\sqrt{33}}{7}$. Найдите AB .
907. В треугольнике ABC $AC = BC = 20$, $AB = 6\sqrt{39}$. Найдите $\sin A$.
908. В треугольнике ABC $AC = BC = 32$, $AB = 16\sqrt{15}$. Найдите $\sin A$.

20.4. Тригонометрические функции тупого угла

Рассмотрим развёрнутый угол BAK (см. рис. 377). Луч AP делит его на два смежных угла. По определению, синусы этих смежных углов равны, косинусы противоположны, то есть отличаются только знаком, а их тангенсы как отношения синуса к косинусу также отличаются знаком: $\sin \angle PAK = \sin \angle PAB$, $\cos \angle PAK = -\cos \angle PAB$,

$$\operatorname{tg} \angle PAK = \frac{\sin \angle PAK}{\cos \angle PAK} = -\operatorname{tg} \angle PAB.$$



Рис. 377

Например, если $\sin \angle BAP = 0,6$, то $\sin \angle PAK = 0,6$, $\cos \angle BAP = 0,8$, $\cos \angle PAK = -0,8$,

$$\operatorname{tg} \angle PAK = \frac{\sin \angle PAK}{\cos \angle PAK} = \frac{0,6}{-0,8} = -0,75.$$

909. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\cos A = \frac{10}{\sqrt{109}}$. Найдите тангенс внешнего угла при вершине A .

910. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\sin A = \frac{11}{\sqrt{146}}$. Найдите тангенс внешнего угла при вершине A .

911. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\sin B = \frac{\sqrt{91}}{10}$. Найдите косинус внешнего угла при вершине B .

912. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\cos B = \frac{\sqrt{51}}{10}$. Найдите синус внешнего угла при вершине B .

913. В треугольнике ABC угол C равен 90° , косинус внешнего угла при вершине A равен $-\frac{11}{\sqrt{157}}$, $BC = 2$. Найдите $3 \cdot AC$.

914. В треугольнике ABC угол C равен 90° , синус внешнего угла при вершине A равен $\frac{4}{\sqrt{137}}$, $BC = 5$. Найдите $4 \cdot AC$.

915. В параллелограмме $ABCD$ $\sin C = 0,8$ (см. рис. 378). Найдите $\cos D$.

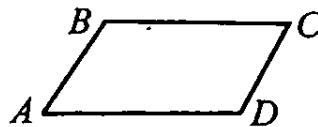


Рис. 378

916. В параллелограмме $ABCD$ $\cos C = 0,6$ (см. рис. 378). Найдите $\sin D$.

20.5. Координаты точек

Рассмотрим прямоугольную систему координат Oxy (см. рис. 379).

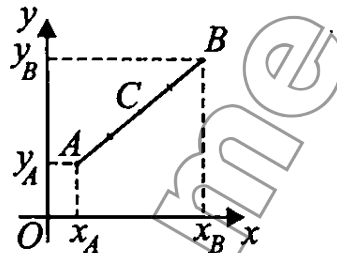


Рис. 379

Длина отрезка AB , для которого известны координаты его концов $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$, определяется по формуле

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Координаты точки C , являющейся серединой отрезка AB , вычисляются по формулам $x_C = \frac{x_A + x_B}{2}$; $y_C = \frac{y_A + y_B}{2}$.

Если точки A и B симметричны относительно оси Ox (оси абсцисс), то их ординаты противоположны (см. рис. 380), а абсциссы равны: $A(x; y)$, $B(x; -y)$.

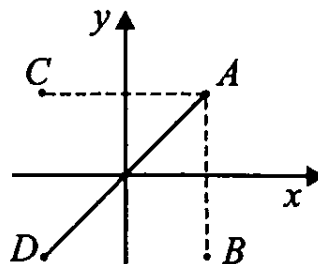


Рис. 380

Если точки A и C симметричны относительно оси Oy , то их абсциссы противоположны, а ординаты равны: $A(x; y)$, $C(-x; y)$.

Если точки A и D симметричны относительно начала координат, то обе их координаты противоположны: $A(x; y)$, $D(-x; -y)$.

917. Найдите абсциссу точки, симметричной точке $A(2; 5)$ относительно оси Oy (см. рис. 381).

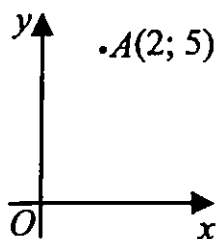


Рис. 381

918. Найдите ординату точки, симметричной точке $A(2; 5)$ относительно оси Oy (см. рис. 381).

919. Найдите абсциссу точки, симметричной точке $A(3; 8)$ относительно начала координат (см. рис. 382).

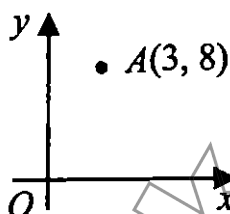


Рис. 382

920. Найдите ординату точки, симметричной точке $A(3; 8)$ относительно начала координат (см. рис. 382).

921. Точки $A(-1; -2)$, $B(4; -1)$, $C(6; 5)$ и D являются вершинами параллелограмма. Найдите абсциссу точки P пересечения его диагоналей (см. рис. 383).

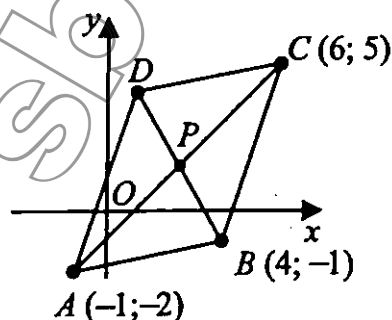


Рис. 383

922. Точки $A(-1; -2)$, $B(4; -1)$, $C(6; 5)$ и D являются вершинами параллелограмма. Найдите ординату точки P пересечения его диагоналей (см. рис. 383).

923. Точки $O(0; 0)$, $A(6; 7)$, $B(5; 2)$, $C(1; 5)$ являются вершинами четырёхугольника. Найдите ординату точки T пересечения его диагоналей (см. рис. 384).

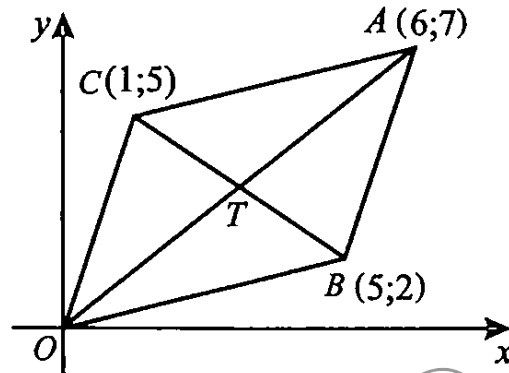


Рис. 384

924. Точки $O(0; 0)$, $A(6; 7)$, $B(5; 2)$, $C(1; 5)$ являются вершинами четырёхугольника. Найдите абсциссу точки T пересечения его диагоналей (см. рис. 384).

925. Точки $O(0; 0)$, $A(16; 12)$, $B(6; 8)$ и D являются вершинами параллелограмма. Найдите ординату точки D (см. рис. 385).

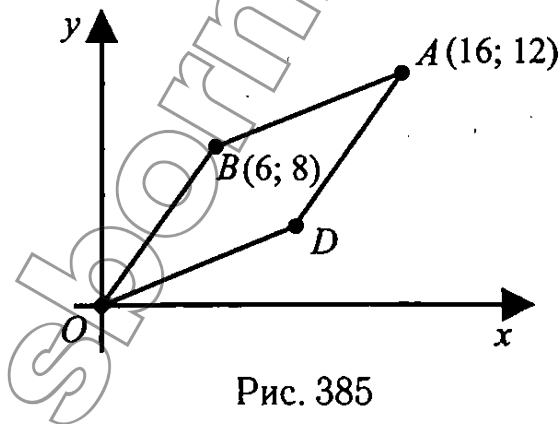


Рис. 385

926. Точки $O(0; 0)$, $A(16; 12)$, $B(6; 8)$ и D являются вершинами параллелограмма. Найдите абсциссу точки D (см. рис. 385).

927. Точки $A(-1; -2)$, $B(4; -1)$, $C(6; 5)$ и D являются вершинами параллелограмма. Найдите ординату точки D (см. рис. 386).

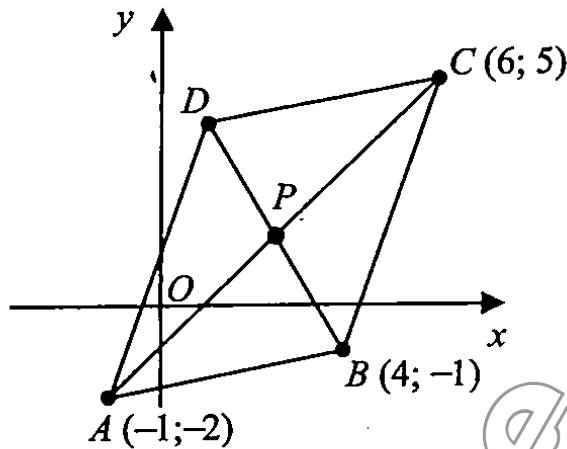


Рис. 386

928. Точки $A(-1; -2)$, $B(4; -1)$, $C(6; 5)$ и D являются вершинами параллелограмма. Найдите абсциссу точки D (см. рис. 386).

20.6. Векторы

Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек является началом, а какая — концом, называется **вектором**.

Вектор характеризуется модулем (длиной отрезка) и направлением. Два вектора, имеющие одинаковые модули и направления, **равны**. А два вектора, имеющие одинаковые модули и противоположные направления, **противоположны**.

Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначают \overrightarrow{AB} или строчной (маленькой) буквой, например \vec{a} (см. рис. 387).

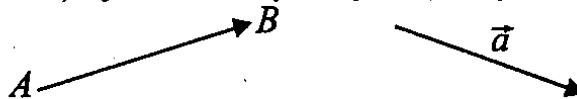


Рис. 387

Вектор, начало и конец которого совпадают, называют **нулевым**. Нулевой вектор направления не имеет.

Модуль (длину) вектора обозначают $|\overrightarrow{AB}|$ или $|\vec{a}|$.

Вектор, противоположный вектору \vec{a} , обозначают $-\vec{a}$, $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

Сумма векторов — это вектор, который можно получить двумя способами (см. рис. 388). Заметим, что для любых точек A , B и C $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

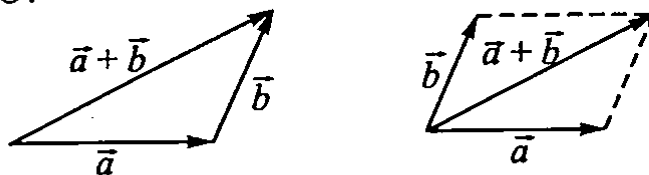


Рис. 388

На первом рисунке сумма векторов находится по правилу треугольника, а на втором — по правилу параллелограмма.

Разность векторов тоже можно получить двумя способами: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ или $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ (см. рис. 389).

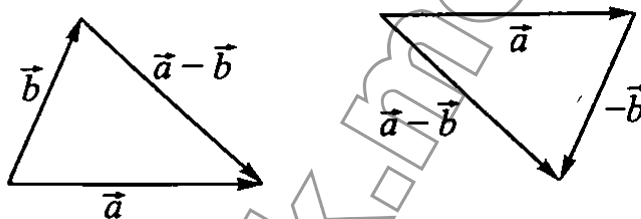


Рис. 389

Произведение $\alpha \vec{a}$ числа α на вектор \vec{a} — это вектор, длина которого равна произведению числа $|\alpha|$ на длину вектора \vec{a} . Направление вектора $\alpha \vec{a}$ совпадает с направлением вектора \vec{a} , если $\alpha > 0$, и противоположно направлению вектора \vec{a} , если $\alpha < 0$ (см. рис. 390)

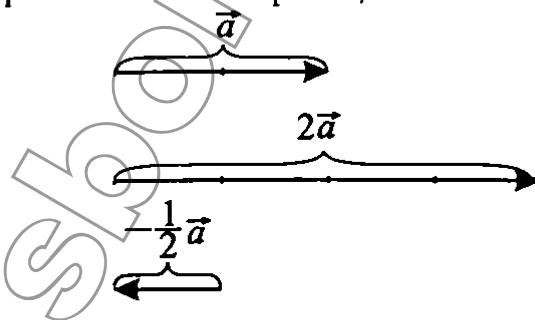


Рис. 390

Координаты вектора

Выберем на координатной плоскости Oxy векторы \vec{i} и \vec{j} так, что длины этих векторов равны 1, направление вектора \vec{i} совпадает с направлением оси Ox , а вектора \vec{j} — оси Oy . Тогда любой вектор \vec{a} на координатной плоскости можно представить в виде

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j},$$

где числа x, y — некоторые числа, которые называют координатами вектора \vec{a} . Обычно записывают $\vec{a}\{x; y\}$ или $\vec{a}(x; y)$.

Пусть точки A и B на на координатной плоскости Oxy имеют координаты $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$.

Тогда $\vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$ и $\vec{AB}\{x_B - x_A; y_B - y_A\}$.

Длина вектора, или модуль вектора \vec{AB} , находится по формуле

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Длина произвольного вектора $\vec{AB}\{x; y\}$ находится по формуле

$$|\vec{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Координаты суммы и разности векторов $\vec{a}\{x_a; y_a\}$ и $\vec{b}\{x_b; y_b\}$:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}\{x_c; y_c\}, x_c = x_a + x_b, y_c = y_a + y_b.$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{p}\{x_p; y_p\}, x_p = x_a - x_b, y_p = y_a - y_b.$$

Известно, что противоположные стороны параллелограмма равны и параллельны. Значит, для параллелограмма $ABCD$ (см. рис. 391)

$\vec{AB} = \vec{DC}$, так как $AB = CD$ и $AB \parallel CD$.

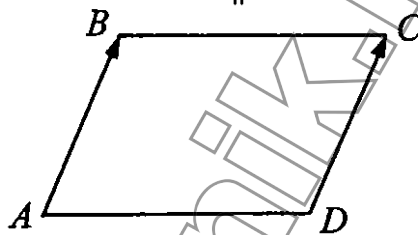


Рис. 391

Диагонали параллелограмма пересекаются в середине диагоналей, поэтому $\vec{AO} = \vec{OC}, \vec{BO} = \vec{OD}$ (см. рис. 392).

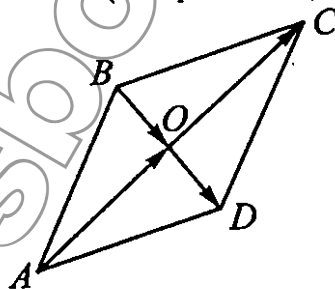


Рис. 392

Скалярное произведение векторов $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$, где α — угол между векторами \vec{a} и \vec{b} .

Если векторы заданы координатами $\vec{a}\{x_a; y_a\}, \vec{b}\{x_b; y_b\}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$.

929. Стороны правильного треугольника KNP равны 10 (см. рис. 393). Найдите точку начала и точку конца вектора $\overrightarrow{KN} - \overrightarrow{KP}$. В ответе запишите его длину.

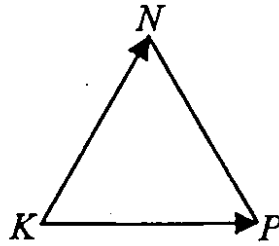


Рис. 393

930. Стороны правильного треугольника KNP равны 22 (см. рис. 393). Найдите точку начала и точку конца вектора $\overrightarrow{KP} - \overrightarrow{KN}$. В ответе запишите его длину.

931. Диагонали ромба $ABCD$ равны 15 и 10 (см. рис. 394). Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

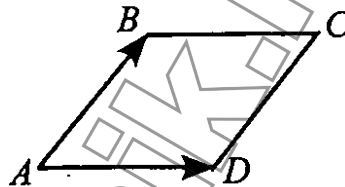


Рис. 394

932. Диагонали ромба $ABCD$ равны 25 и 15 (см. рис. 394). Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

933. Найдите координаты вектора $\vec{a} - \vec{b}$ (см. рис. 395). В ответе запишите сумму этих координат.

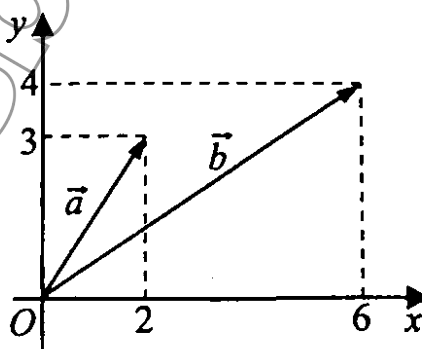


Рис. 395

934. Найдите координаты вектора $\vec{b} - \vec{a}$ (см. рис. 395). В ответе запишите сумму этих координат.

935. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 12 и 5. Диагонали пересекаются в точке O (см. рис. 396).

Найдите длину разности векторов \vec{AO} и \vec{BO} .

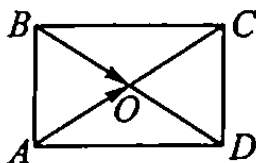


Рис. 396

936. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 16 и 7. Диагонали пересекаются в точке O (см. рис. 396). Найдите длину разности векторов \vec{BO} и \vec{AO} .

937. Стороны правильного треугольника MKN равны 10. Найдите скалярное произведение векторов \vec{KN} и \vec{KM} .

938. Стороны правильного треугольника MKP равны 14. Найдите скалярное произведение векторов \vec{MK} и \vec{MP} .

939. Найдите скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} (см. рис. 397).

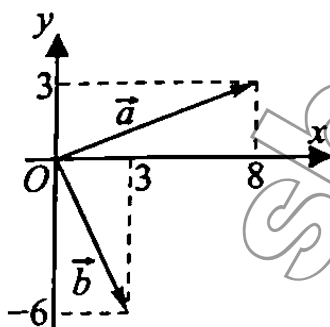


Рис. 397

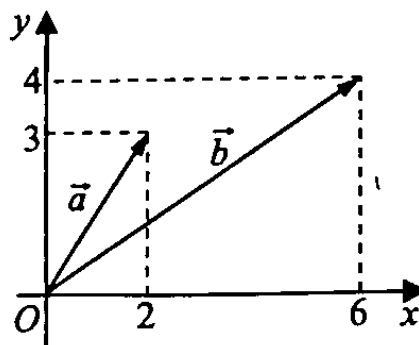


Рис. 398

940. Найдите скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} (см. рис. 398).

Задания для контроля

Вариант 1

1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C $AC = 3$, $AB = 5$. Найдите $\sin B$.
2. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C , причём известно, что $\operatorname{tg} A = \frac{5}{12}$, $AC = 3$. Найдите AB .
3. Найдите основание AB равнобедренного треугольника ABC , если $AC = 7$, $\cos A = 0,125$.
4. Найдите ординату середины отрезка, соединяющего точки $A(-6; 4)$ и $B(4; 16)$.
5. Найдите скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} (см. рис. 399).

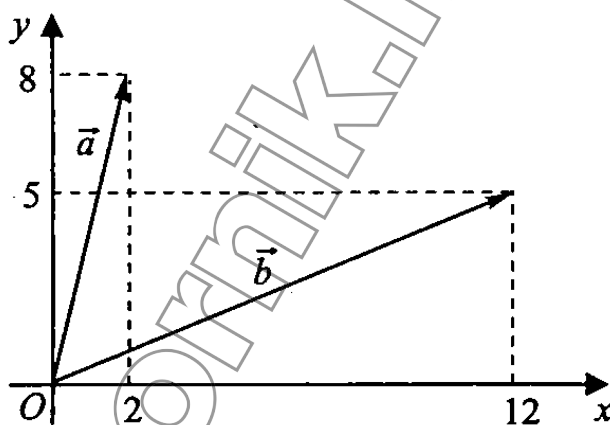


Рис. 399

Вариант 2

1. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $AC = \sqrt{17}$, $AB = 17$. Найдите $\operatorname{tg} A$.
2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C $BC = 2,25$ и $\sin A = \frac{9}{13}$. Найдите длину гипотенузы.
3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C $AB = 11\sqrt{11}$ и $\operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Найдите AC .

4. Точки $O(0; 0)$, $A(8; 6)$, $B(3; 4)$ и D являются вершинами параллелограмма. Найдите ординату точки D (см. рис. 400).

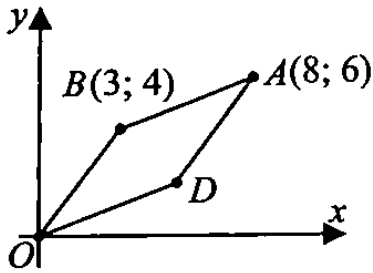


Рис. 400

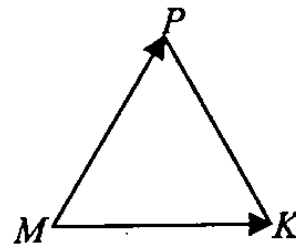


Рис. 401

5. Стороны правильного треугольника MKP равны 12 (см. рис. 401). Найдите длину вектора $\vec{MK} - \vec{MP}$.

Вариант 3

1. В треугольнике ABC угол C прямой. Найдите $\cos B$, если $AB = 20$, $AC = 2\sqrt{19}$.

2. Дан острый угол α , $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Вычислите $\cos \alpha$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой $AB = 8\sqrt{58}$ известен $\operatorname{tg} A = \frac{3}{7}$. Найдите AC .

4. Найдите ординату точки, симметричной точке $B(6; -2)$ относительно оси абсцисс (см. рис. 402).

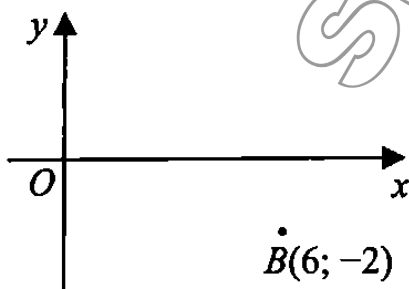


Рис. 402

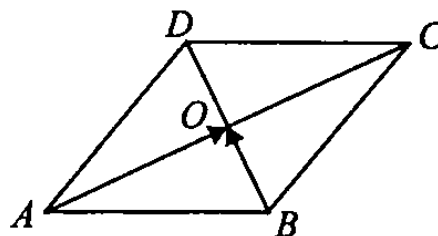


Рис. 403

5. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 15 и 6 (см. рис. 403). Найдите скалярное произведение векторов \vec{AO} и \vec{BO} .

Вариант 4

1. В прямоугольном треугольнике ABC даны длины катета $AC = \sqrt{19}$ и гипотенузы $AB = 10$. Найдите $\sin A$.
2. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $\operatorname{tg} A = \frac{7}{2}$. Найдите AC , если $BC = 2,8$.
3. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой. Найдите BC , если $\sin A = \frac{3}{4}$, $AC = 8\sqrt{7}$.
4. Найдите абсциссу середины отрезка, соединяющего точки $A(6; 4)$ и $B(14; -2)$.
5. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 12 и 16 (см. рис. 404). Найдите длину разности векторов \vec{AB} и \vec{AD} .



Рис. 404

§ 21. Параллелепипед, призма, пирамида

21.1. Прямоугольный параллелепипед

Объём прямоугольного параллелепипеда («кирпича», см. рис. 405) равен произведению трёх его измерений: $V = abc$.

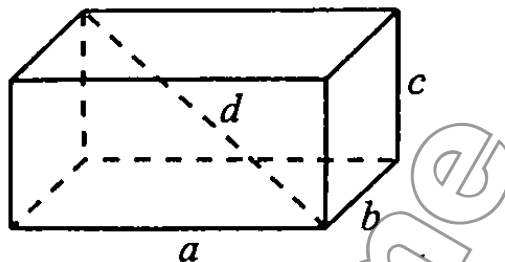


Рис. 405

Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда равна сумме площадей его шести граней: $S = 2(ab + bc + ac)$.

Диагональю прямоугольного параллелепипеда называют отрезок, соединяющий его противоположные вершины. Квадрат длины этого отрезка равен сумме квадратов трёх измерений параллелепипеда:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Если все три измерения прямоугольного параллелепипеда равны, то такой параллелепипед называется кубом (см. рис. 406).

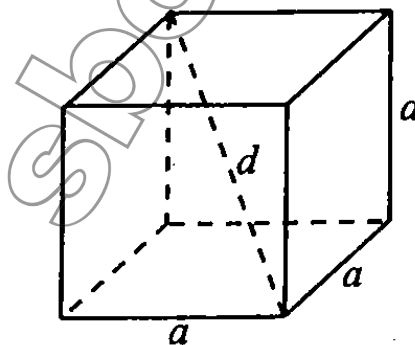


Рис. 406

Формулы объёма, площади поверхности и длины диагонали куба:

$$V = a^3, \quad S = 6a^2, \quad d = a\sqrt{3}.$$

941. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке 407 (все двугранные углы многогранника прямые).

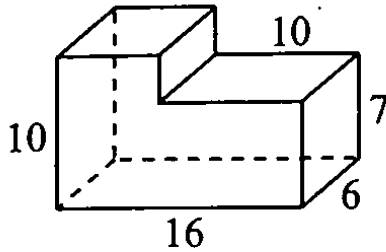


Рис. 407

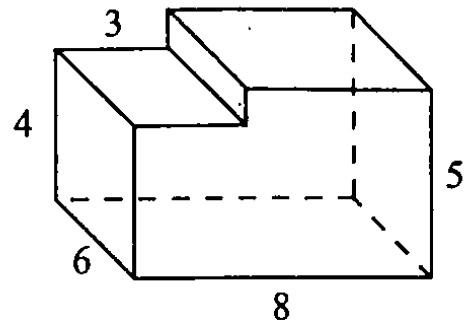


Рис. 408

942. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке 408 (все двугранные углы многогранника прямые).

943. В единичном кубе вырезали прямую призму, в основании которой квадрат со стороной 0,2. Боковое ребро призмы равно 1 (см. рис. 409). Найдите объём оставшейся части куба.

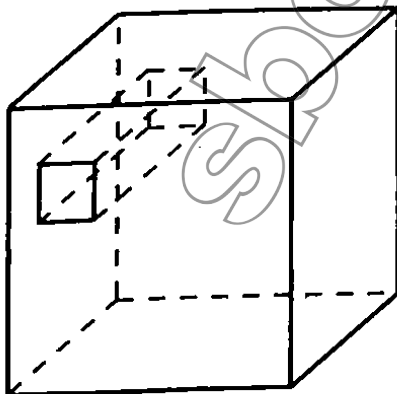


Рис. 409

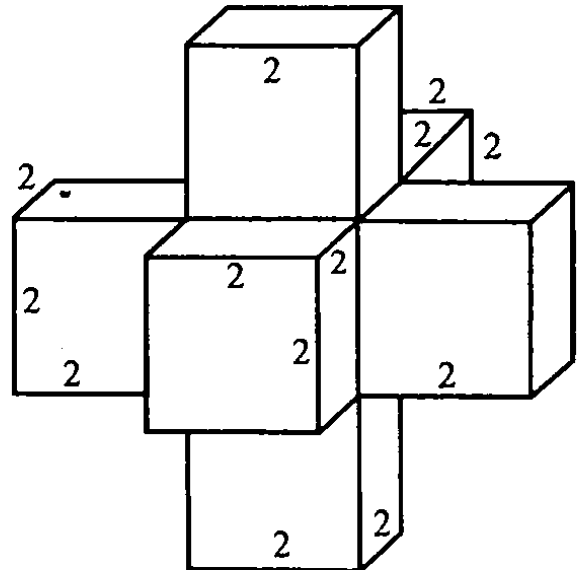


Рис. 410

944. Найдите объём пространственного креста, изображённого на рисунке 410, если все изображённые двугранные углы прямые.

945. Найдите квадрат расстояния между вершинами A и K_2 многогранника, изображённого на рисунке 411. Все двугранные углы многогранника прямые.

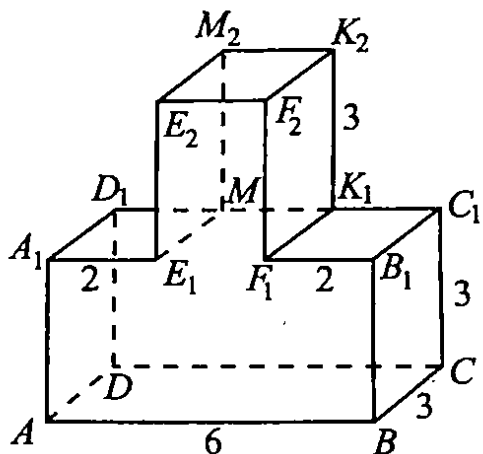


Рис. 411

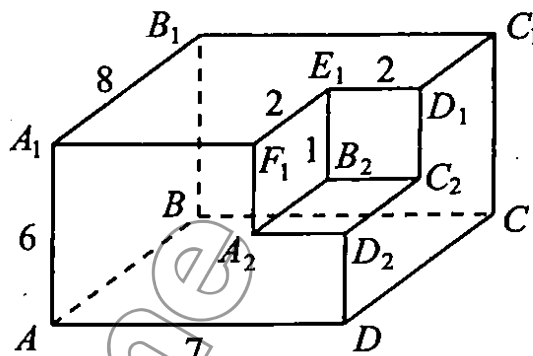


Рис. 412

946. Найдите квадрат расстояния между вершинами A_1 и C_2 многогранника, изображённого на рисунке 412.

947. Найдите квадрат расстояния между вершинами A и C_2 многогранника, изображённого на рисунке 413. Все двугранные углы многогранника прямые.

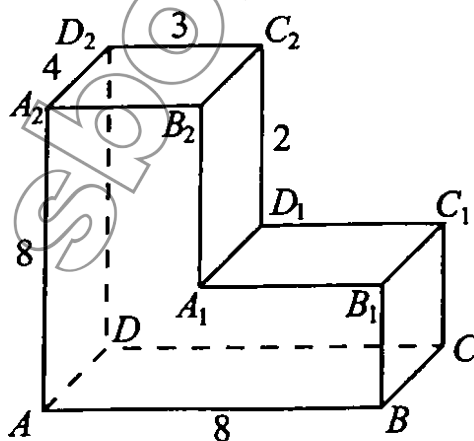


Рис. 413

948. Найдите квадрат расстояния между вершинами C_1 и A_2 многогранника, изображённого на рисунке 413. Все двугранные углы многогранника прямые.

949. Найдите тангенс угла F_2AB многогранника, изображённого на рисунке 414. Все двугранные углы многогранника прямые.

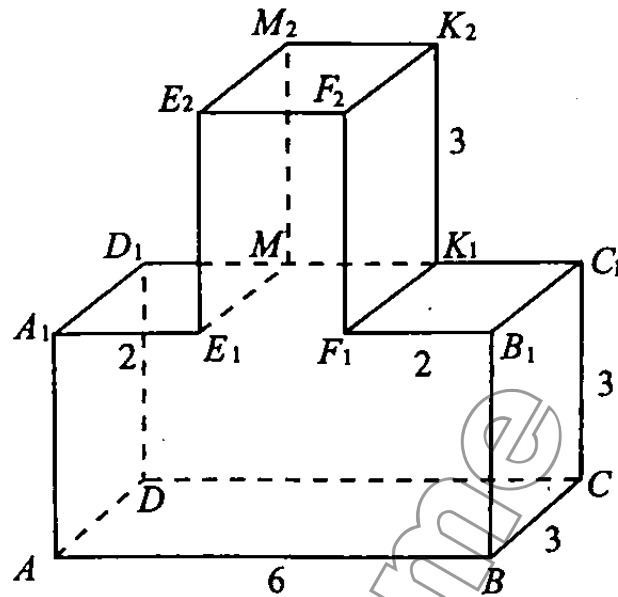


Рис. 414

950. Найдите тангенс угла CDC_3 многогранника, изображённого на рисунке 415. Все двугранные углы многогранника прямые.

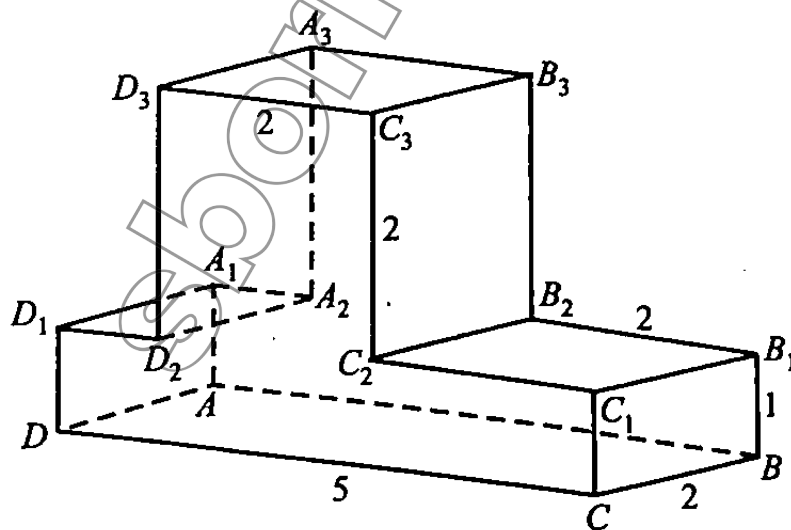


Рис. 415

951. Найдите угол AED_2 многогранника, изображённого на рисунке 416. Все двугранные углы многогранника прямые. Ответ дайте в градусах.

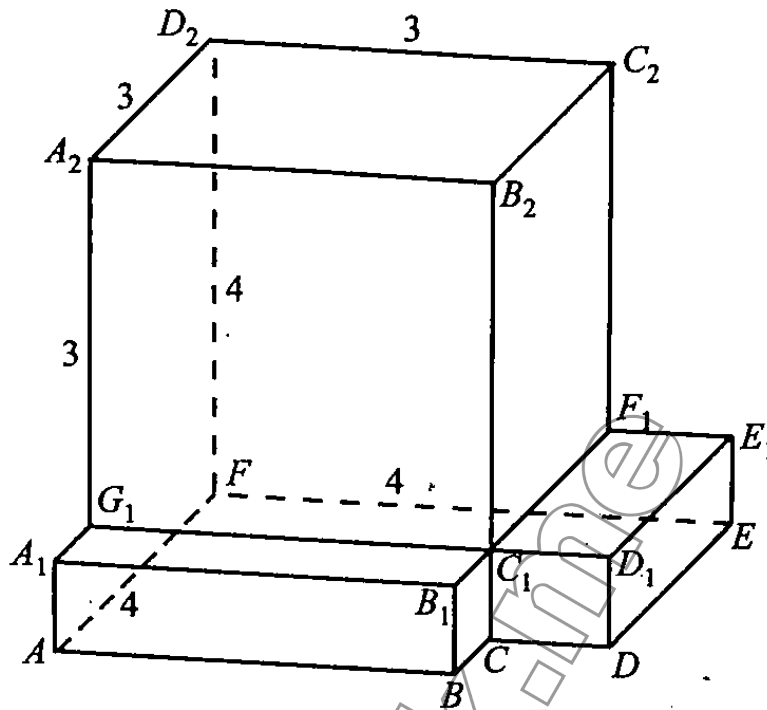


Рис. 416

952. Найдите угол $G_1B_2F_1$ многогранника, изображённого на рисунке 416. Все двугранные углы многогранника прямые. Ответ дайте в градусах.

953. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке 417 (все двугранные углы прямые).

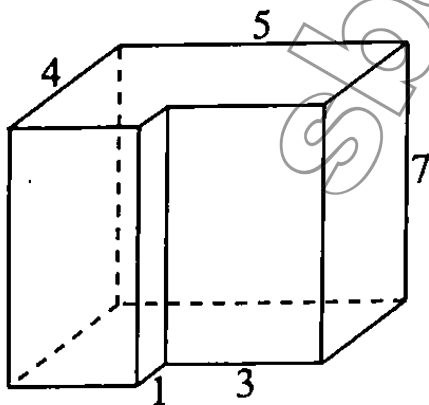


Рис. 417

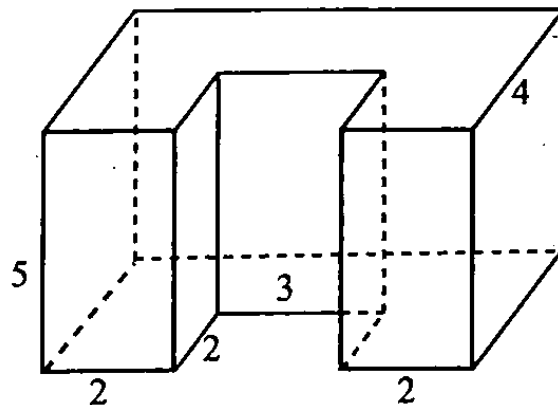


Рис. 418

954. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке 418 (все двугранные углы прямые).

955. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке 419 (все двугранные углы прямые).

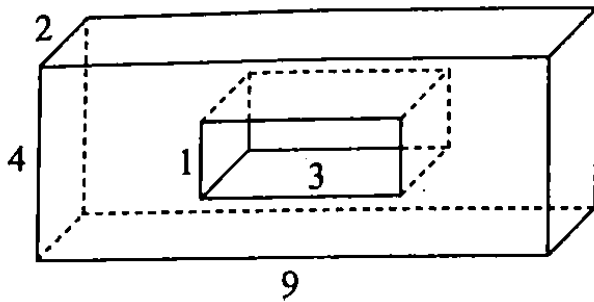


Рис. 419

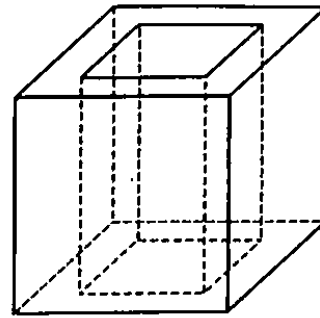


Рис. 420

956. Из куба со стороной $\sqrt{12}$ вырезана правильная четырёхугольная призма со стороной основания $\sqrt{3}$ и боковым ребром $\sqrt{12}$ (см. рис. 420). Найдите площадь поверхности оставшейся части куба.

957. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 и 5. Площадь поверхности этого параллелепипеда равна 62. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины (см. рис. 421).

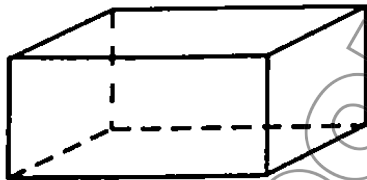


Рис. 421

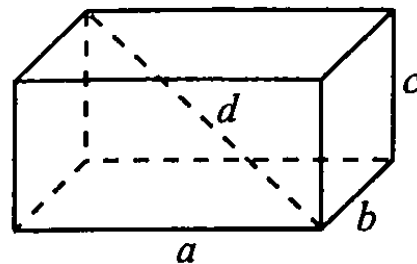


Рис. 422

958. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 15 и 42. Диагональ параллелепипеда равна 45. Найдите площадь поверхности параллелепипеда (см. рис. 422).

959. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 16 и 12. Диагональ параллелепипеда равна 25. Найдите объём параллелепипеда.

960. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 и 6. Объём этого параллелепипеда равен 36. Найдите диагональ параллелепипеда.

961. Объем куба равен $24\sqrt{3}$ (см. рис. 423). Найдите его диагональ.

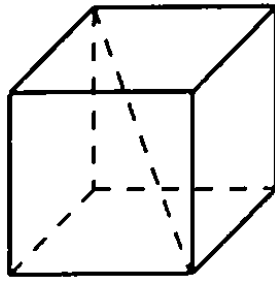


Рис. 423

962. Диагональ куба (см. рис. 423) равна $\sqrt{48}$. Найдите его объем.

963. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (см. рис. 424) найдите угол между прямыми DC_1 и $A_1 D$. Ответ дайте в градусах.

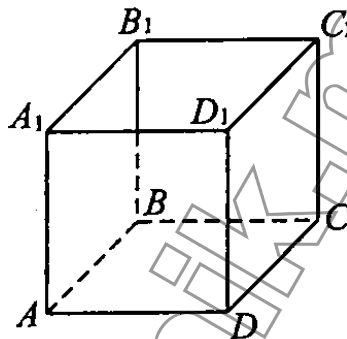


Рис. 424

964. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (см. рис. 424) найдите угол между прямыми $B_1 A$ и $B_1 C$. Ответ дайте в градусах.

965. Если каждое ребро куба увеличить на 1, то площадь его поверхности увеличится на 90 (см. рис. 425). Найдите ребро исходного куба.

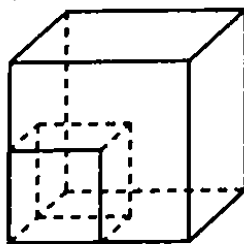


Рис. 425

966. Если каждое ребро куба увеличить на 4, то площадь его поверхности увеличится на 264 (см. рис. 425). Найдите ребро исходного куба.

967. Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 5, 8, 25. Найдите ребро куба, объём которого равен объёму этого параллелепипеда.

968. Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 3, 9, 8. Найдите ребро куба, объём которого равен объёму этого параллелепипеда.

21.2. Параллелепипед и призма

Объём параллелепипеда и призмы (см. рис. 426) может быть найден как произведение площади основания на высоту призмы:

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h.$$

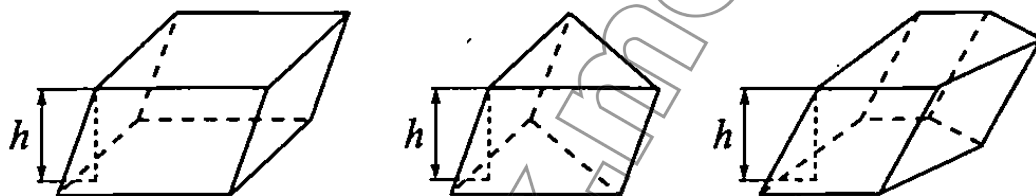


Рис. 426

Площадь всей поверхности призмы равна сумме площади боковой поверхности и удвоенной площади основания (так как площади обоих оснований одинаковы):

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}$$

В прямой призме боковые рёбра перпендикулярны плоскости основания, поэтому высота h такой призмы равна её боковому ребру (см. рис. 427).

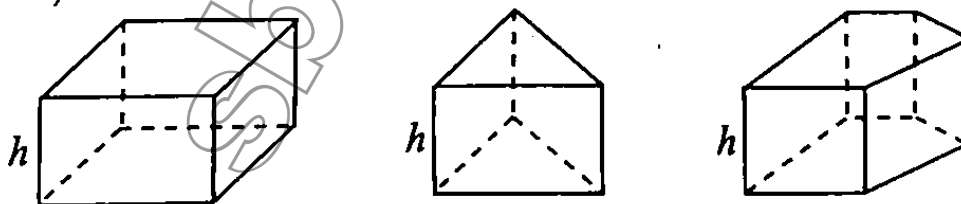


Рис. 427

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы, а формула объёма остаётся прежней:

$$S_{\text{бок.}} = P_{\text{осн.}} \cdot h, \quad V = S_{\text{осн.}} \cdot h.$$

Любая правильная призма является прямой, в основании правильной призмы лежит правильный многоугольник.

В правильной шестиугольной призме основание является правильным шестиугольником. Обозначив сторону этого шестиугольника через a , получаем следующие соотношения (см. рис. 428):

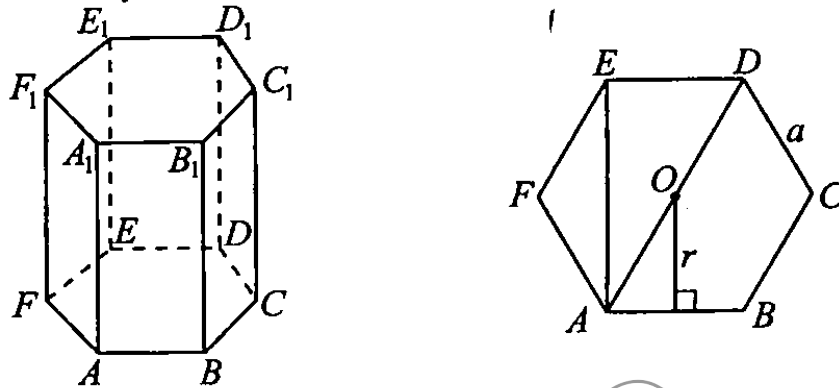


Рис. 428

$$S_{\text{основания}} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2},$$

$$AD = 2a, \quad AE = a\sqrt{3}, \quad \angle EAD = 30^\circ, \quad \angle EFA = 120^\circ,$$

$$\text{радиус описанной окружности } AO = a,$$

$$\text{радиус вписанной окружности } r = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

969. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 600 см^3 воды (см. рис. 429) и полностью погрузили в неё деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 12 см до отметки 16 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см^3 .

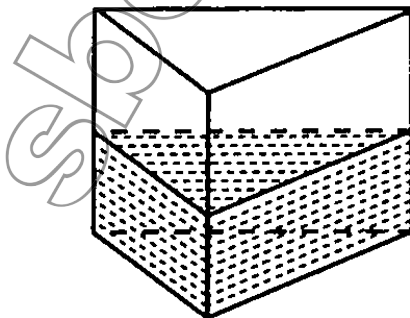


Рис. 429

970. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 900 см^3 воды (см. рис. 429) и полностью погрузили в неё деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 18 см до отметки 23 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см^3 .

971. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду (см. рис. 430). Уровень воды достигает 18 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если её перелить в другой такой же по форме сосуд, у которого сторона основания в 3 раза больше, чем у первого? Ответ выразите в см.

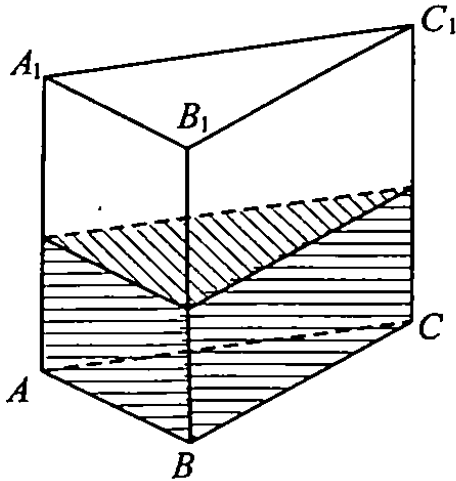


Рис. 430

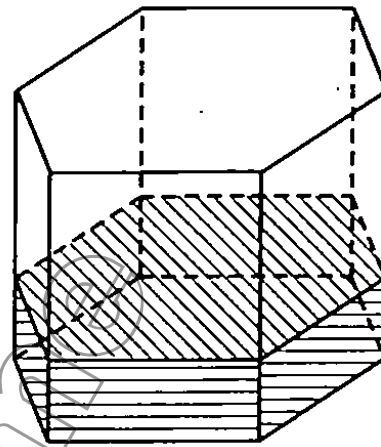


Рис. 431

972. Сосуд в форме шестиугольной призмы наполнен жидкостью до отметки 24 см (см. рис. 431). Найдите, на какой высоте будет уровень этой же жидкости, если её перелить в другой сосуд такой же формы, но со стороной основания вдвое меньшей, чем сторона первого сосуда. Ответ дайте в сантиметрах.

973. Через среднюю линию основания треугольной призмы, объём которой равен 48, проведена плоскость, параллельная боковому ребру (см. рис. 432). Найдите объём отсечённой треугольной призмы.

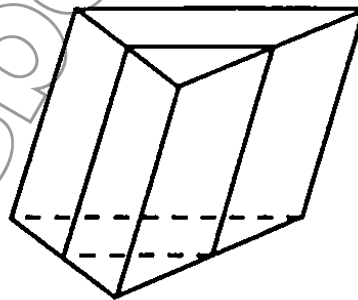


Рис. 432

974. Через среднюю линию основания заданной треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру (см. рис. 432). Объём отсечённой треугольной призмы равен 16. Найдите объём заданной призмы.

975. Объем куба равен 180. Найдите объем треугольной призмы, отсекаемой от него плоскостью, проходящей через середины двух ребер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины (см. рис. 433).

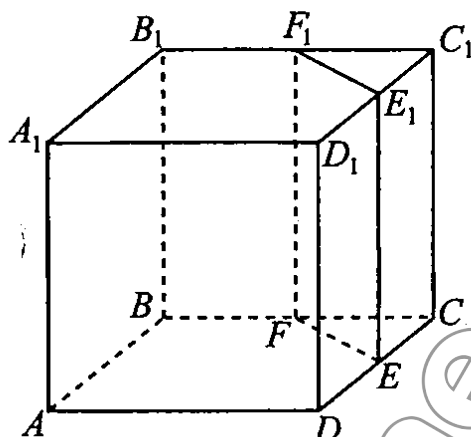


Рис. 433

976. Объем треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух ребер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 12,5 (см. рис. 433). Найдите объем куба.

977. Основанием прямой треугольной призмы (см. рис. 434) служит прямоугольный треугольник с катетами 5 и 12. Площадь её поверхности равна 180. Найдите высоту призмы.

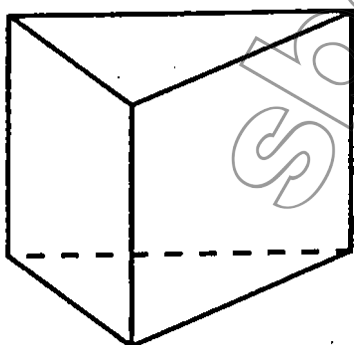


Рис. 434

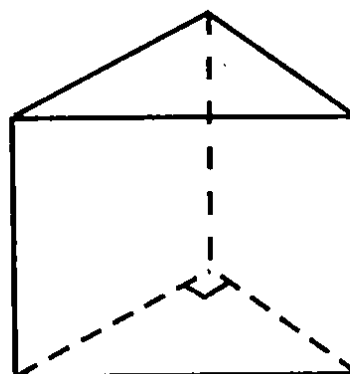


Рис. 435

978. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 9 и 12. Площадь её поверхности равна 468. Найдите высоту призмы (см. рис. 435).

979. В основании прямой призмы лежит ромб с диагоналями, равными 96 и 28 (см. рис. 436). Площадь её боковой поверхности равна 600. Найдите боковое ребро этой призмы.

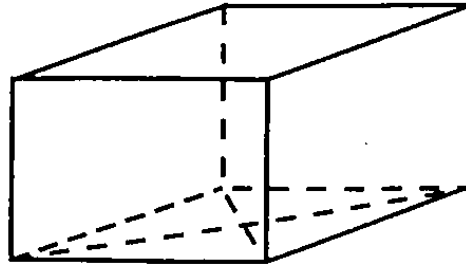


Рис. 436

980. В основании прямой призмы лежит ромб с диагоналями, равными 24 и 18 (см. рис. 436). Площадь её боковой поверхности равна 270. Найдите боковое ребро этой призмы.

981. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ стороны оснований равны 1, боковые рёбра равны 3 (см. рис. 437). Найдите угол $CE_1 E$. Ответ дайте в градусах.

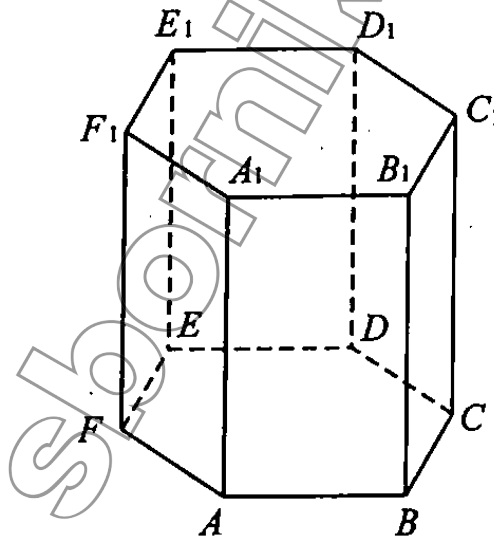


Рис. 437

982. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 1 (см. рис. 437). Найдите угол EAE_1 . Ответ дайте в градусах.

983. Найдите объём призмы, в основаниях которой лежит квадрат со стороной 2,5, а боковые рёбра равны $8\sqrt{3}$ и наклонены к плоскости основания под углом 60° .

984. Найдите объём призмы, в основаниях которой лежит квадрат со стороной 1,5, а боковые рёбра равны 12 и наклонены к плоскости основания под углом 30° .

21.3. Тетраэдр и пирамида

Объём тетраэдра и пирамиды (см. рис. 438) можно найти по формуле

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} h.$$

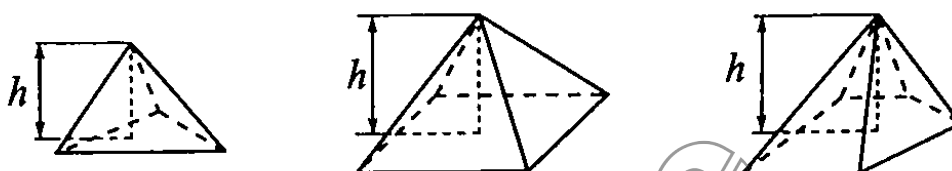


Рис. 438

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания и апофемы (высоты боковой грани, проведённой из вершины пирамиды, см. рис. 439):

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн.}} l.$$



Рис. 439

Высота правильной пирамиды проектируется в центр её основания. Углом между ребром и плоскостью основания называют угол между этим ребром и его проекцией на плоскость основания. На рисунке 440 $SABC$ — правильная пирамида, SO — высота. Тогда O — центр основания ABC . Угол между ребром AS и плоскостью основания $\alpha = \angle SAO$.

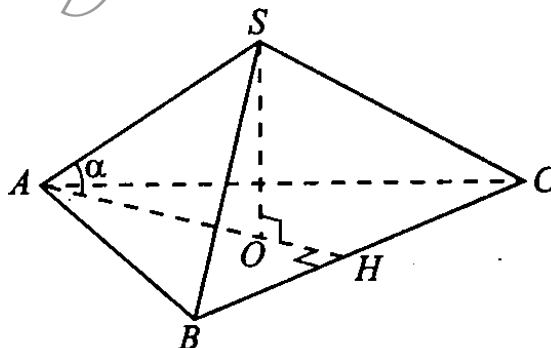


Рис. 440

Углом между боковой гранью и плоскостью основания называют угол между апофемой боковой грани и проекцией этой апофемы на плоскость основания. На рисунке 441 $ABCS$ — правильная пирамида, SH — апофема, $\beta = \angle AHS$ — угол между гранью BCS и плоскостью основания ABC .

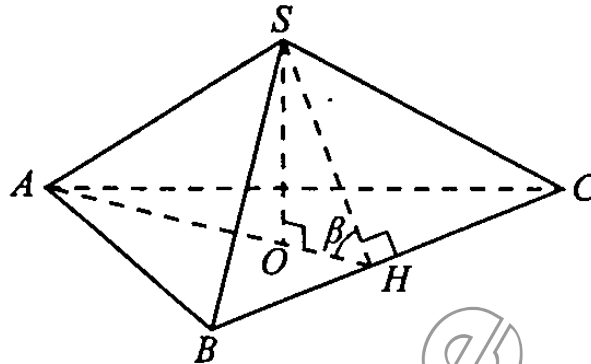


Рис. 441

985. Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды (см. рис. 442) равны 16, боковые рёбра равны 17. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

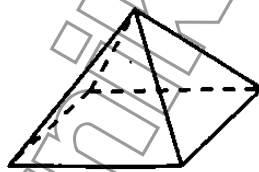


Рис. 442

986. Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды (см. рис. 442) равны 20, боковые рёбра равны 26. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

987. Сечение площадью 2,25 проходит через середины четырёх рёбер правильного тетраэдра (см. рис. 443). Найдите площадь S полной поверхности тетраэдра. В ответе укажите $2\sqrt{3}S$.

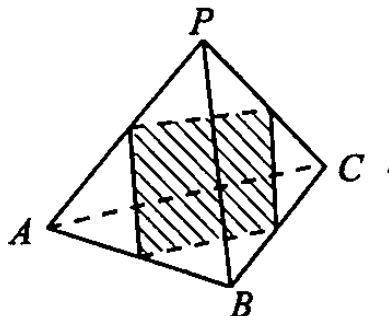


Рис. 443

988. Сечение площадью 2,5 проходит через середины четырёх рёбер правильного тетраэдра (см. рис. 443 на с. 332). Найдите площадь S полной поверхности тетраэдра. В ответе укажите $5\sqrt{3}S$.

989. Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° (см. рис. 444). Высота пирамиды равна 12. Найдите объём пирамиды.

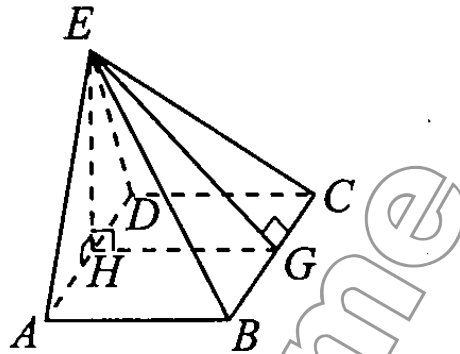


Рис. 444

990. Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие наклонены к плоскости основания под углом 30° . Высота пирамиды равна 5. Найдите объём пирамиды.

991. Три боковых ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, их длины равны 3, 7 и 5. Найдите объём пирамиды.

992. Три боковых ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, их длины равны 3, 8 и 6. Найдите объём пирамиды.

993. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды (см. рис. 445) равна 4, боковое ребро равно 8. Найдите объём пирамиды.

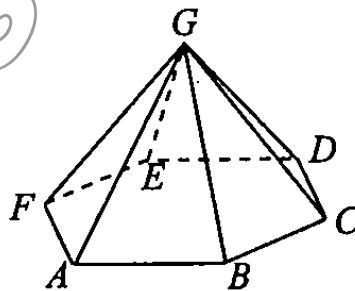


Рис. 445

994. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды (см. рис. 445) равна 5, боковое ребро равно 10. Найдите объём пирамиды.

995. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 24, а угол между боковой гранью и основанием равен 45° (см. рис. 446). Найдите объём пирамиды.

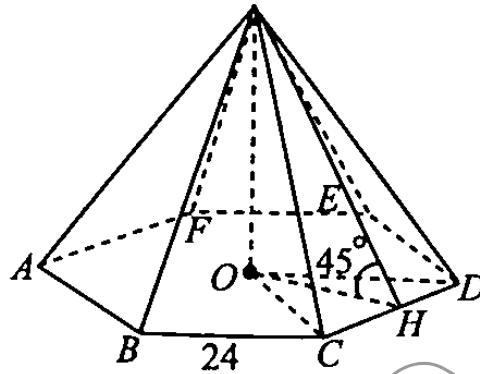


Рис. 446

996. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 16, а угол между боковой гранью и основанием равен 45° (см. рис. 446). Найдите объём пирамиды.

997. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, E, F, A_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ (см. рис. 447), площадь основания которой равна 4, а боковое ребро равно 3.

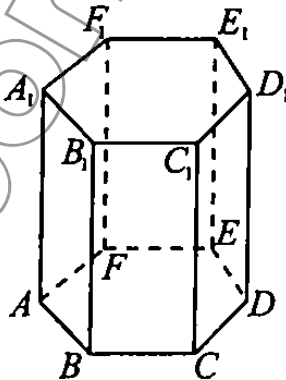


Рис. 447

998. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, A_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ (см. рис. 447), площадь основания которой равна 12, а боковое ребро равно 9.

999. Найдите объём пирамиды, изображённой на рисунке 448. Её основанием является многоугольник, соседние стороны которого перпендикулярны, а одно из боковых рёбер перпендикулярно плоскости основания и равно 4.

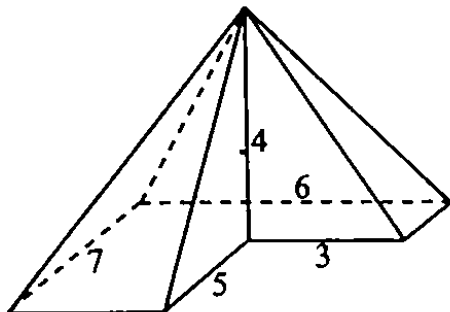


Рис. 448

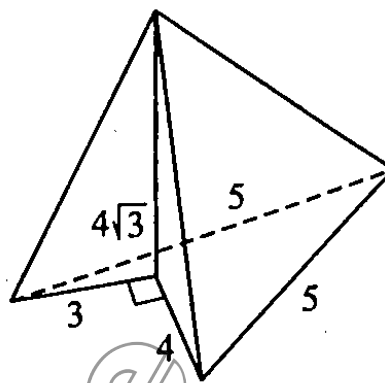


Рис. 449

1000. Найдите объём V пирамиды, изображённой на рисунке 449. Её основанием является многоугольник со сторонами 3, 4, 5 и 5. Стороны основания длиной 3 и 4 перпендикулярны, а боковое ребро, проходящее через их точку пересечения, перпендикулярно основанию и равно $4\sqrt{3}$. В ответе укажите $V + 8\sqrt{3}$.

Задания для контроля

Вариант 1

1. Найдите площадь боковой поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 10 и 24, а её боковое ребро равно 20 (см. рис. 450).

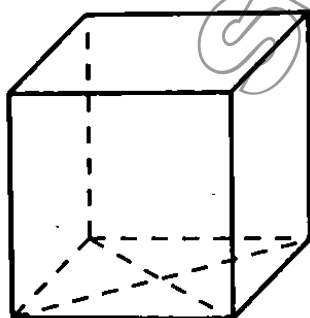


Рис. 450

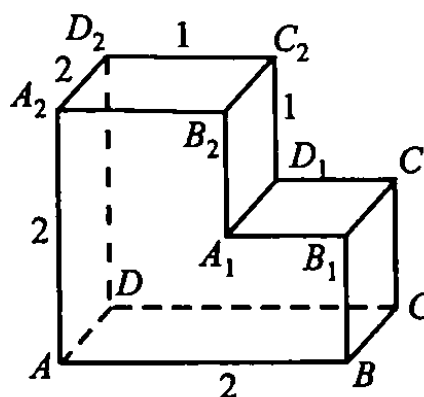


Рис. 451

2. Найдите угол CAD_2 многогранника, изображённого на рисунке 451. Все двугранные углы многогранника прямые. Ответ дайте в градусах.

3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 1. Найдите тангенс угла $CF_1 F$.
4. Объём куба равен $3\sqrt{3}$. Найдите его диагональ (см. рис. 452).

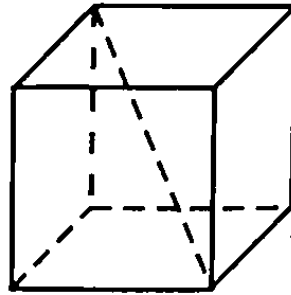


Рис. 452

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер $AB = 7$, $AD = 24$, $AA_1 = 15$. Найдите синус угла между прямыми CA и $D_1 C_1$.

Вариант 2

1. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (см. рис. 453). Объём треугольной пирамиды $A_1 B C_1 D$ равен 3. Чему равен объём куба?

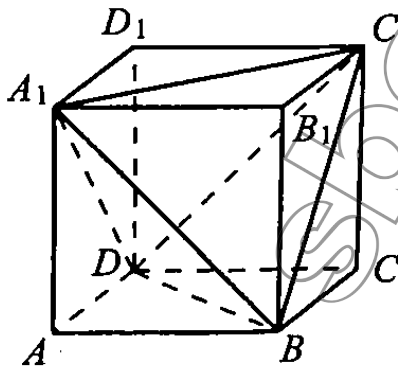


Рис. 453

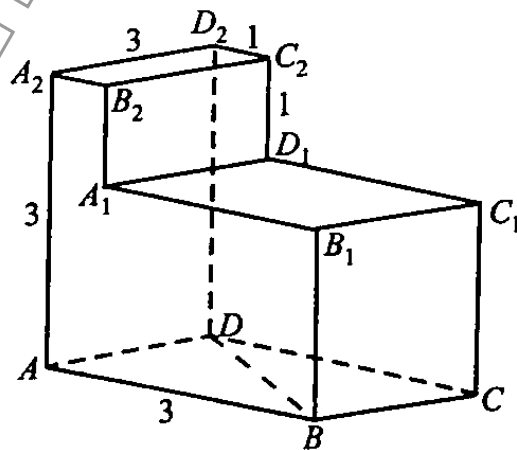


Рис. 454

2. Найдите угол ADB многогранника, изображённого на рисунке 454. Все двугранные углы многогранника прямые. Ответ дайте в градусах.
3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 1. Найдите угол $C_1 B_1 F_1$. Ответ дайте в градусах.

4. Найдите квадрат расстояния между вершинами D и B_3 многогранника, изображенного на рисунке 455. Все двугранные углы многогранника прямые.

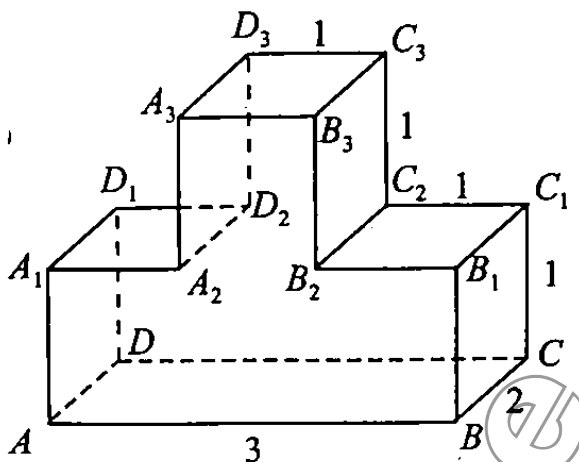


Рис. 455

5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 2, найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1 . Ответ дайте в градусах.

Вариант 3

1. Диагональ грани куба равна $3\sqrt{2}$ (см. рис. 456). Найдите объём куба.

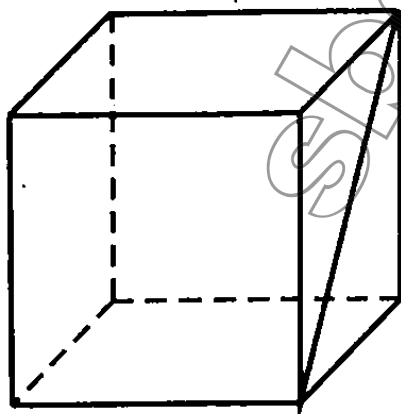


Рис. 456

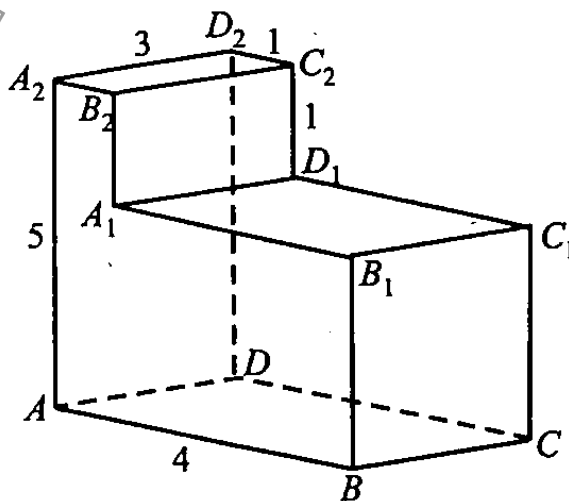


Рис. 457

2. Найдите угол AA_2C многогранника, изображенного на рисунке 457. Все двугранные углы многогранника прямые. Ответ дайте в градусах.

3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 1. Найдите угол $BD_1 D$. Ответ дайте в градусах.
4. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 3 и 4. Площадь поверхности параллелепипеда равна 192. Найдите его диагональ (см. рис. 458).

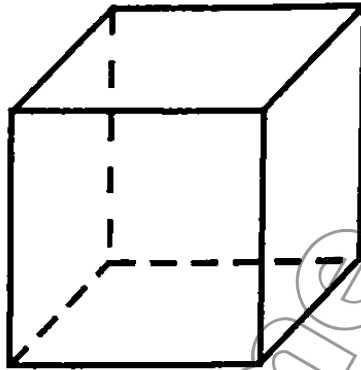


Рис. 458

5. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 5 и 8. Её объём равен 120. Найдите высоту этой пирамиды.

Вариант 4

1. Боковые рёбра правильной четырёхугольной пирамиды равны 5, сторона основания равна 6 (см. рис. 459). Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

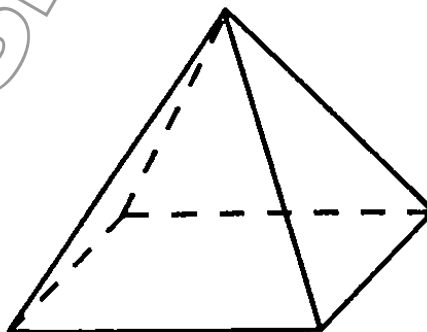


Рис. 459

2. Найдите тангенс угла ABA_1 многогранника, изображённого на рисунке 460. Все двугранные углы многогранника прямые.

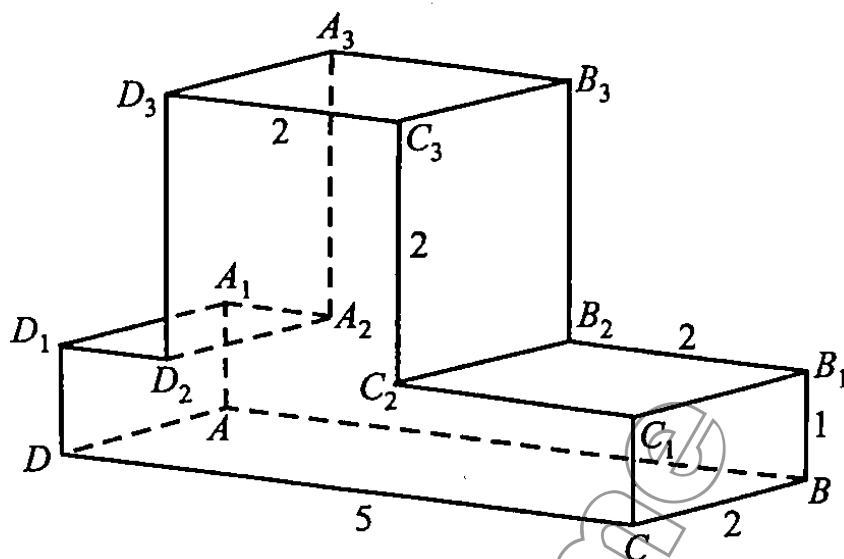


Рис. 460

3. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между прямыми DC_1 и $B_1 C_1$. Ответ дайте в градусах.

4. Найдите квадрат расстояния между вершинами A и C_2 многогранника, изображённого на рисунке 461. Все двугранные углы многогранника прямые.

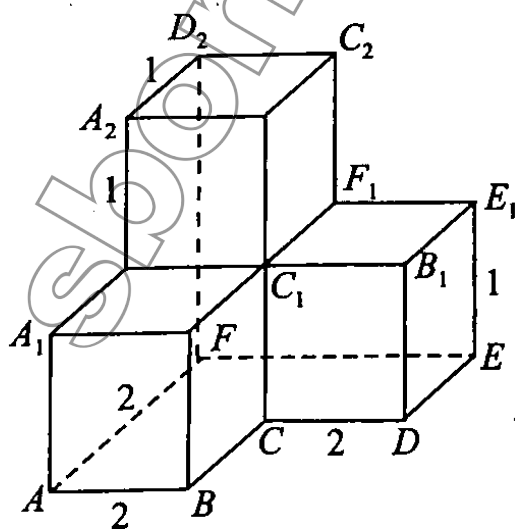


Рис. 461

5. В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна 5, объём равен 480. Найдите боковое ребро этой пирамиды.

§ 22. Цилиндр, конус, шар, комбинации тел

22.1. Цилиндр

Для объёма и площади боковой поверхности цилиндра (см. рис. 462) справедливы те же формулы, что и для призмы:

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h, \quad S_{\text{бок.}} = P_{\text{осн.}} \cdot h.$$

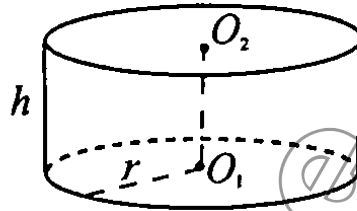


Рис. 462

Если радиус основания равен r , то площадь основания цилиндра равна πr^2 , а периметр — длина окружности, равная $2\pi r$. Тогда формулы объёма цилиндра, площадей боковой и полной поверхностей цилиндра имеют вид

$$V = \pi r^2 h, \quad S_{\text{бок.}} = 2\pi r h, \quad S_{\text{полн.}} = 2\pi r(h + r).$$

1001. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 45 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 3 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.

1002. Сосуд в форме цилиндра заполнен водой до отметки 36 см. Найдите, на какой высоте будет находиться уровень воды, если её перелить в другой сосуд в форме цилиндра, радиус основания которого в 3 раза меньше радиуса основания первого цилиндра. Ответ дайте в сантиметрах.

1003. В цилиндрический сосуд налили 3000 см^3 воды. Уровень жидкости оказался равным 12 см (см. рис. 463). В воду полностью погрузили деталь, при этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 4 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см^3 .

1004. В цилиндрический сосуд налили 2500 см^3 воды. Уровень жидкости оказался равным 8 см (см. рис. 463). В воду полностью погрузили деталь, при этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 5 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см^3 .

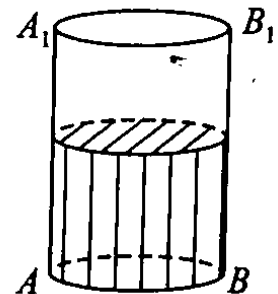


Рис. 463

1005. Площадь осевого сечения цилиндра равна $\frac{6}{\pi}$ (см. рис. 464). Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

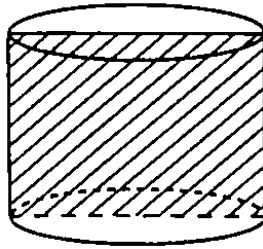


Рис. 464

1006. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 8π (см. рис. 464). Найдите площадь осевого сечения этого цилиндра.

1007. Длина окружности основания цилиндра равна 2. Площадь боковой поверхности равна 14. Найдите высоту цилиндра.

1008. Высота цилиндра равна 2. Площадь боковой поверхности равна 18. Найдите длину окружности основания цилиндра.

22.2. Конус

Объем конуса (см. рис. 465) может быть вычислен по той же формуле, что и объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} h.$$

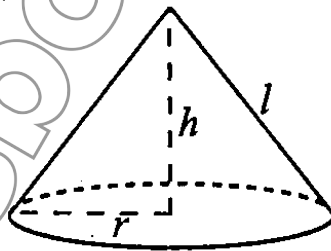


Рис. 465

Если радиус основания конуса равен r , а высота — h , то $S_{\text{осн.}} = \pi r^2$, и объем можно найти по формуле

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Площади боковой и полной поверхностей конуса вычисляются следующим образом (l — образующая):

$$S_{\text{бок.}} = \pi r l, \quad S_{\text{полн.}} = \pi r (r + l).$$

1009. Найдите объём V конуса, образующая которого равна 10 и наклонена к плоскости основания под углом 30° . В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

1010. Найдите объём V конуса, образующая которого равна 12 и наклонена к плоскости основания под углом 60° . В ответе укажите $\frac{V}{\sqrt{3}\pi}$.

1011. Во сколько раз уменьшится объём конуса (см. рис. 466), если диаметр его основания уменьшить в 2,5 раза?

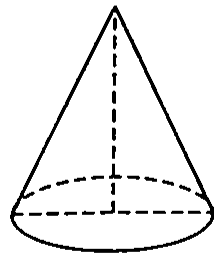


Рис. 466

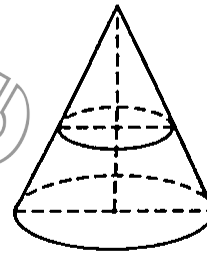


Рис. 467

1012. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Объём меньшего конуса равен 15 (см. рис. 467). Определите объём исходного конуса.

1013. Найдите объём V части конуса, изображённой на рисунке 468. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

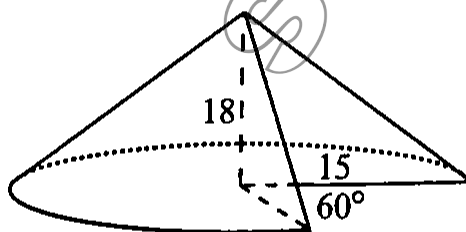


Рис. 468

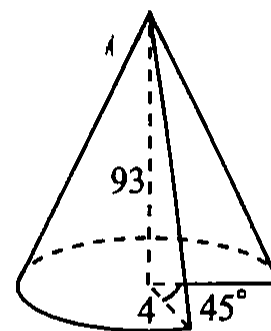


Рис. 469

1014. Радиус основания конуса равен 4, высота — 93. Найдите объём V части этого конуса, изображённой на рисунке 469. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

1015. Диаметр основания конуса равен 12, а угол при вершине осевого сечения — 90° (см. рис. 470). Вычислите объём конуса, делённый на π .

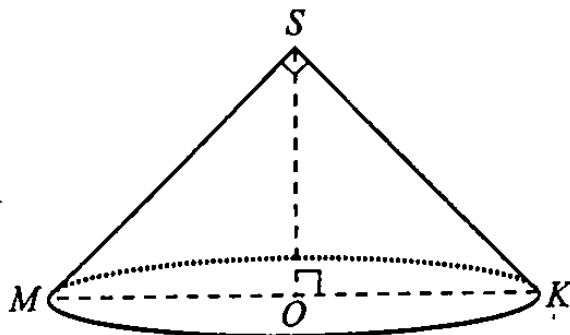


Рис. 470

1016. Диаметр основания конуса равен 18, а образующая наклонена к основанию под углом 45° (см. рис. 470). Вычислите объём конуса, делённый на π .

1017. Длина окружности основания конуса равна 4, образующая равна 5. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

1018. Длина окружности основания конуса равна 9. Площадь боковой поверхности конуса равна 18. Найдите образующую конуса.

1019. Площадь полной поверхности конуса равна 90π , а радиус основания равен 5. Найдите высоту конуса.

1020. Площадь полной поверхности конуса равна 324π , а радиус основания равен 12. Найдите высоту конуса.

22.3. Шар

Объём шара и площадь его поверхности (см. рис. 471) вычисляются по формулам:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad S = 4\pi r^2.$$

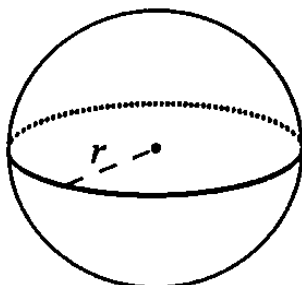


Рис. 471

1021. Объём шара равен $36\,000\pi$. Найдите площадь его поверхности, делённую на π .

1022. Площадь поверхности шара равна 900π . Найдите его объём, делённый на π .

1023. Объём одного шара в 64 раза больше объёма второго (см. рис. 472). Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?

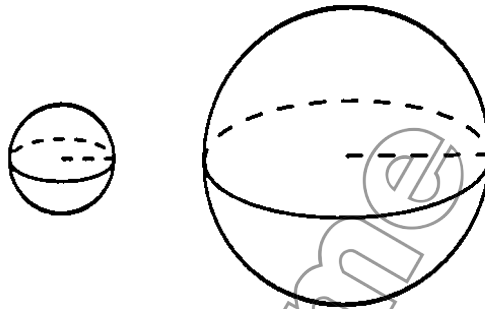


Рис. 472

1024. Площадь поверхности первого шара в 4 раза меньше площади поверхности второго шара (см. рис. 473). Во сколько раз объём первого шара меньше объёма второго?



Рис. 473

1025. Площадь большого круга шара равна 10 (см. рис. 474). Найдите площадь поверхности шара.

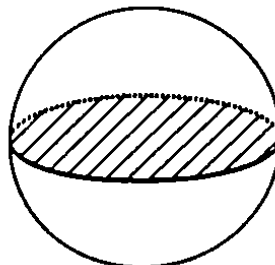


Рис. 474

1026. Площадь поверхности шара равна 76π (см. рис. 475). Найдите площадь большого круга этого шара.

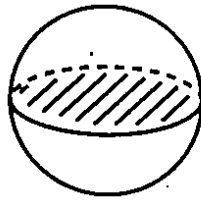


Рис. 475

1027. Радиусы двух шаров равны 9 и 40. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей обоих шаров.

1028. Сумма площадей поверхностей двух шаров равна 1600π . Радиус одного шара равен 16. Найдите радиус второго шара.

22.4. Изменение размеров геометрических тел

Рассмотрим куб, все рёбра которого равны a . Его объём $V = a^3$. Увеличим все рёбра этого куба в k раз. Получим куб, объём которого $V_1 = (ka)^3 = k^3 a^3 = k^3 V$. Таким образом, при увеличении всех рёбер в k раз объём куба увеличивается в k^3 раз.

Также убеждаемся, что при увеличении радиуса шара в k раз объём шара увеличился в k^3 раз. Аналогично, зная формулы объёмов и площадей поверхностей геометрических тел, можно установить, как изменяются их объёмы и площади поверхностей при изменении их размеров.

1029. Во сколько раз увеличится объём куба, если все его рёбра увеличить в 4 раза?

1030. Во сколько раз уменьшится объём прямоугольного параллелепипеда, если все его измерения (длину, ширину и высоту) уменьшить в 2 раза?

1031. Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если все его рёбра увеличить в 3 раза?

1032. Во сколько раз уменьшится площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, если все его измерения (длину, ширину и высоту) уменьшить в 4 раза?

1033. Во сколько раз увеличится объём конуса, если радиус его основания увеличить в 2,5 раза, а высоту оставить прежней?

1034. Во сколько раз уменьшится объём цилиндра, если радиус его основания уменьшить в 1,5 раза, а высоту оставить прежней?

1035. Объём первого конуса равен 30 м^3 . У второго конуса радиус основания в 2 раза больше радиуса первого конуса, а высота второго конуса в 3 раза меньше высоты первого. Найдите объём второго конуса. Ответ укажите в м^3 .

1036. Объём первого цилиндра равен 24 м^3 . У второго цилиндра высота в два раза больше, а радиус основания в 2 раза меньше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра. Ответ дайте в кубических метрах.

1037. Во сколько раз увеличится площадь поверхности правильного тетраэдра, если все его рёбра увеличить в три раза?

1038. Во сколько раз увеличится площадь поверхности октаэдра (см. рис. 476), если каждое его ребро увеличить в 7,1 раза?

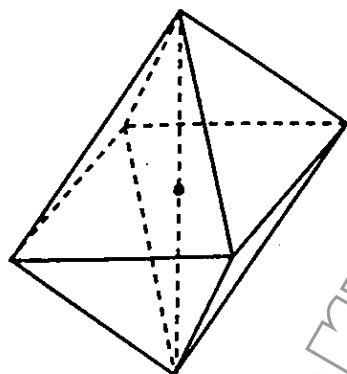


Рис. 476

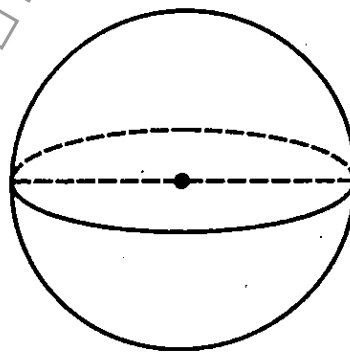


Рис. 477

1039. Во сколько раз увеличится объём шара (см. рис. 477), если площадь его поверхности увеличится в 9 раз?

1040. Во сколько раз увеличится объём куба (см. рис. 478), если площадь его поверхности увеличится в 16 раз?

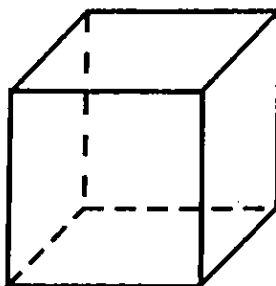


Рис. 478

22.5. Комбинации тел

1041. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту (см. рис. 479). Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 16.

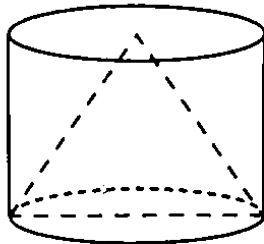


Рис. 479

1042. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объём цилиндра (см. рис. 479), если объём конуса равен 5,5.

1043. Конус описан около правильной четырёхугольной пирамиды со стороной основания 6 и высотой $\frac{9}{\pi}$. Найдите его объём.

1044. Конус описан около правильной четырёхугольной пирамиды со стороной основания 8 и высотой $\frac{12}{\pi}$. Найдите его объём.

1045. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра (см. рис. 480), радиус основания которого равен 5. Объём параллелепипеда равен 600. Найдите высоту цилиндра.

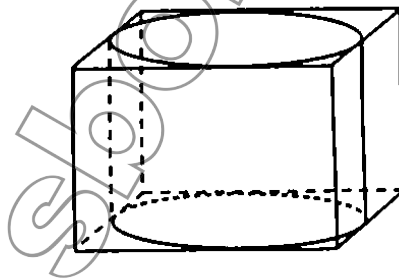


Рис. 480

1046. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра (см. рис. 480), радиус основания которого равен 8. Объём параллелепипеда равен 960. Найдите высоту цилиндра.

1047. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиусом 20. Найдите его объём.

1048. Цилиндр описан около шара. Объём шара равен 18. Найдите объём цилиндра.

1049. Объём куба равен 30 (см. рис. 481). Найдите объём четырёхугольной пирамиды, основанием которой является грань куба, а вершиной — центр куба.

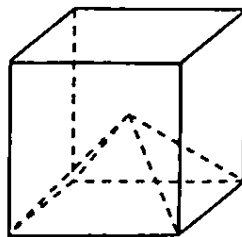


Рис. 481

1050. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C_1, D прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 15, AD = 5, AA_1 = 1$.

1051. Конус вписан в шар (см. рис. 482). Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём конуса равен 15. Найдите объём шара.

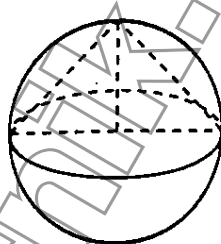


Рис. 482

1052. Конус объёмом 5,3 вписан в шар (см. рис. 482). Радиус основания конуса равен радиусу шара. Найдите объём шара.

1053. Объём правильной шестиугольной пирамиды $GABCDEF$ равен 60 (см. рис. 483). Найдите объём треугольной пирамиды $GABC$.

1054. Объём правильной шестиугольной пирамиды $GABCDEF$ равен 90 (см. рис. 483). Найдите объём четырёхугольной пирамиды $GAFDC$.

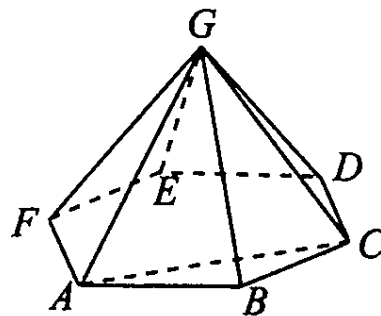


Рис. 483

1055. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 7 и $4\sqrt{2}$. Боковые рёбра равны $\frac{4}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.

1056. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 7 и $6\sqrt{2}$. Боковые рёбра равны $\frac{8}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.

Задания для контроля

Вариант 1

1. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 8π , высота равна 2 (см. рис. 484). Найдите диаметр основания цилиндра.

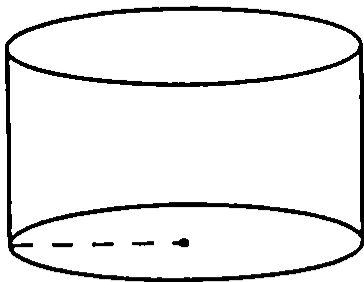


Рис. 484

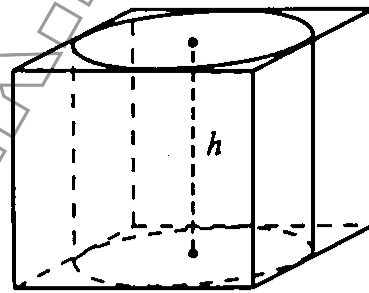


Рис. 485

2. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, высота которого равна 16 (см. рис. 485). Объём параллелепипеда равен 64. Найдите радиус цилиндра.

3. В конус, осевым сечением которого является равносторонний треугольник, вписан шар. Найдите объём конуса, если объём шара равен 8.

4. Во сколько раз уменьшится площадь поверхности шара, если радиус шара уменьшится в 3 раза?

5. Сосуд в виде правильной треугольной пирамиды высотой $25\sqrt{3}$ см доверху заполнен водой. Найдите, на какой высоте будет находиться уровень воды, если её перелить в другой сосуд, имеющий форму куба со стороной, равной стороне основания данной треугольной пирамиды. Ответ выразите в сантиметрах.

Вариант 2

1. Найдите площадь поверхности сферы, если площадь боковой поверхности вписанного в сферу конуса с основанием, совпадающим с сечением сферы, проходящим через её центр (см. рис. 486), равна $6\sqrt{2}$.

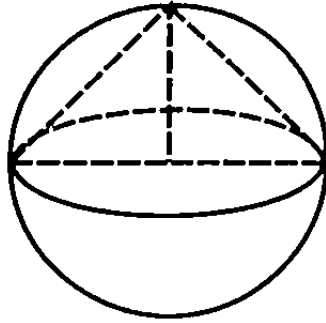


Рис. 486

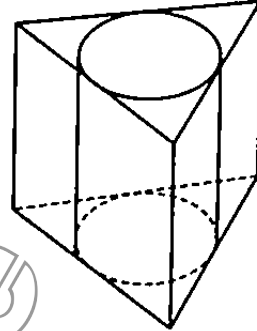


Рис. 487

2. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, описанной около цилиндра (см. рис. 487), радиус основания которого равен 5, а высота равна $2\sqrt{3}$.

3. Во сколько раз увеличится площадь поверхности шара (см. рис. 488), если его объём увеличился в 27 раз?

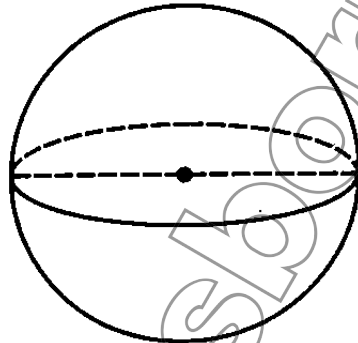


Рис. 488

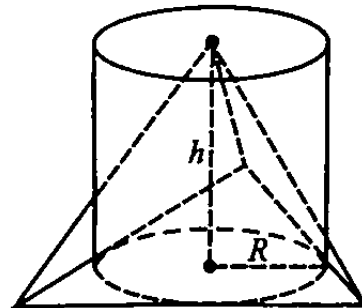


Рис. 489

4. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны $\sqrt[3]{2}$. Найдите объём параллелепипеда.

5. В основании пирамиды лежит правильный треугольник (см. рис. 489). В него вписана окружность, являющаяся основанием цилиндра той же высоты, что и пирамида. Найдите объём пирамиды, если объём цилиндра равен $\pi\sqrt{3}$.

Вариант 3

1. В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция с углом при основании 60° и боковой стороной 6, при этом одно из оснований проходит через центр окружности. Найдите объём конуса, описанного около пирамиды (см. рис. 490), если высота пирамиды равна 10. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

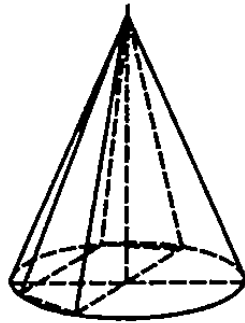


Рис. 490

2. Объём первой пирамиды равен 24 м^3 . У второй пирамиды площадь основания в 6 раз больше, чем площадь основания первой пирамиды, а высота второй пирамиды в три раза меньше, чем высота первой. Найдите объём второй пирамиды. Ответ дайте в кубических метрах.

3. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной $\sqrt{6}$. Боковые рёбра равны $\frac{4}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.

4. В конус вписан цилиндр (см. рис. 491), высота которого в три раза меньше высоты конуса. Во сколько раз объём конуса больше объёма цилиндра?

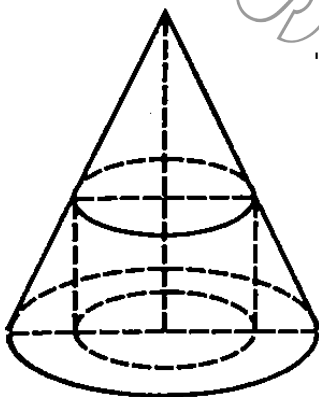


Рис. 491

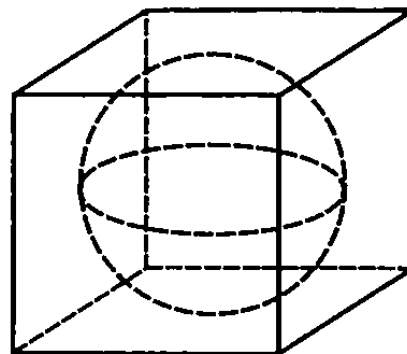


Рис. 492

5. Найдите площадь поверхности сферы, вписанной в куб (см. рис. 492 на с 351), если ребро куба равно $\frac{5}{\sqrt{\pi}}$.

Вариант 4

1. Если каждое ребро куба увеличить на 2 (см. рис. 493), то площадь его поверхности увеличится на 192. Найдите ребро куба.

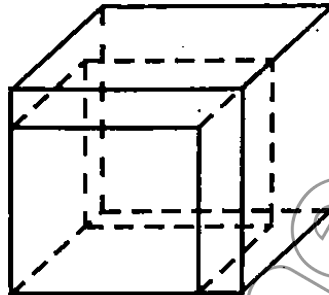


Рис. 493

2. Диаметр основания конуса равен 18, а длина образующей — 15. Найдите высоту конуса.
3. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 35π , а высота — 7. Найдите диаметр основания.
4. Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна $5\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы.
5. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 8 и 5 (см. рис. 494). Боковые рёбра равны $\frac{4}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.

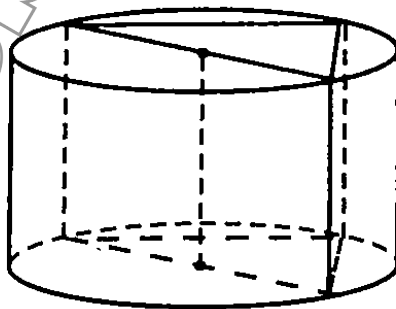


Рис. 494

Глава II. Задания повышенного и высокого уровней сложности

§ 23. Тригонометрические уравнения и отбор корней

Для успешного решения заданий по тригонометрии необходимо знать:

- изображение чисел на единичной окружности;
- связь между числовыми и градусными величинами;
- понятия синуса, косинуса, тангенса и котангенса;
- понятия арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса;
- значения тригонометрических функций от чисел $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ и соответствующих им углов;
- знаки тригонометрических функций в разных четвертях и формулы приведения;
- основные тригонометрические тождества;
- формулы корней простейших тригонометрических уравнений;
- формулы синуса, косинуса и тангенса суммы и разности двух аргументов;
- формулы суммы и разности синусов, косинусов и тангенсов;
- свойства и графики основных тригонометрических функций.

При решении тригонометрических уравнений используются хорошо известные методы — замены переменной и разложения на множители.

При решении комбинированных тригонометрических уравнений используются также определения и свойства основных элементарных функций, входящих в уравнение.

Прежде чем приступать к решению задач по тригонометрии рекомендуем Вам повторить, несколько раз записать и проговорить все упомянутые выше факты, понятия и формулы.

1057. а) Решите уравнение

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + 0,5 \sin 2x - 2 \cos^3 x + 2 \right) = -1.$$

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -3\pi \right]$.

1058. а) Решите уравнение

$$\log_6(\sin^2 x + 3 \cos x + 4) = 0.$$

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$.

1059. а) Решите уравнение

$$\frac{\sin x}{\sin \left(\frac{\pi}{6} - x \right)} = -\operatorname{tg} x - \sqrt{3}.$$

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{3\pi}{2}; 0 \right)$.

1060. а) Решите уравнение

$$\frac{\sin x}{\cos \left(\frac{\pi}{3} + x \right)} = -\operatorname{ctg} x - \sqrt{3};$$

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{3\pi}{2}; 0 \right)$.

1061. а) Решите уравнение

$$\frac{8 \cos^2 x - 6 \cos x - 5}{\sqrt{-9 \sin x}} = 0.$$

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-6\pi; -\frac{9\pi}{2} \right]$.

1062. а) Решите уравнение

$$\frac{2 \cos^2 x + 5 \cos x - 3}{\sqrt{2 \sin x}} = 0.$$

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-6\pi; -\frac{9\pi}{2}\right]$.

1063. а) Решите уравнение $\sin x = 8 \sin x \cos x + \cos x - 1$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[0; \pi]$.

1064. а) Решите уравнение $\cos x = 8 \sin x \cos x - \sin x + 1$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[0; \pi]$.

1065. а) Решите уравнение $\sin 2x + \cos 2x = 1$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{6}; 2\pi\right]$.

1066. а) Решите уравнение $\sin 2x - \cos 2x = 1$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\pi; \frac{\pi}{3}\right]$.

1067. а) Решите уравнение $4 \sin^3 x + 7 \sin 2x - 4 \sin x = 0$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку

$$\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right]$$

1068. а) Решите уравнение $4 \cos^3 x + 5 \sin 2x + 2 \cos x = 0$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку

$$\left(0; \frac{7\pi}{6}\right]$$

1069. а) Решите уравнение $\sqrt{3} \sin^2 2x - 2 \sin 4x + \sqrt{3} \cos^2 2x = 0$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-1; 1]$.

1070. а) Решите уравнение $\sin^2 3x - 2 \sin 6x + 3 \cos^2 3x = 0$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-1; 1]$.

1071. а) Решите уравнение $\sin(3\pi - 2x) + 1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(\pi - x)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.

1072. а) Решите уравнение $2 \cos^2 x + \sin 2x = \sin\left(x - \frac{3}{2}\pi\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-\pi; 0)$.

1073. а) Решите уравнение $\left(\frac{3}{7}\right)^{\sin 2x} + \left(\frac{7}{3}\right)^{\sin 2x} = 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}\right)$.

1074. а) Решите уравнение $\left(\frac{6}{5}\right)^{\cos 3x} + \left(\frac{5}{6}\right)^{\cos 3x} = 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[4\pi; \frac{9\pi}{2}\right)$.

1075. а) Решите уравнение $\cos 3x = 2 \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

1076. а) Решите уравнение $\sin 3x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Задания для контроля

Вариант 1

1. а) Решите уравнение

$$2 \log_2^2(2 \sin x) - 11 \log_2(2 \sin x) + 5 = 0.$$

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

2. а) Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x = |\operatorname{tg} x| - \frac{1}{\cos^2 x}.$$

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. а) Решите уравнение

$$-5 \sin^2 x + 6 \sin 2x + 9 = 0.$$

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$.

4. а) Решите уравнение $4^{\sin(\pi+x)+1} + 4^{\sin(\pi-x)} = 4$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку

$$\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right).$$

5. а) Решите уравнение

$$\sqrt{\operatorname{tg}(\pi x) + 2\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3}.$$

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-5; -2]$.

Вариант 2

1. а) Решите уравнение

$$2 \log_2^2(2 \cos x) - 9 \log_2(2 \cos x) + 4 = 0.$$

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[0; \pi]$.

2. а) Решите уравнение

$$\operatorname{ctg} x = |\operatorname{ctg} x| + \frac{1}{\sin x}.$$

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-\pi; \frac{\pi}{2}]$.

3. а) Решите уравнение

$$24 \cos^2 x + 9 \sin 2x + 3 = 0.$$

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку

$$\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right].$$

4. а) Решите уравнение $4^{\sin(\pi+x)} + 4^{\sin(\pi-x)} = 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку

$$\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right].$$

5. а) Решите уравнение

$$\sqrt{\operatorname{tg}(\pi x) + \frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-5; -2]$.

Вариант 3

1. а) Решите уравнение $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \cos 4x = \frac{\cos x}{2}$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$.

2. а) Решите уравнение

$$\sin x(4 \cos x - 3) = 3 \cos x.$$

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-\pi; 0]$.

3. а) Решите уравнение

$$4 \sin^4 x + 4 \sin^2 2x - 7 \sin^2 x = 0.$$

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$.

4. а) Решите уравнение $\sin 10x + \cos 10x = 1$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$.

5. а) Решите уравнение

$$\sin^3 x + \cos^3 x = -1.$$

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-7\pi; -6\pi]$.

Вариант 4

1. а) Решите уравнение $\frac{1}{2} \sin x - \sin 4x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-5\pi; -\frac{9\pi}{2}\right]$.

2. а) Решите уравнение

$$2 \cos x(-3 \sin x + 4) = 8 \sin x.$$

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

3. а) Решите уравнение

$$4 \cos^4 x + 4 \sin^2 2x - 13 \cos^2 x = 0.$$

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{2\pi}{3}\right]$.

4. а) Решите уравнение $\sin 10x - \cos 10x = 1$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.

5. а) Решите уравнение $\sin^3 x - \cos^3 x = -1$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-7\pi; -6\pi]$.

sbornik.me

§ 24. Стереометрия

В стереометрии такие понятия, как точка, прямая и плоскость, не определяются. Отношения между ними задаются аксиоматически.

Для успешного решения задач по стереометрии повышенного уровня необходимо знать и представлять, как могут располагаться две различные прямые (параллельные, пересекающиеся и скрещивающиеся), две различные плоскости (параллельные, пересекающиеся), плоскость и не лежащая на ней прямая (параллельные, пересекающиеся), знать признаки совпадения двух прямых, двух плоскостей и принадлежности прямой некоторой плоскости.

К основным определяемым понятиям относятся: понятие угла между прямыми; угла между прямой и плоскостью; угла между двумя плоскостями, расстояния от точки до прямой, расстояния между скрещивающимися прямыми, расстояния от точки до плоскости, расстояния между параллельными плоскостями.

Основополагающими являются теорема о трёх перпендикулярах, признаки параллельности и перпендикулярности двух плоскостей, прямой и плоскости.

Полезно знать, что при пересечении двух параллельных плоскостей третьей плоскостью, линии пересечения её с указанными двумя плоскостями будут параллельными, и что линия пересечения плоскости, проходящей через прямую, параллельную некоторой плоскости, будет параллельна этой прямой.

Необходимо также владеть методом координат, основными понятиями векторной алгебры и уметь применять их при нахождении длин отрезков и угла между прямыми.

Прежде чем приступать к решению задач по стереометрии, рекомендуем записать и проговорить все указанные выше понятия, факты и теоремы.

1077. Радиус окружности, описанной около основания правильной восьмиугольной пирамиды $KAB CDEFGH$, где K — вершина пирамиды, равен 4. Высота пирамиды равна 8.

а) Докажите, что $AK \perp BH$.

б) Найдите косинус угла между гранями AKB и AKH .

1078. Радиус окружности, описанной около основания правильной шестиугольной пирамиды $KAB CDEF$, где K — вершина пирамиды, равен 6. Высота пирамиды равна 3.

а) Докажите, что $BK \perp DF$.

б) Найдите косинус угла между гранями AKB и AFK .

1079. Основанием правильной четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной, равной 6. Высота призмы равна 8. Точка M принадлежит ребру AD и $AM : MD = 2 : 1$. Точка N принадлежит ребру $C_1 D_1$ и $C_1 N : ND_1 = 2 : 1$.

а) Докажите, что прямая $A_1 M$ параллельна прямой TC , где T принадлежит ребру $B_1 C_1$ и $C_1 T : TB_1 = 2 : 1$.

б) Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми $A_1 M$ и CN .

1080. Основанием правильной четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной, равной 4. Высота призмы равна 8. Точки M , N , T и L являются соответственно серединами рёбер AD , $C_1 D_1$, $C_1 B_1$ и AB .

а) Докажите, что прямая $A_1 M$ параллельна прямой TC .

б) Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми $A_1 L$ и CT .

1081. Страна основания правильной треугольной пирамиды $SABC$ (S — вершина пирамиды) равна $12\sqrt{3}$. Высота пирамиды равна 8.

а) Докажите, что $AC \perp BS$.

б) Найдите косинус угла между скрещивающимися прямыми CN и MS , где N — середина AS , а M — середина BC .

1082. Страна основания правильной треугольной пирамиды $SABC$ (S — вершина пирамиды) равна $16\sqrt{3}$. Высота пирамиды равна 6.

а) Докажите, что $BC \perp AS$.

б) Найдите косинус угла между скрещивающимися прямыми NA и MS , где M принадлежит BC и $CM : MB = 3 : 1$ а N делит SC пополам.

1083. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ через центр основания треугольника ABC и центры симметрий боковых граней $AA_1 B_1 B$ и $BB_1 C_1 C$ проведена плоскость, которая составляет с плоскостью основания угол 30° .

а) Постройте сечение, образованное этой плоскостью.

б) Найдите площадь этого сечения, если сторона основания равна 6.

1084. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ точка O — центр основания треугольника ABC , точки O_1 и O_2 — центры симметрий боковых граней $AA_1 B_1 B$ и $AA_1 C_1 C$ соответственно.

а) Постройте сечение призмы плоскостью $OO_1 O_2$.

б) Найдите угол между плоскостью ABC и плоскостью $OO_1 O_2$ в градусах, если сторона основания призмы равна 9, а площадь сечения призмы плоскостью $OO_1 O_2$ равна $13,5\sqrt{3}$.

1085. В основание цилиндра высотой 24 и радиусом основания 8 вписан тупоугольный треугольник ABC , в котором $BC = 12$, $AB = AC$.

а) Постройте сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, перпендикулярной плоскостям BB_1C_1C и A_1BC и проходящей через точку A , если AA_1 , BB_1 и CC_1 — образующие цилиндра.

б) Найдите величину угла между плоскостью B_1BC и A_1BC .

1086. В основание цилиндра высотой 60 и радиусом основания 15 вписан остроугольный треугольник ABC , в котором $BC = 10$, $AB = AC$.

а) Постройте сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через точку A и перпендикулярную плоскостям CBV_1 и VA_1C , если AA_1 , BB_1 и CC_1 — образующие цилиндра.

б) Найдите величину угла между плоскостями CBV_1 и VA_1C .

1087. На ребре A_1D_1 единичного куба $ABCD A_1B_1C_1D_1$ взята точка K , $A_1K : KD_1 = 1 : 2$.

а) Постройте сечение куба, проходящее через точку K и параллельное прямым C_1D и B_1D_1 .

б) Найдите площадь этого сечения.

1088. На ребре AD единичного куба $ABCD A_1B_1C_1D_1$ взята точка K , $AK : AD = 1 : 2$.

а) Постройте сечение этого куба плоскостью, проходящей через точку K параллельно прямым C_1D и B_1D_1 .

б) Найдите площадь этого сечения.

1089. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро равно $\sqrt{6}$, сторона основания 4.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через прямую C_1K и перпендикулярную плоскости BCC_1 , где K — середина стороны AC .

б) Найдите косинус угла между прямой C_1K и плоскостью боковой грани BB_1C_1C .

1090. В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ в основании лежит треугольник ABC со сторонами $AB = AC = 16$, $BC = 10$. Боковое ребро равно $\sqrt{33}$.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через прямую A_1B и перпендикулярную плоскости CC_1B_1 .

б) Найдите косинус угла между A_1B и плоскостью боковой грани CC_1B_1B .

1091. Дана правильная четырёхугольная пирамида, сторона основания которой равна 18, а высота равна 24.

а) Постройте сечение, проходящее через две противоположные вершины основания и перпендикулярное одному из боковых рёбер.

б) Найдите косинус угла между смежными боковыми гранями.

1092. Косинус угла между боковыми гранями правильной треугольной пирамиды равен $-\frac{1}{8}$, сторона основания равна 12.

а) Постройте сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания и перпендикулярную скрещивающемуся с ней ребру.

б) Найдите объём этой пирамиды.

1093. Около шара описан усечённый конус, у которого площадь одного основания в 4 раза больше другого.

а) Докажите, что длина образующей усечённого конуса равна сумме радиусов его оснований.

б) Найдите угол между образующей конуса и плоскостью его основания.

1094. Около шара описана правильная усечённая четырёхугольная пирамида, у которой площадь одного основания в 9 раз больше площади другого.

а) Докажите, что боковыми гранями усечённой пирамиды являются трапеции, высоты которых равны среднему арифметическому сторон оснований.

б) Найдите угол наклона боковой грани к плоскости основания.

1095. Основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$ является квадрат. Боковое ребро SC перпендикулярно основанию, а боковое ребро SD равно 10 и образует с плоскостью основания угол в 30° .

а) Докажите, что боковая грань ASD образует с плоскостью основания угол 30° .

б) Найдите тангенс угла между плоскостью основания и плоскостью DNC , где точка N делит ребро AS в отношении $1 : 3$, считая от точки A .

1096. Основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$ является ромб со стороной 6 и тупым углом 120° . Боковое ребро SC , где C — острый угол ромба, перпендикулярно основанию и равно 9.

а) Докажите, что боковая грань ASD образует с плоскостью основания угол 60° .

б) Найдите тангенс угла между плоскостью основания и плоскостью DNC , где точка N делит ребро AS в отношении $3 : 1$, считая от точки A .

Задания для контроля

Вариант 1

1. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды $KABCDEF$, где K — вершина пирамиды, равна 8. Высота пирамиды равна 6.

а) Докажите, что $AK \perp CE$.

б) Найдите косинус угла между гранями AKB и AKF .

2. Сторона основания правильной треугольной пирамиды $SABC$ (S — вершина пирамиды) равна $12\sqrt{3}$. Высота пирамиды равна 8.

а) Докажите, что $AB \perp SC$.

б) Найдите косинус угла между скрещивающимися прямыми AN и MS , где N — середина SC , а M делит BC пополам.

3. В основание цилиндра высотой 8 и радиусом основания 10 вписан тупоугольный треугольник ABC , в котором $BC = 16$, $AB = AC$.

а) Постройте сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, перпендикулярной плоскостям BB_1C_1C и A_1BC и проходящей через точку A , если AA_1 , BB_1 и CC_1 — образующие цилиндра.

б) Найдите величину угла между плоскостью B_1BC и A_1BC .

4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро равно $\sqrt{21}$, сторона основания 10.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через прямую C_1K и перпендикулярной плоскости BCC_1 , где K делит CA в отношении $2 : 3$, считая от точки C .

б) Найдите косинус угла между прямой C_1K и плоскостью боковой грани BB_1C_1C .

5. Около шара описан усечённый конус, у которого площадь одного основания в 9 раз больше площади другого основания.

а) Докажите, что длина образующей усечённого конуса в 4 раза больше радиуса меньшего основания.

б) Найдите угол между образующей конуса и его большим основанием. Ответ дайте в градусах.

Вариант 2

1. Сторона основания правильной восьмиугольной пирамиды $KABCDEFGH$, где K — вершина пирамиды, равна $6\sqrt{2 - \sqrt{2}}$. Высота пирамиды равна 2.

а) Докажите, что $AK \perp BH$.

- б) Найдите косинус угла между гранями AKB и AKH .
2. Сторона основания правильной треугольной пирамиды $SABC$ (S — вершина пирамиды) равна $16\sqrt{3}$. Высота пирамиды равна 6.
- а) Докажите, что $CB \perp AN$, где N — середина AS .
- б) Найдите косинус угла между скрещивающимися прямыми CN и MS , где M принадлежит BC и $CM : MB = 3 : 1$.
3. В основание цилиндра высотой 8 и радиусом основания 10 вписан остроугольный треугольник ABC , в котором $BC = 16$, $AB = AC$.
- а) Постройте сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, перпендикулярной плоскостям BB_1C_1C и A_1BC и проходящей через точку A , если AA_1 , BB_1 и CC_1 — образующие цилиндра.
- б) Найдите величину угла между плоскостью B_1BC и A_1BC .
4. Каждое ребро прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно 8.
- а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через прямую C_1A и перпендикулярной плоскости ABB_1A_1 .
- б) Найдите косинус угла между прямой C_1A и плоскостью боковой грани ABB_1A_1 .
5. Около шара описана правильная усечённая треугольная пирамида, у которой площадь одного основания в 4 раза больше площади другого основания.
- а) Докажите, что боковой гранью этой пирамиды является равнобедренная трапеция, высота которой равна сумме длин радиусов окружностей, вписанных в основания пирамиды.
- б) Найдите косинус угла между высотой боковой грани пирамиды и её большим основанием.

Вариант 3

1. Основанием правильной четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной, равной 9. Высота призмы равна 8. Точка N принадлежит ребру $C_1 D_1$ и $C_1 N : ND_1 = 2 : 1$.
- а) Докажите, что прямая $A_1 L$ параллельна прямой NC , где L принадлежит ребру AB и $AL : LB = 2 : 1$.
- б) Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми $A_1 L$ и TC , где точка T принадлежит ребру $C_1 B_1$ и $C_1 T : TB_1 = 2 : 1$.
2. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ через центр основания треугольника ABC и центры симметрий боковых граней $AA_1 B_1 B$ и $BB_1 C_1 C$ проведена плоскость, которая составляет с плоскостью основания угол 60° .

- а) Постройте сечение, образованное этой плоскостью.
- б) Найдите площадь этого сечения, если сторона основания равна $6\sqrt{3}$.
3. Точка K является серединой ребра A_1D_1 правильной четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с основанием $ABCD$.
- а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точку K параллельно плоскости BC_1D .
- б) Найдите площадь этого сечения, если сторона основания призмы равна 6, а высота призмы равна $9\sqrt{2}$.
4. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 18, а высота пирамиды равна 24.
- а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания перпендикулярно скрещивающемуся с ней боковому ребру.
- б) Найдите косинус угла между смежными боковыми гранями пирамиды.
5. Основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$ является квадрат. Боковое ребро SC перпендикулярно основанию, боковая грань ASD образует с плоскостью основания угол 60° , а боковое ребро SD равно 16.
- а) Докажите, что боковое ребро SD образует с плоскостью основания угол 60° .
- б) Найдите тангенс угла между плоскостью основания и плоскостью DNC , где точка N делит ребро AS в отношении 3 : 1, считая от точки A .

Вариант 4

1. Основанием правильной четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной, равной 6. Высота призмы равна 10. Точки N , T и L являются соответственно серединами рёбер AD , C_1D_1 , C_1B_1 и AB .
- а) Докажите, что прямая A_1L параллельна прямой NC .
- б) Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми A_1L и TC .
2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ через центр основания треугольника ABC и центры симметрий боковых граней AA_1B_1B и BB_1C_1C проведена плоскость, которая составляет с плоскостью основания угол 45° .
- а) Постройте сечение, образованное этой плоскостью.
- б) Найдите площадь этого сечения, если сторона основания равна $12\sqrt{3}$.
3. Точка K является серединой ребра A_1D_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
- а) Постройте сечение куба, проходящее через точку K и параллельное прямым B_1C и AB_1 .

б) Найдите площадь этого сечения, если ребро куба равно 8.

4. Косинус угла между смежными боковыми гранями правильной треугольной пирамиды равен $\left(-\frac{1}{4}\right)$, сторона основания пирамиды равна 18.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через высоту пирамиды перпендикулярно скрещивающейся с ней стороной основания.

б) Найдите высоту пирамиды.

5. Основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$ является ромб со стороной 6 и тупым углом 120° . Боковое ребро SC , где C — острый угол ромба, перпендикулярно основанию и равно $3\sqrt{3}$.

а) Докажите, что боковая грань ASD образует с плоскостью основания угол 45° .

б) Найдите тангенс угла между плоскостью основания и плоскостью DNC , где точка N делит ребро AS в отношении $3 : 1$, считая от точки A .

sbornik.me

§ 25. Неравенства и системы неравенств

Прежде чем приступать к решению задач по этой теме вспомним:

- понятие числовой прямой и изображение на ней чисел, конечных и бесконечных интервалов, полуинтервалов и отрезков;
- понятие и свойства числовых неравенств;
- графики и свойства основных элементарных функций: линейной, квадратичной, степенной, логарифмической, показательной и модуля.

Вспомним также, что неравенства $a < b$ и $b > a$ имеют одинаковый смысл, а неравенство $a \leq b$ означает выполнение одного из утверждений $a < b$ или $a = b$.

Для успешного решения заданий по этой теме надо:

- уметь решать простейшие линейные, квадратичные, иррациональные, логарифмические и показательные неравенства и неравенства, имеющие вид $|f(x)| \leq g(x)$ и $|f(x)| \leq |g(x)|$;
- владеть методом интервалов решения рациональных и других неравенств;
- уметь применять метод декомпозиции, основанный на совпадении знаков различных выражений.

1097. Решите неравенство $\log_{x^2-5x+6}(\log_{x^2-5x+6}(x-1)) \leq 0$.

1098. Решите неравенство $\log_{x^2-2x-3}(\log_{x^2-2x-3}(x-2)) \leq 0$.

1099. Решите неравенство

$$(x^2 - 4x + 4) \frac{2x}{\log_5(x^2 - 4x + 4)} - 30 \cdot 5^{-\log_{0,2}(5^x)} + 125 \leq 0.$$

1100. Решите неравенство

$$(x^2 - 3x - 3) \frac{x}{\log_2(x^2 - 3x - 3)} + 2 \frac{1}{\log_{(4^x)} 2} - 2 \geq 0.$$

1101. Решите неравенство $\frac{\log_{4^{x+2}} 16}{\log_{4^{x+2}}(-16x)} \leq \frac{1}{\log_4 \log_{\frac{1}{4}} 4^x}$.

1102. Решите неравенство $\frac{\log_{3^{x+4}} 9}{\log_{3^{x+4}}(-27x)} \geq \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} \log_3 \left(\frac{1}{3}\right)^x}$.

1103. Решите неравенство $(x - 1)(2 \log_3^2 x - 5 \log_3 x + 2) < 0$.

1104. Решите неравенство $(4 - x)(2 \log_{11}^2 x - 3 \log_{11} x + 1) > 0$.

1105. Решите неравенство $\log_2(x - 1) - \log_2(x + 1) + \log_{\frac{x+1}{x-1}} 2 > 0$.

1106. Решите неравенство $\log_{0,5}(x - 3) - \log_{0,5}(x + 3) - \log_{\frac{x+3}{x-3}} 2 > 0$.

1107. Решите неравенство $||3^x + 4x - 9| - 8| \leq 3^x - 4x - 1$.

1108. Решите неравенство $||2^x + 4x - 9| - 8| \leq 2^x - 4x - 1$.

1109. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} \log_{4-x} \frac{x+5}{(x-4)^2} \geq -2, \\ x^3 + 7x^2 + \frac{27x^2 + 5x - 25}{x-5} \leq 5. \end{cases}$$

1110. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} \log_{5-x} \frac{x+6}{(x-5)^2} \geq -2, \\ x^3 + 2x^2 - \frac{7x^2 - 6x + 24}{x-4} \leq 6. \end{cases}$$

1111. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} 25^{x-1} - 27 \cdot 5^{x-2} + 2 \geq 0, \\ \log_x(x^2 - 12x + 36) \leq 0. \end{cases}$$

1112. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} 9^{x-2} - 83 \cdot 3^{x-4} + 2 \geq 0, \\ \log_x(x^2 - 14x + 49) \leq 0. \end{cases}$$

1113. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{4-x^2}{2}} \geq 27^x, \\ \log_{x+2}(2x^2 + x) > 2. \end{cases}$$

1114. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{10-x^2}{2}} \geq 8^x, \\ \log_{2x+5}(x^2 - 28x - 7) > 0. \end{cases}$$

1115. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} 25^{\frac{x}{2}} + \frac{20}{5^x} \geq 9, \\ \log_{x+5}\left(\frac{x+2}{5}\right) \leq 0. \end{cases}$$

1116. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} 2^x + \frac{22}{2^x} \geq 13, \\ x \log_{x+2}(5 - 2x) \leq 0. \end{cases}$$

Задания для контроля

Вариант 1

1. Решите неравенство $\log_{x-2}(\log_{x-2}(x^2 - 5x + 6)) \leq 0$.
2. Решите неравенство $\frac{\log_{4^{x+1}} 16}{\log_{4^{x+1}}(-4x)} > \frac{1}{\log_4 \log_{\frac{1}{4}} 4^x}$.
3. Решите неравенство $\log_3(x-2) - \log_3(x+2) + \log_{\frac{x+2}{x-2}} 3 \geq 0$.
4. Решите систему неравенств $\begin{cases} \log_{3-x} \frac{x+4}{(x-3)^2} < -2, \\ x^3 + 6x^2 + \frac{11x^2 + 6x - 36}{x-6} > 6. \end{cases}$
5. Решите систему неравенств $\begin{cases} \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{10-x^2}{2}} \geq 125^x, \\ \log_{2x+3}(x^2 - 28x + 27) \leq 0. \end{cases}$

Вариант 2

1. Решите неравенство $\log_{x-1}(\log_{x-1}(x^2 - 5x + 6)) \leq 0$.
2. Решите неравенство $\frac{\log_{3^{x+2}} 9}{\log_{3^{x+2}}(-3x)} \geq \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} \log_3 \left(\frac{1}{3}\right)^x}$.
3. Решите неравенство $\log_3(x-4) - \log_3(x+4) + \log_{\frac{x+4}{x-4}} 3 \leq 0$.
4. Решите систему неравенств $\begin{cases} \log_{5-x} \frac{x+3}{(x-5)^4} < -4, \\ 2x^3 + 3x^2 - \frac{3x^2 + 5x - 15}{x-3} > -5. \end{cases}$
5. Решите систему неравенств $\begin{cases} (0,16)^{\frac{6-x^2}{2}} \geq 2,5^x, \\ \log_{2x-1}(x^2 - 5x) \leq 0. \end{cases}$

Вариант 3

1. Решите неравенство $(x-1)^{2x \cdot \log_{x-1} 5} - 25 \cdot 5^x + 24 \leq 0$.
2. Решите неравенство $(x-3)(3 \log_3^2 x - 10 \log_3 x + 3) \geq 0$.

3. Решите неравенство

$$||3^x + 4x - 9| - 10| > 3^x - 4x - 1.$$

4. Решите систему неравенств $\begin{cases} 9^{x-1} - 26 \cdot 3^{x-2} - 3 \leq 0, \\ \log_x(x^2 - 11x + 19) \leq 0. \end{cases}$

5. Решите систему неравенств $\begin{cases} (\sqrt{2})^{2x} + \frac{24}{2^x} \geq 11, \\ x \log_{x+3}(5-x) \leq 0. \end{cases}$

Вариант 4

1. Решите неравенство

$$(3-x)^{x \cdot \log_3 - x^2} \cdot (-6) + (x-2)^{\frac{2x}{\log_2(x-2)}} + 5 \leq 0.$$

2. Решите неравенство $(2-x)(2 \log_4^2 x + 5 \log_4 x - 3) \geq 0.$

3. Решите неравенство

$$||4^x + 4x - 9| - 10| > 4^x - 4x - 1.$$

4. Решите систему неравенств $\begin{cases} 9^{x-1} - 82 \cdot 3^{x-2} + 9 \leq 0, \\ \log_x(x^2 - 14x + 49) \leq 0. \end{cases}$

5. Решите систему неравенств $\begin{cases} (\sqrt{3})^{2x} + \frac{10}{3^x} \leq 11, \\ \log_{x+4} \frac{x-1}{4} \leq 0. \end{cases}$

§ 26. Планиметрия

Для успешного решения задач по планиметрии повышенного уровня необходимо знать:

- признаки параллельности прямых, формулу суммы внутренних углов выпуклого n -угольника;
- признаки равенства и подобия треугольников;
- свойства средней линии треугольника и трапеции;
- различные формулы площади треугольника (включая соответствующие формулы через радиусы вписанной и описанной окружностей), параллелограмма, трапеции, ромба, площади круга и длины окружности;
- теорему Пифагора и теоремы синусов и косинусов;
- измерение центральных и вписанных углов, свойства хорд и касательных к окружности, свойства пересекающихся хорд, касательной и секущей;
- свойства медиан, биссектрис, высот и серединных перпендикуляров треугольника, свойства диагоналей параллелограмма и ромба;
- критерий существования окружности, вписанной и описанной около четырёхугольника;
- понятия основных тригонометрических функций и их значений от углов 30° , 45° и 60° , формулы синуса и косинуса суммы и разности двух чисел, формулы синуса и косинуса двойного аргумента;
- элементы векторной алгебры и их применение для нахождения длин отрезков и углов между прямыми и метод координат;

Прежде чем приступать к решению задач рекомендуем вам записать и проговорить все указанные выше понятия, факты и теоремы.

1117. В треугольнике ABC стороны AB , BC и AC соответственно равны 9, 10 и 11. Высоты AH и BK пересекаются в точке O .

- а) Докажите, что в треугольнике ABC угол B — острый.
- б) Найдите площадь треугольника KOH .

1118. В треугольнике ABC стороны AB , BC и AC соответственно равны 7, 8 и 9. Высоты AH и BK пересекаются в точке O .

а) Докажите, что в треугольнике ABC угол B — острый.

б) Найдите площадь треугольника AOB .

1119. Две окружности O_1 и O_2 одинакового радиуса, равного 10, касаются друг друга внешним образом в точке K .

а) Докажите, что с точностью до симметрии существует и притом одна окружность O_3 , которая касается окружностей O_1 и O_2 , и их общей касательной, не проходящей через точку K .

б) Найдите площадь четырёхугольника C_1MNC_2 , где точки M и N являются соответственно точками касания окружности O_3 с окружностями O_1 и O_2 , а C_1 и C_2 — центры окружностей O_1 и O_2 .

1120. Две окружности O_1 и O_2 одинакового радиуса, равного 10, с центрами в точках C_1 и C_2 соответственно касаются друг друга внешним образом в точке K .

а) Докажите, что с точностью до симметрии существует и притом одна окружность O_3 , которая касается окружностей O_1 и O_2 и прямой l , параллельной C_1C_2 и отстоящей от неё на расстоянии 15.

б) Найдите площадь четырёхугольника C_1MNC_2 , где точки M и N являются соответственно точками касания окружности O_3 с окружностями O_1 и O_2 .

1121. В треугольнике ABC сторона BC равна 12, угол B равен 45° , а угол C — 30° . Окружность касается стороны BC в точке K , проходит через точку A и пересекает сторону AB в точке N , которая делит AB в отношении 4 : 5, считая от точки B .

а) Докажите, что $BK : AB = 2 : 3$.

б) Найдите радиус R окружности, указанной в условии задачи.

1122. В треугольнике ABC сторона BC равна 18, угол B равен 45° , а угол C — 30° . Окружность касается стороны BC в точке K , проходит через точку A и пересекает сторону AB в точке N , которая делит AB в отношении 9 : 7, считая от точки B .

а) Докажите, что $BK : AB = 3 : 4$.

б) Найдите радиус R окружности, указанной в условии задачи.

1123. Меньшая сторона AB и меньшая диагональ BD параллелограмма $ABCD$ образуют с его большей стороной AD углы, соответственно равные 30° и 15° . Радиусом, равным высоте BH параллелограмма, проведённой к стороне AD , и с центром в точке B , проведена окружность.

а) Докажите, что отношение площади той части соответствующего круга, которая расположена вне параллелограмма, к площади всего круга равно $\frac{7}{12}$.

б) Найдите площадь той части соответствующего круга, которая расположена внутри параллелограмма, если большая его сторона равна $\frac{12}{\sqrt{\pi}}$.

1124. Меньшая сторона AB и меньшая диагональ BD параллелограмма $ABCD$ образуют с его большей стороной AD углы, соответственно равные 75° и 45° . Радиусом, равным высоте BH параллелограмма, проведённой к стороне AD , и с центром в точке B , проведена окружность.

а) Докажите, что отношение площади той части соответствующего круга, которая расположена внутри параллелограмма, к площади всего круга равно $\frac{7}{24}$.

б) Найдите площадь той части соответствующего круга, которая расположена вне параллелограмма, если большая его сторона равна $\frac{15}{\sqrt{\pi}}$.

1125. Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке K . Известно, что $AC = 6KB_1$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите длину отрезка EF , где E — точка касания стороны AC и вписанной в треугольник окружности, F — точка касания стороны AC и окружности, касающейся стороны AC и продолжений сторон BA и BC треугольника ABC , если известно, что $AB = 6$, $AC = 10$.

1126. Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке K . Известно, что $AB = 3KC$.

а) Докажите, что треугольник ABC — прямоугольный.

б) Найдите длину отрезка EF , где E — точка касания стороны AC и вписанной в треугольник ABC окружности, F — точка касания стороны AC и окружности, касающейся стороны AC и продолжений сторон BA и BC треугольника ABC , если известно, что $AC = 3$, $BC = 4$.

1127. На окружности радиусом $4\sqrt{3}$ с центром O взяты точки A, B, C, N, D в указанном порядке, при этом N — середина дуги CD , M — точка пересечения хорд NA и DC , L — точка пересечения хорд NB и DC .

а) Докажите, что четырёхугольник $AMLB$ можно вписать в окружность.

б) Найдите радиус окружности, описанной около $AMLB$, если

$\sphericalangle DA = \sphericalangle CB$, $\sphericalangle AB = 120^\circ$, $\cos \angle NOC = \frac{1}{4}$ и точка O лежит внутри $AMLB$.

1128. На окружности радиусом $2\sqrt{3}$ с центром O взяты точки M, N, P, K в указанном порядке, S — середина дуги NP . SM и NP пересекаются в точке A , SK и NP — в точке B , $\sphericalangle MN = \sphericalangle KP$.

а) Докажите, что $MABK$ — равнобедренная трапеция.

б) Найдите площадь трапеции, если точка O лежит внутри $MABK$, $\sphericalangle MK = 120^\circ$, $\angle SOP = 60^\circ$.

1129. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O , BC и AD — основания трапеции.

а) Докажите, что $\frac{S_{ABO}}{S_{AOD}} = \frac{BC}{AD}$.

б) Найдите площадь трапеции, если $AD = 4BC$, $S_{AOB} = 2$.

1130. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O , BC и AD — основания трапеции.

а) Докажите, что $\frac{S_{ABO}}{S_{BOC}} = \frac{AD}{BC}$.

б) Найдите площадь трапеции, если $AD = 5$, $BC = 1$, $S_{ABO} = 5$.

1131. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке O , причём $AO \cdot CO = BO \cdot DO$.

а) Докажите, что трапеция $ABCD$ — равнобедренная.

б) Найдите радиус описанной вокруг трапеции окружности, если основания трапеции равны 6 и 8.

1132. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке O , причём $AO \cdot CO = BO \cdot DO$.

а) Докажите, что средняя линия трапеции равна высоте.

б) Найдите боковую сторону трапеции, если радиус описанной вокруг трапеции окружности равен $3\sqrt{2}$.

1133. Около окружности радиуса 3 описана равнобедренная трапеция $ABCD$ (AD — большее основание), площадь которой равна 39.

а) Докажите, что синус угла при большем основании равен $\frac{12}{13}$.

б) Найдите площадь трапеции $AMND$, где M и N — точки касания окружности с боковыми сторонами трапеции.

1134. Около окружности радиуса 2 описана равнобедренная трапеция $ABCD$ (AD — большее основание), площадь которой равна 20.

а) Докажите, что синус угла при меньшем основании равен $\frac{4}{5}$.

б) Найдите площадь трапеции $MBCN$, где M и N — точки касания окружности с боковыми сторонами трапеции.

1135. В треугольнике ABC угол B равен 60° . На сторонах AB и BC взяты точки M и N так, что $MN \parallel AC$.

а) Докажите, что $\frac{R_{ABC}}{r_{ABC}} = \frac{R_{MBN}}{r_{MBN}}$, где R_{ABC} и r_{ABC} , R_{MBN} и r_{MBN} — радиусы описанной и вписанной окружностей соответствующих треугольников.

б) Найдите углы треугольника ABC , если $\frac{R_{ABC}}{r_{ABC}} = \sqrt{3} + 1$. Ответ дайте в градусах.

1136. В треугольнике ABC угол B равен 30° .

а) Докажите, что если треугольник ABC — прямоугольный, то отношение радиусов описанной и вписанной окружностей равно $\sqrt{3} + 1$.

б) Найдите углы треугольника ABC , если отношение радиусов описанной и вписанной окружностей равно $\sqrt{3} + 1$. Ответ дайте в градусах.

Sbornik.me

Задания для контроля

Вариант 1

1. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1 и CC_1 пересекаются в точке H .

а) Докажите, что $\angle BHA_1 = \angle ACB$.

б) Известно, что $BH = 17$, $\angle ABC = 45^\circ$. Найдите AC .

2. Окружность с центром в вершине A треугольника ABC , стороны которого AB , BC и AC соответственно равны 8, 10 и 6, касается стороны BC в точке D , являющейся основанием высоты AD , проведённой из точки A к стороне BC .

а) Докажите, что точка пересечения окружности со стороной AC делит AC в отношении 4 : 1, считая от точки A .

б) Найдите площадь четырёхугольника $AMDN$, где M и N — точки пересечения окружности со сторонами AB и AC соответственно.

3. Большее основание AD трапеции $ABCD$ равно 8. Углы при этом основании равны по 75° . Угол между меньшим основанием и одной из диагоналей равен 45° .

а) Докажите, что $AB^2 = AO^2 + OB^2$, где O — точка пересечения диагоналей.

б) Найдите площадь трапеции $ABCD$.

4. Площадь равнобедренной трапеции $ABCD$ равна 100, а основания AD и BC равны соответственно $15\sqrt{2}$ и $5\sqrt{2}$.

а) Докажите, что биссектриса угла A пересекает противоположную боковую сторону CD .

б) Найдите расстояние от точки A до точки пересечения этой биссектрисы с боковой стороной CD .

5. Высота BH параллелограмма $ABCD$, опущенная на сторону AD , равна 10. Сторона AB и диагональ BD образуют со стороной AD углы, соответственно равные 75° и 30° . На высоте BH , проведённой из вершины B к стороне AD , как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону AB и диагональ BD в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что углы MNB и NHB равны соответственно 75° и 30° .

б) Найдите площадь четырёхугольника $HMBN$.

Вариант 2

1. В остроугольном треугольнике ABC высоты BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H .

- а) Докажите, что $\angle BHC_1 = \angle BAC$.
- б) Известно, что $BC = 25$, $\angle BAC = 60^\circ$. Найдите AH .
2. Окружность с центром в вершине A треугольника ABC , стороны которого AB , BC и AC соответственно равны 12, 13 и 5, касается стороны BC в точке D , являющейся основанием высоты AD , проведённой из точки A к стороне BC .
- а) Докажите, что точка пересечения окружности со стороной AC делит AC в отношении 12 : 1, считая от точки A .
- б) Найдите площадь четырёхугольника $AMDN$, где M и N — точки пересечения окружности со сторонами AB и AC соответственно.
3. Меньшее основание BC трапеции $ABCD$ равно 12. Углы при большем основании равны по 75° . Угол между диагоналями равен 90° .
- а) Докажите, что $BO = OC$, где O — точка пересечения диагоналей.
- б) Найдите площадь трапеции $ABCD$.
4. Площадь равнобедренной трапеции $ABCD$ равна $2 + \sqrt{3}$, а основания AD и BC равны соответственно $2 + 2\sqrt{3}$ и 2.
- а) Докажите, что биссектриса угла A проходит через точку C .
- б) Найдите расстояние от точки D до прямой, на которой лежит биссектриса угла A .
5. Высота BH параллелограмма $ABCD$, опущенная на сторону AD , равна 18. Сторона AB и диагональ BD образуют со стороной AD углы, соответственно равные 60° и 15° . С центром в точке B , радиусом BH построена окружность, пересекающая сторону AB и диагональ BD в точках M и N соответственно.
- а) Докажите, что $\angle MHN = 127,5^\circ$.
- б) Найдите площадь треугольника HMN .

Вариант 3

1. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке P , на первой окружности взята точка Q_1 , на второй — Q_2 , при этом точки Q_1 и Q_2 лежат по разные стороны от прямой O_1O_2 , $O_1Q_1 \parallel O_2Q_2$.
- а) Докажите, что отрезок Q_1Q_2 проходит через точку P .
- б) Найдите радиус второй окружности, если радиус первой равен 4, $Q_1O_2 = 4\sqrt{7}$ и $\angle PO_2Q_2 = 60^\circ$.
2. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC соответственно равны 48 и 16, а диагонали AC и BD соответственно равны 26 и $10\sqrt{17}$.

а) Докажите, что точка O пересечения диагоналей трапеции делит высоту трапеции, проходящую через точку O , в отношении $1 : 3$, считая от верхнего основания.

б) Найдите площадь треугольника ABO .

3. В треугольнике ABC стороны AB , BC и AC соответственно равны 4, 5 и 6. Высоты $АН$ и $ВК$ пересекаются в точке O .

а) Докажите, что около четырёхугольника $КОНС$ можно описать окружность.

б) Найдите радиус окружности описанной около четырёхугольника $КОНС$.

4. Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 24, а боковая сторона — 20.

а) Докажите, что $\angle ABC > 60^\circ$.

б) Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника HKM , где H , K и M — точки касания окружности, вписанной в треугольник ABC , с его сторонами.

5. Если через две внутренние точки одной диагонали прямоугольника провести прямые, параллельные сторонам прямоугольника, то с каждой стороны от диагонали получим три непересекающихся прямоугольника и три треугольника.

а) Докажите, что суммарная площадь прямоугольников с одной стороны от диагонали и суммарная площадь прямоугольников с другой её стороны совпадают.

б) Найдите суммарную площадь прямоугольников с одной стороны от диагонали, если площади треугольников с этой же стороны от диагонали равны 3, 12 и 27.

Вариант 4

1. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке Q , прямая M_1M_2 проходит через точку Q , при этом M_1 лежит на первой окружности, M_2 — на второй, а точка O_1 не лежит на этой прямой.

а) Докажите, что O_1M_1 параллельна O_2M_2 .

б) Найдите периметр четырёхугольника $O_1M_1O_2M_2$, если радиус первой окружности — 4, радиус второй — 6, а расстояние между прямыми O_1M_1 и O_2M_2 равно 8.

2. Сторона AB треугольника ABC равна 96. Высота, проведённая к этой стороне, равна 17, а радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен 8.

а) Докажите, что расстояние от центра вписанной окружности до точки C равно 10.

б) Найдите тангенс угла C .

3. Через точку M , лежащую на диаметре окружности радиуса 2, проведена такая хорда AB , образующая с диаметром угол 30° , что $AM : MB = 2 : 3$. Через точку B проведена перпендикулярно этому диаметру хорда BC .

а) Докажите, что треугольник BMC — равносторонний.

б) Найдите площадь треугольника ABC .

4. Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 16, а боковая сторона — 17.

а) Докажите, что $\angle ABC < 60^\circ$.

б) Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника $A_1B_1C_1$, где A_1 , B_1 и C_1 — точки касания окружности, вписанной в треугольник ABC , с его сторонами.

5. Если через три внутренние точки одной диагонали прямоугольника провести прямые, параллельные сторонам прямоугольника, то с каждой стороны от диагонали получим шесть непересекающихся прямоугольников и четыре треугольника.

а) Докажите, что суммарная площадь прямоугольников с одной стороны от диагонали и суммарная площадь прямоугольников с другой её стороны совпадают.

б) Найдите суммарную площадь прямоугольников с одной стороны от диагонали, если площади треугольников с этой же стороны от диагонали равны 2, 2, 8 и 32.

§ 27. Экономические задачи

Для успешного решения экономических задач, относящихся к задачам повышенного уровня, необходимо:

- уметь находить указанное число процентов от любого числа;
- уметь находить число, если задано некоторое число процентов от него;
- знать формулу увеличения или уменьшения числа на указанное число процентов;
- понимать суть вложения денег под проценты (суть вкладов);
- понимать суть займа денег под проценты (суть кредитов);
- знать о существовании различных схем расчёта по вкладам;
- знать о существовании различных схем расчёта по кредитам;
- уметь находить указанную часть от любого числа;
- уметь находить число, если задана некоторая его часть;
- уметь делить число на несколько частей по заданному отношению между ними.

Следует заметить, что решение большинства экономических задач сводится к решению уравнений, неравенств или исследованию функций. В некоторых случаях используются их известные свойства или эти свойства устанавливаются с помощью производной.

Задача 1. Цена бриллианта определённого качества массой m карат пропорциональна $(m^2 + 1)$. Бриллиант этого качества массой 3 карата разбился на две части, после чего его стоимость уменьшилась. На какое максимальное число процентов от первоначальной стоимости могла уменьшиться цена упомянутого бриллианта при разбиении на две части?

Решение. Пусть коэффициент пропорциональности для этого бриллианта равен k , а бриллиант разбился на части x и $3 - x$ карат ($0 < x < 3$). Тогда первоначальная стоимость бриллианта была равна $k(3^2 + 1) = 10k$. А после разбиения она стала $k(x^2 + 1) + k((3 - x)^2 + 1)$.

Полагаем, что $10k$ составляет 100%, а $k(x^2 + 1) + k((3 - x)^2 + 1)$ составляет a %. Тогда $a = \frac{k(x^2 + 1) + k((3 - x)^2 + 1)}{10k} \cdot 100$,

$a = 10(x^2 + 1 + (3 - x)^2 + 1) = 10(2x^2 - 6x + 11)$. Максимальное уменьшение стоимости будет при минимальном значении a . По свойству квадратного трёхчлена минимальное значение будет при

$$x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \in (0; 3).$$

Непосредственно вычисляем, что $a = 65$. Поэтому максимальное уменьшение будет на $(100 - 65)\% = 35\%$.

Ответ. 35%.

1137. В банке взяли кредит 687 500 рублей на два года под $r\%$ годовых (в конце каждого года имеющаяся сумма долга увеличивается на $r\%$) и выплатили его двумя платежами — сначала 390 000 рублей, а затем 338 000 рублей. Первый платёж был сделан после первого начисления процентов, а второй — после второго начисления. Найдите r .

1138. При покупке квартиры Леонид брал кредит в банке под 2,5% годовых на два года (в конце каждого года имеющийся долг увеличивался на 2,5% процента). Для полного погашения кредита он в конце первого года после начисления процентов внёс платёж 215 000 рублей, а в конце второго — 325 950 рублей. Найдите, сколько рублей составлял этот кредит.

1139. В сентябре планируется взять кредит в банке на сумму 18 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 3,5% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по август каждый год необходимо выплатить часть долга;
- в сентябре каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на сентябрь предыдущего года.

Чему равна общая сумма выплат (в млн рублей) после полного погашения кредита, если сумма наибольшей годовой выплаты и наименьшей годовой выплаты долга составит 7,956 млн рублей?

1140. В сентябре планируется взять кредит в банке на сумму 18 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 2,5% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по август каждый год необходимо выплатить часть долга;
- в сентябре каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на сентябрь предыдущего года.

Чему равна общая сумма выплат (в млн рублей) после полного погашения кредита, если сумма наибольшей годовой выплаты и наименьшей годовой выплаты долга составит 7,74 млн рублей?

1141. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 12 млн рублей на срок 8 лет. Условия возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга так, чтобы на начало июля каждого года долг уменьшался на одну и ту же сумму по сравнению с предыдущим июлем.

Найдите наименьшую возможную ставку r , если известно, что последний платёж составит не менее 1,68 млн рублей.

1142. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 11 млн рублей на срок 10 лет. Условия возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга так, чтобы на начало июля каждого года долг уменьшался на одну и ту же сумму по сравнению с предыдущим июлем.

Найдите наименьшую возможную ставку r , если известно, что последний платёж будет не менее 1,265 млн рублей.

1143. 15 декабря планируется взять кредит в банке на сумму 900 тысяч рублей на 21 месяц. Условия возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого с 1-го по 20-й месяц долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

— к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какой долг будет 15-го числа 20-го месяца, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1189,8 тысяч рублей?

1144. 15 декабря планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 25 месяцев. Условия возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого с 1-го по 24-й месяц долг должен быть на сорок тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

— к 15-му числу 25-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму в тысячах рублей планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 2440 тысяч рублей?

1145. В июле 2025 года планируется взять кредит на 8 лет. Условия его возврата таковы:

- в январе 2026, 2027, 2028, 2029 долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
- в январе 2030, 2031, 2032, 2033 долг возрастает на 11% по сравнению с концом предыдущего года;
- в июле каждого последующего года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2033 года кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму в тысячах рублей планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 780 тысяч рублей?

1146. В июле 2025 года планируется взять кредит на 600 тысяч рублей. Условия его возврата таковы:

- в январе 2026, 2027, 2028 годов долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- в январе 2029, 2030, 2031 годов долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
- в июле каждого последующего года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2031 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равно r , если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1005 тысяч рублей?

1147. Клиент взял в банке 10 920 000 рублей в кредит под 20% годовых. По истечении каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем клиент переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа в рублях, чтобы клиент выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

1148. Клиент взял в банке 5 958 000 рублей в кредит под 10% годовых. По истечении каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем клиент переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа в рублях, чтобы клиент выплатил долг

три года равными ежегодными платежами? (Ответ округлите до целого числа рублей.)

1149. Наталья Николаевна накопила 50 000 рублей и решила положить их в банк под 20% годовых. В банке ей предложили в конце каждого из первых трёх лет (после начисления процентов) дополнительно вкладывать на счёт одну и ту же фиксированную сумму так, чтобы к концу четвёртого года на её счёту оказалась сумма 125 520 рублей. Найдите, какую сумму (в рублях) должна добавлять Наталья в конце каждого из трёх лет.

1150. Мария Петровна положила в банк 1 500 000 рублей под 7% годовых. Схема начисления процентов следующая: каждый год банк начисляет проценты на имеющуюся сумму вклада (то есть увеличивает сумму на 7%). По истечении двух лет банк повысил процент с 7% до 10%. Сколько всего лет должен пролежать вклад, чтобы он увеличился по сравнению с первоначальным на 577 993,5 рубля (при условии, что процент изменяться больше не будет)?

1151. Виктор Васильевич взял кредит 1 марта 2021 года на сумму S млн рублей. Условия возврата таковы:

— 15 апреля каждого года сумма увеличивается на 20% по сравнению с началом года;

— с 1 июня по 1 июля необходимо выплатить часть долга;

— 1 августа каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Год	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027			
Долг(млн руб.)	S	$S - 0,5$	$S - 0,7$	$S - 0,9$	$S - 1,1$	$S - 1,7$	$S - 1,8$...	0,1	0

(Начиная с 2027 года долг равномерно уменьшается на 100 000 рублей в год).

Определите сумму кредита, если общая сумма выплат равна 5,46 млн рублей.

1152. Леонид Борисович взял кредит 1 марта 2021 года на сумму S млн рублей. Условия возврата таковы:

— 15 апреля каждого года сумма увеличивается на 20% по сравнению с началом года;

— с 1 июня по 1 июля необходимо выплатить часть долга;

— 1 августа каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Год	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027			
Долг (млн руб.)	S	$S - 0,4$	$S - 0,6$	$S - 1$	$S - 1,2$	$S - 1,7$	$S - 1,8$...	0,1	0

(Начиная с 2027 года долг равномерно уменьшается на 100 000 рублей в год).

Определите сумму кредита, если общая сумма выплат равна 6,72 млн рублей.

1153. Для перевозки 400 маленьких и 24 больших блоков был выделен автомобиль грузоподъёмностью 7 тонн. Размеры блоков таковы, что автомобиль может перевести не больше 34 маленьких блоков, а один большой блок занимает место 15 маленьких. При этом большой блок имеет массу 3 т, а маленький 0,2 т. Какое минимальное число перевозок потребуется для транспортировки всех блоков?

1154. Нужно перевезти по железной дороге 120 маленьких и 8 больших ящиков вагонами грузоподъёмностью 100 тонн. При этом каждый вагон может вместить не более 25 маленьких ящиков, каждый из которых весит 3 тонны. Большой ящик занимает место 5 маленьких и весит 35 тонн. Найдите минимальное число вагонов, необходимое для перевозки всех ящиков.

1155. В начале 2022 года Роман купил акции хорошо зарекомендовавшего себя акционерного общества. В конце каждого k -того года ($k = 1, 2, 3, \dots$), считая от года покупки акций, стоимость акций будет составлять $(60 \cdot k)$ тысяч рублей.

Роман не исключает возможности в конце каждого k -того года ($k = 1, 2, 3, \dots$), считая от года покупки акций, продать акции и в начале $(k + 1)$ -го года полученные от продажи деньги сразу вложить в банк под 8% годовых (имеющаяся на вкладе сумма в начале года увеличивается в конце года на 8%). При каком значении k достигается наибольшая сумма вклада к концу 20 года, считая от года покупки акций?

1156. Валентин Трофимович владеет акциями, которые стоят k^2 тыс. рублей в конце каждого k -ого года ($k = 1, 2, 3, \dots$). Он не исключает возможность в конце любого года продать их и положить в банк в начале следующего года под определённый процент, в результате чего сумма вклада увеличивается в $(1 + p)$ раз каждый год.

Валентин Трофимович хочет продать акции в конце такого года, чтобы в конце двадцать третьего года сумма вклада на его счёте была наибольшей. Расчёты показали, что для этого он должен продать акции строго в конце девятнадцатого года. При каких положительных значениях p это возможно?

Задания для контроля

Вариант 1

1. В банке взяли кредит на сумму 200 000 рублей под r % годовых (в конце года сумма долга увеличивается на r %) и выплатили его двумя платежами — сначала 130 000 рублей, а затем 115 000 рублей. Первый платёж был сделан после первого начисления процентов, второй — после второго. Найдите r .

2. В мае планируется взять кредит в банке на сумму 15 млн рублей на срок 6 лет. Условия возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по апрель необходимо выплатить часть долга так, чтобы на начало мая каждого года долг уменьшался на одну и ту же сумму по сравнению с предыдущим маем.

Найдите наименьшую возможную ставку r , если известно, что последний платёж составит не менее 3 млн рублей.

3. Гражданин Плюшкин выиграл по лотерейному билету в Британской национальной лотерее, в которой выигрыш не облагается налогом. Денег оказалось достаточно, чтобы купить предприятие за 800 тысяч долларов.

В конце первого года эксплуатации выяснилось, что за год было реализовано продукции на 550 тысяч долларов, из них 350 тысяч долларов составили затраты производства (стоимость сырья, ремонт оборудования и т. п.) и 100 тысяч долларов выплачено персоналу. Остальные деньги составили прибыль гражданина Плюшкина. Через сколько лет общая сумма прибыли Плюшкина в первый раз превысит или будет равна капиталу, вложенному в покупку предприятия, если каждый год масштаб реализации продукции повышается на 10 % от начального, затраты на производство повышаются на 6 % от первоначальных, а зарплата персонала увеличивается на 4 % от первоначальной?

4. Прибыль предприятия к концу года составила 15 030 000 рублей. Совет акционеров постановил распределить эту прибыль следующим образом: A рублей направить в фонд развития предприятия, 20 % от A использовать для выплаты дивидендов акционерам, а 30 % от A использовать на приобретение основных фондов. Этим прибыль предприятия будет исчерпана. Было решено выплачивать дивидендов по каждой из 160 имеющихся привилегированных акций в 1,25 раза больше, чем по каждой из 200 име-

ющихся обыкновенных акций. Сколько рублей будет выплачиваться по одной обыкновенной акции?

5. В банк помещён вклад 64 000 рублей под 25% годовых. В конце каждого из первых трёх лет (после начисления процентов) вкладчик дополнительно увеличивал вклад на одну и ту же фиксированную сумму. К концу четвёртого года после начисления процентов оказалось, что вклад составляет 385 000 рублей. На какую сумму (в рублях) ежегодно первые три года вкладчик увеличивал свой вклад?

Вариант 2

1. Несколько лет назад Михаил брал кредит в банке под 12% годовых на два года (в конце каждого года, имеющийся долг увеличивался на 12%) и выплатил его двумя платежами — сначала 79 200 рублей, а затем 112 000 рублей (первый платёж выполнялся после первого начисления процентов, второй — после второго начисления). Найдите, сколько рублей составлял этот кредит.

2. В августе планируется взять кредит в банке на сумму 15 млн рублей на срок 10 лет. Условия возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июль необходимо выплатить часть долга так, чтобы на начало августа каждого года долг уменьшался на одну и ту же сумму по сравнению с августом предыдущего года.

Найдите наименьшую возможную ставку r , если известно, что последний платёж составит не менее 1,65 млн рублей.

3. Акционерное общество израсходовало 15% своей годовой прибыли на реконструкцию производственной базы, 25% оставшихся денег потратило на строительство теннисного корта, итого выплатило 4 650 000 рублей дивидендов по акциям. После всех этих расходов осталась нераспределённой 0,25 прибыли. Сколько рублей составляла прибыль акционерного общества?

4. Прибыль предприятия к концу года составила 8 610 000 рублей. Совет акционеров постановил распределить эту прибыль следующим образом: A рублей направить в фонд развития предприятия, 80% от A использовать для выплаты дивидендов акционерам, а 25% от A использовать на выплаты премий сотрудникам. Тем самым прибыль оказалась полностью исчерпана. Кроме того, было решено дополнительно выпустить акции для продажи на бирже ценных бумаг на сумму, равную 40% суммы выплачен-

ных дивидендов, в количестве 200 обыкновенных и 200 привилегированных (в два раза более дорогих) акций. Определите стоимость (в рублях) одной привилегированной акции.

5. В банк был помещён вклад 1 200 000 рублей под 6 % годовых. Схема начисления процентов следующая: каждый год банк начисляет проценты на имеющуюся сумму вклада (то есть увеличивает сумму на 6 %). По истечении двух лет банк повышает годовой процент с 6 % до 10 %. Сколько лет после этого должен пролежать вклад, чтобы в итоге он увеличился по сравнению с первоначальным на 431 467,2 рубля (при условии, что процент изменяться больше не будет)?

Вариант 3

1. В октябре планируется взять кредит в банке на сумму 27 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 3 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по август каждый год необходимо выплатить часть долга;
- в октябре каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на октябрь предыдущего года.

Чему равна общая сумма выплат (в млн рублей) после полного погашения кредита, если сумма наибольшей годовой выплаты и наименьшей годовой выплаты долга составит 14,5125 млн рублей?

2. Альбина владеет двумя заводами, выпускающими одинаковую продукцию. На втором установлено современное оборудование, поэтому на нём может быть выпущено больше единиц продукции. Известно, что если рабочие первого завода трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара. А если рабочие второго завода трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $6t$ единиц товара. Ставка заработной платы рабочих за один час работы на заводе составляет 700 рублей. Альбина готова платить рабочим 42 350 000 рублей в неделю. На какое максимальное число единиц продукции за неделю она может рассчитывать?

3. Для покупки автомобиля Николай в конце года взял в банке кредит. В январе каждого последующего года банк увеличивает долг на 20%. В декабре первого и второго года после года взятия кредита Николай вносил платёж 2 млн рублей. В декабре третьего года после года взятия кредита для полного погашения кредита он внёс платёж 1 632 000 рублей. Найдите, сколько рублей составлял кредит.

4. Индивидуальный предприниматель Александр купил предприятие за 600 млн рублей. За первый год работы было реализовано продукции на 280 млн рублей. Из них 180 млн рублей было израсходовано на производство продукции, 40 млн рублей составили отчисления на заработную плату, налоги и другие отчисления. Остальные деньги составили чистую прибыль.

Через сколько лет работы чистая суммарная прибыль предприятия впервые превысит или станет равной покупной стоимости предприятия, если каждый год масштаб реализованной продукции, затраты на производство, отчисления на заработную плату, налоги и другие отчисления ежегодно соответственно увеличиваются на 15 %, 6 % и 3 % от их значений в первый год работы?

5. В начале 2020 года Борис купил акции хорошо зарекомендовавшего себя акционерного общества. В конце каждого k -того года ($k = 1, 2, 3, \dots$), считая от года покупки акций, стоимость акций будет составлять $(80 \cdot k)$ тысяч рублей.

Борис не исключает возможности в конце каждого k -того года ($k = 1, 2, 3, \dots$), считая от года покупки акций, продать акции и в начале $(k + 1)$ -го года полученные от продажи деньги сразу вложить в банк под 11% годовых (имеющаяся на вкладе сумма в начале года увеличивается в конце года на 11%). При каком значении k достигается наибольшая сумма вклада к концу 27-го года, считая от года покупки акций?

Вариант 4

1. В августе планируется взять кредит в банке на сумму 26 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 2 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по август каждый год необходимо выплатить часть долга;
- в августе каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на август предыдущего года.

Чему равна общая сумма выплат (в млн рублей) после полного погашения кредита, если сумма наибольшей годовой выплаты и наименьшей годовой выплаты долга составит 13,65 млн рублей?

2. Первичная входящая информация распределяется по серверам 1 и 2 и обрабатывается на них. С сервера 1 при объёме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит $30t$ Гбайт, а с сервера 2 при объёме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит $36t$ Гбайт обработанной информа-

ции. Каков наибольший объём выходящей информации при общем объёме входящей информации в 3904 Гбайт?

3. В конце года Михаил взял кредит в банке. В январе каждого последующего года банк увеличивает долг на 10%. В декабре первого и второго года после года взятия кредита Михаил вносил платёж 1,8 млн. рублей. В декабре третьего года после года взятия кредита для полного погашения кредита он внёс платёж 500 500 рублей. Найдите, сколько рублей составлял этот кредит.

4. Сергей вложил деньги в акции известного предприятия. Ежегодно он получал прибыль по акциям сначала $4\frac{6}{11}\%$ в год, потом 10% в год и, на-

конец, $4\frac{8}{23}\%$ в год и сразу же вкладывал деньги в те же акции. Известно, что количество лет по каждой процентной ставке было одно и то же. В результате стоимость акций увеличилась на 44% по сравнению с первоначальной. Найдите, сколько лет Сергей вкладывал деньги в акции этого предприятия.

5. Зоя Васильевна владеет облигациями, которые стоят n^2 тыс. рублей в конце каждого n -го года ($n = 1, 2, 3, \dots$). Она не исключает возможность в конце любого года продать их и положить в банк в начале следующего года под определённый процент, в результате чего сумма вклада увеличивается в $(1 + m)$ раз каждый год.

Зоя Васильевна хочет продать облигации в конце такого года, чтобы в конце двадцать шестого года сумма вклада на её счёте была наибольшей. Расчёты показали, что для этого она должна продать облигации строго в конце пятнадцатого года. При каких положительных значениях m это возможно?

§ 28. Уравнения и неравенства с параметром

Для успешного решения заданий по этой теме надо:

- знать графики и свойства основных элементарных функций: линейной, квадратичной, степенной, логарифмической, показательной, тригонометрических функций и модуля;
- владеть техникой построения графиков «механическими» преобразованиями (параллельный перенос, симметричное отображение, растяжение);
- владеть навыками построения графиков уравнений и неравенств (окружности, круга, полуплоскости, части плоскости, ограниченной элементарными функциями);
- уметь решать простейшие линейные, квадратичные, иррациональные, логарифмические, показательные и тригонометрические уравнения и неравенства, уравнения и неравенства с модулем;
- владеть методом интервалов решения рациональных и других неравенств, включая уравнения и неравенства с модулем;
- уметь применять метод декомпозиции, основанный на совпадении знаков различных выражений;
- уметь применять производную для построения графиков функций;
- владеть техникой преобразования алгебраических выражений.

1157. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\ln(6x-1) \cdot \sqrt{x^2 - 2x + 2a - a^2} = 0 \text{ имеет ровно один корень на отрезке } [0; 1].$$

1158. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2x-7} \cdot \ln(x^2 - 6x + 6a - a^2) = 0 \text{ имеет ровно один корень на отрезке } [3; 5].$$

1159. Найдите все значения a , при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - 2|x - a^4| - 2x \text{ имеет хотя бы одну точку максимума.}$$

1160. Найдите все значения a , при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - 5|x - a^2| - 13x \text{ имеет хотя бы одну точку максимума.}$$

1161. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-4)^2 = 4, \\ y = |x-a| + 3a \end{cases}$$

имеет ровно одно решение?

1162. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} (x+5)^2 + (y-5)^2 = 16, \\ y = 5a - |x-a| \end{cases}$$

имеет ровно одно решение?

1163. Найдите все значения параметра a , для которых неравенство

$$x^2 + 3x - 3 + |x - a| > 1 \text{ выполняется при всех } x.$$

1164. Найдите все значения параметра a , для которых неравенство

$$x^2 + 5x - 4 + |x - a| > 2 \text{ выполняется при всех } x.$$

1165. Найдите все значения a , при которых любое решение уравнения

$$6\sqrt{x-1} + 5\log_3(2x-1) + 11a = 0 \text{ принадлежит отрезку } [2; 5].$$

1166. Найдите все значения a , при которых любое решение уравнения

$$2\sqrt{9-4x} - 7\log_{\frac{1}{2}}\left(2 - \frac{1}{2}x\right) - 4a = 0 \text{ принадлежит отрезку } [-4; 0].$$

1167. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{a}{9^x} + a = -1 - \frac{9^{-2x}}{3} \text{ имеет ровно два корня, больший из которых не меньше } 0,5.$$

1168. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{a}{25^x} - a = 2 - \frac{25^{-2x}}{5} \text{ имеет ровно два корня, хотя бы один из которых не менее } \frac{1}{2}.$$

1169. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^8 + y^2 = (a+3)^2, \\ x^4 + y = |3a-1| \end{cases} \text{ имеет ровно 4 различных решения.}$$

1170. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^4 + 4y^2 = (a+2)^2, \\ x^2 + 2y = |4a-1| \end{cases} \text{ имеет ровно 4 различных решения.}$$

1171. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{-x^2 + 20x - 91} + ax = a + 3$$

имеет единственный корень.

1172. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{-x^2 - 12x - 27} + a = 3 - ax$$

имеет единственный корень.

1173. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 16x - 10y + 64 = 0, \\ y = |x - a| \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения?

1174. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} (x + 9)^2 + (y - 4)^2 = 16, \\ y = |x - a| \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения?

1175. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $a \sin^4 x - 2 \cos^2 x + 3a > 7$ выполняется для любого x .

1176. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $a \cos^4 x + 2 \sin^2 x + 4a > 5$ выполняется для любого x .

Задания для контроля

Вариант 1

1. Найдите все значения a , при каждом из которых функция $f(x) = x^2 - 3|x - a^2| + x$ имеет хотя бы одну точку максимума.
2. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x^2 - 2y^2 - xy - 5x + 10y)\sqrt{5 - y} = 0, \\ x + y - a = 0 \end{cases}$$
 имеет ровно два различных решения.
3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{2 - 5x} = a - |3x|$ имеет ровно два корня.
4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $2a - 4 + a(3 - \sin^2 x)^2 + \cos^2 x < 0$ выполняется для всех x .
5. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\sqrt{ax^3} - |a^3 + 2 - |2a^2 + a||x = 0$ имеет ровно один корень.

Вариант 2

1. Найдите все значения a , при каждом из которых функция $f(x) = x^2 - 6|x - a^2| + 2x$ имеет хотя бы одну точку максимума.
2. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \frac{(y^2 - 2xy + 4x - 4y + 4)\sqrt{x + 2}}{\sqrt{5 - y}} = 0, \\ a = 2x + y \end{cases}$$
 имеет ровно два различных решения.

3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{9 - 3x} = a - |1,5x|$ имеет более двух корней.
4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $3a - 5 + \sin^2 x + a(2 - \cos^2 x)^2 > 0$ выполняется для всех x .
5. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\sqrt{ax^6} - |a^3 + 4 - |4a + a^2||x^4 = 0$ имеет ровно один корень.

Вариант 3

1. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $2x^2 - |a + 2 - x| = |x + a + 2| - 6(a + 2)^2$ имеет единственный корень.
2. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\log_{6-x}(a + x + 3) = 2$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-1; 6)$.
3. Найдите, при каких значениях параметра k неравенство $(k - 2)x^2 + (2k - 5)x + 2k - 3 > 0$ выполняется хотя бы при одном $x < 2$.
4. Найдите, при каких значениях параметра a уравнение $(|x - 1| + |x + a|)^2 - 3(|x - 1| + |x + a|) + 4a(3 - 4a) = 0$ имеет ровно два решения.
5. Найдите все значения a , при каждом из которых ровно одно решение неравенства $x^2 + (10 + 3a)x + 2a^2 + 12a + 16 \leq 0$ удовлетворяет неравенству $ax(x - 8 - a) \leq 0$.

Вариант 4

1. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $x^2 - |x - 2a - 8| = |x + 2a + 8| - 0,5(2a + 8)^2$ имеет единственный корень.
2. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\log_{x+3}(a + x + 20) = 2$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $(-3; 1]$.
3. Найдите, при каких значениях параметра a неравенство $(a - 1)x^2 + (2a - 3)x > 3 - a$ выполняется хотя бы при одном $x < 1$.
4. Найдите, при каких значениях параметра a уравнение $(|x + 6| + |x + 3a|)^2 + (2a - 9)(|x + 6| + |x + 3a|) + 5a(9 - 7a) = 0$ имеет ровно два решения.
5. Найдите все значения a , при каждом из которых ровно одно решение неравенства $4x^2 - 4x - a^2 + 4a \leq 3$ удовлетворяет неравенству $ax(a - 2 + x) \geq 0$.

§ 29. Исследовательские задачи

1177. На участие в соревнованиях по бодибилдингу были заявлены m человек, которым были присвоены номера $1, 2, \dots, m$. В начале соревнований организаторы попросили каждого участника указать номер другого участника (ровно одного), которого он прогнозирует в качестве победителя соревнований.

а) Какое наибольшее число номеров участников могло быть не указано в результате опроса, если $m = 85$?

б) Может ли случиться так, чтобы ровно 4 номера участника были указаны не более одного раза в результате опроса, если $m = 10$?

в) Найдите наименьшее возможное число номеров участников, которые были указаны не более двух раз в результате опроса, если $m = 96$.

1178. На участие в соревнованиях по бодибилдингу были заявлены m человек, которым были присвоены номера $1, 2, \dots, m$. В начале соревнований организаторы попросили каждого участника указать номер другого участника (ровно одного), которого он прогнозирует в качестве победителя соревнований.

а) Какое наибольшее число номеров участников могло быть не указано в результате опроса, если $m = 77$?

б) Может ли случиться так, чтобы ровно 6 номеров участников были указаны не более одного раза в результате опроса, если $m = 12$?

в) Найдите наименьшее возможное число номеров участников, которые были указаны не более трёх раз в результате опроса, если $m = 164$.

1179. По старой системе оценивания выступления прыгуна в воду десятью судьями итоговой оценкой являлось среднее арифметическое всех оценок. По новой системе оценивания сначала отбрасывают две самые низкие и две самые высокие оценки. Итоговой оценкой считается среднее арифметическое оставшихся оценок. На проходящих соревнованиях судьи будут выставлять в качестве оценок целые числа от 0 до 14. После выступления одного из спортсменов все его оценки оказались различными.

а) Может ли разность оценок у этого спортсмена, полученных по старой системе оценивания и полученных по новой системе оценивания, быть равной $\frac{17}{450}$?

б) Может ли разность оценок у этого спортсмена, полученных по старой системе оценивания и полученных по новой системе оценивания, быть равной нулю?

в) Найдите наибольшее возможное значение модуля разности оценок этого спортсмена, вычисленных по разным системам оценивания.

1180. По старой системе оценивания выступления прыгуна в воду девятью судьями итоговой оценкой являлось среднее арифметическое всех оценок. По новой системе оценивания сначала отбрасывают две самые низкие и две самые высокие оценки. Итоговой оценкой считается среднее арифметическое оставшихся оценок. На проходящих соревнованиях судьи будут выставлять в качестве оценок целые числа от 0 до 15. После выступления одного из спортсменов все его оценки оказались различными.

а) Может ли разность оценок у этого спортсмена, полученных по старой системе оценивания и полученных по новой системе оценивания, быть равной $\frac{37}{1125}$?

б) Может ли разность оценок у этого спортсмена, полученных по старой системе оценивания и полученных по новой системе оценивания, быть равной нулю?

в) Найдите наибольшее возможное значение модуля разности оценок этого спортсмена, вычисленных по разным системам оценивания.

1181. Завод изготавливает n ($n > 1, n \in \mathbb{N}$) различных типов пылесоса «Ветерок». Каждый изготовленный пылесос нумеруется целым положительным числом K . Для отправки пылесосы упаковывают в контейнеры, содержащие n пылесосов, ровно по одному каждого из n типов пылесосов. При этом остаток от деления K на n с остатком указывает тип пылесоса, а неполное частное от деления K на n с остатком указывает порядковый номер контейнера, в который пылесос упаковывается для отправки (нумерация контейнеров начинается с нуля).

а) Найдите тип пылесоса, если $K = 4^{13}$, а число n всех различных типов пылесосов равно 7.

б) Может ли число 12 являться типом пылесоса с номером $K = 2321$ хотя бы при одном значении n ($1 < n < 1500, n \in \mathbb{N}$) числа всех различных типов пылесосов?

в) Существует ли такое натуральное m ($m \geq 2$), что пылесос с номером $K = 4^{3m}$ упаковывается в контейнер, номер которого меньше числа $(m + 63) \cdot 7^{m-2} \cdot 9^{m-1}$, если число n всех типов пылесосов равно 7?

1182. Завод изготавливает n ($n > 1, n \in \mathbb{N}$) различных типов холодильника «Марс». Каждый изготовленный холодильник нумеруется целым положительным числом K . Для отправки холодильники помещают в контейнеры (нумерация контейнеров начинается с нуля), содержащие

n холодильников, ровно по одному каждого из n типов холодильников. При этом остаток от деления K на n с остатком указывает тип холодильника, а неполное частное от деления K на n с остатком указывает порядковый номер контейнера, в который холодильник помещают для отправки.

а) Найдите тип холодильника, если $K = 2^{14}$, а число n всех различных типов холодильников равно 9.

б) Может ли число 14 являться типом холодильника с номером $K = 1597$ хотя бы при одном значении n ($1 < n < 1400, n \in N$) числа всех различных типов холодильников?

в) Существует ли такое натуральное m ($m \geq 2$), что пылесос с номером $K = 2^{6m}$ упаковывается в контейнер, номер которого меньше числа $(m + 63) \cdot 9^{m-2} \cdot 7^{m-1}$, если число n всех типов пылесосов равно 9?

1183. Все телефонные номера в небольшом городе — шестизначные. В районе «Центральный» первые две цифры любого телефонного номера — двойки, а остальные образуют десятичную запись четырёхзначного натурального числа, в которой не более одного нуля. В районе «Западный» первые две цифры любого телефонного номера — тройки, а остальные образуют десятичную запись четырёхзначного натурального числа, в которой не менее двух нулей. В районе «Северный» первые две цифры любого телефонного номера — пятёрки, а остальные образуют десятичную запись четырёхзначного натурального числа, в которой ровно одна цифра равна 9 и в ней содержится не более одного нуля.

а) Найдите наибольшее возможное число номеров в районе «Центральный».

б) Найдите наибольшее возможное число номеров в районе «Западный».

в) Найдите наибольшее возможное число номеров в районе «Северный».

1184. Все телефонные номера на крупном металлургическом заводе — пятизначные. В отделе «Безопасность» цифры любого телефонного номера образуют десятичную запись пятизначного натурального числа, в которой ровно две цифры — нули. В отделе «Управление» цифры любого телефонного номера образуют десятичную запись пятизначного натурального числа, в которой нет двоек, единиц и последняя цифра 5. В отделе «Оцинковка» цифры любого телефонного номера образуют десятичную запись пятизначного натурального числа, в которой ровно две цифры равны 9 и в ней содержится не более одного нуля.

а) Найдите наибольшее возможное число номеров в отделе «Безопасность».

б) Найдите наибольшее возможное число номеров в отделе «Управление».

в) Найдите наибольшее возможное число номеров в отделе «Оцинковка».

1185. Натуральные числа от 1 до n в порядке возрастания записаны в строчку. Под ними записаны те же числа в другом порядке. Можно ли добиться того, чтобы сумма каждого числа и записанного под ним была бы точным квадратом:

а) при $n = 35$;

б) при $n = 11$;

в) при $n = 2022$?

1186. Натуральные числа от 1 до n в порядке возрастания записаны в строчку. Под ними записаны те же числа в другом порядке. Можно ли добиться того, чтобы сумма каждого числа и записанного под ним была бы точным квадратом:

а) при $n = 48$;

б) при $n = 4$;

в) при $n = 2023$?

1187. Учитель математики попросила учеников написать последовательность из 80 различных натуральных чисел, сумма которых равна 3250.

а) Существует ли такая последовательность?

б) Может ли число 99 быть членом указанной последовательности?

в) Найдите наименьшее возможное количество чисел, кратных 11, в указанной последовательности.

1188. Учитель математики попросила учеников написать последовательность из 70 различных натуральных чисел, сумма которых равна 2505.

а) Существует ли такая последовательность?

б) Может ли число 98 быть членом указанной последовательности?

в) Найдите наименьшее количество чисел, кратных 9, в указанной последовательности.

1189. Каждый из 90 сотрудников издательства летом отдыхал в Сочи, Геленджике или Анапе. 83 сотрудника отдыхали в Сочи, 75 отдыхали в Геленджике и 57 — в Анапе.

а) Найдите наибольшее возможное число сотрудников, каждый из которых отдыхал и в Сочи, и в Геленджике, и в Анапе.

б) Найдите наименьшее возможное число сотрудников, каждый из которых отдыхал и в Сочи, и в Геленджике.

в) Найдите наименьшее возможное число сотрудников, каждый из которых отдыхал и в Сочи, и в Геленджике, и в Анапе.

1190. Каждый из 110 сотрудников банка зимой отдыхал в Домбае, Архызе или Приэльбрусье. 100 сотрудников отдыхали в Домбае, 90 отдыхали в Архызе и 77 — в Приэльбрусье.

а) Найдите наибольшее возможное число сотрудников, каждый из которых отдыхал и в Домбае, и в Архызе, и в Приэльбрусье.

б) Найдите наименьшее возможное число сотрудников, каждый из которых отдыхал и в Домбае, и в Архызе.

в) Найдите наименьшее возможное число сотрудников, каждый из которых отдыхал и в Домбае, и в Архызе, и в Приэльбрусье.

1191. На автобус Бирюково-Берёзовка садятся n пассажиров. Между этими посёлками есть четыре промежуточные остановки, на которых некоторые пассажиры выходят согласно купленному билету, а новые пассажиры в автобус не садятся.

а) Найдите количество всех возможных вариантов выхода пассажиров на промежуточных остановках и конечной остановке Берёзовка, если учитывать, какие именно пассажиры выходят, при $n = 6$.

б) Найдите количество всех возможных вариантов выхода пассажиров на промежуточных остановках и конечной остановке Берёзовка, если учитывать, какие именно пассажиры выходят, а также то, что на конечной остановке выходят не менее трёх пассажиров, при $n = 6$.

в) Найдите количество всех возможных вариантов выхода пассажиров на промежуточных остановках и конечной остановке Берёзовка, если учитывать только количество выходящих пассажиров, при $n = 20$.

1192. На автобус Крюково-Грибное садятся n пассажиров. Между этими посёлками есть четыре промежуточные остановки, на которых некоторые пассажиры выходят согласно купленному билету, а новые пассажиры в автобус не садятся.

а) Найдите количество всех возможных вариантов выхода пассажиров на промежуточных остановках и конечной остановке Грибное, если учитывать, какие именно пассажиры выходят и на первой остановке после Крюково никто не выходит, при $n = 6$.

б) Найдите количество всех возможных вариантов выхода пассажиров на промежуточных остановках и конечной остановке Грибное, если учитывать, какие именно пассажиры выходят, а также то, что на первой

остановке после Крюково никто не выходит, а на конечной остановке выходит ровно один пассажир, при $n = 6$.

в) Найдите количество всех возможных вариантов выхода пассажиров на промежуточных остановках и конечной остановке Грибное, если учитывать только количество выходящих пассажиров, при $n = 19$.

1193. В течение n дней Ашот записывал на листке бумаги натуральные числа, каждое из которых меньше 10. При этом каждый день, начиная со второго, количество записанных чисел становилось меньше чем в предыдущий день, а их сумма становилась больше.

а) Может ли сумма чисел, которые были записаны на доске во второй день, быть равной 9, если $n = 11$?

б) Может ли среднее арифметическое всех чисел, записанных в какой-нибудь день быть равным 5,5, если $n = 11$?

в) Найдите наименьшее возможное значение суммы всех записанных чисел, если $n = 11$.

1194. В течение m дней Артур записывал на листке бумаги натуральные числа, каждое из которых меньше 12. При этом каждый день, начиная со второго, количество записанных чисел становилось меньше чем в предыдущий день, а их сумма становилась больше.

а) Может ли количество чисел, которые были записаны на доске во второй день, быть равным 9, если $m = 11$?

б) Может ли среднее арифметическое всех чисел, записанных в какой-нибудь день быть кратным целому числу 3, если $m = 11$?

в) Найдите наименьшее возможное значение суммы всех записанных чисел, если $m = 11$.

1195. Дана бесконечная возрастающая последовательность (a_n) ($n \in \mathbb{N}$), содержащая все натуральные числа, имеющие вид $4k - 1$ ($k \in \mathbb{N}$) и не содержащая другие числа.

а) Найдите наименьшую сумму 99 чисел последовательности (a_n) ($n \in \mathbb{N}$), каждое из которых больше числа 19.

б) Найдите наименьшую сумму квадратов 23 чисел последовательности (a_n) ($n \in \mathbb{N}$), каждое из которых больше числа 15.

в) Верно ли, что дробь

$$\frac{(a_1^2 + a_3^2 + \dots + a_{2n-1}^2) - (a_2^2 + a_4^2 + \dots + a_{2n}^2)}{401}$$

401

является целым числом при $n = 100$?

1196. Дана бесконечная возрастающая последовательность (a_n) ($n \in N$), содержащая все натуральные числа, имеющие вид $4k - 3$ ($k \in N$) и не содержащая другие числа.

а) Найдите наименьшую сумму 109 чисел последовательности (a_n) ($n \in N$), каждое из которых больше числа 13.

б) Найдите наименьшую сумму кубов 18 чисел последовательности (a_n) ($n \in N$), каждое из которых больше числа 17.

в) Верно ли, что дробь

$$\frac{(a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-2} a_{n-1}) - (a_1 a_3 + a_2 a_4 + \dots + a_{n-2} a_n)}{195}$$

является целым числом при $n = 100$?

Задания для контроля

Вариант 1

1. Девять членов жюри оценивают выступление танцевальной пары. Каждый из них выставляет оценки — целое число от 0 до 15 включительно. Известно, что все члены жюри поставили различные оценки. По старой системе оценивания оценка пары определяется как среднее арифметическое всех оценок членов жюри. По новой системе оценивания оценка пары определяется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и считается среднее арифметическое семи оставшихся оценок.

а) Может ли разность оценок, полученных парой по старой и по новой системам оценивания, быть равна $\frac{2}{49}$?

б) Может ли разность оценок, полученных парой по старой и по новой системам оценивания, быть равна $\frac{1}{63}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение модуля разности оценок этого спортсмена, вычисленных по этим системам оценивания.

2. Завод изготавливает m ($m > 1, m \in N$) различных типов пылесоса «Буря». Каждый изготовленный пылесос нумеруется целым положительным числом T . Для отправки пылесосы упаковывают в контейнеры (нумерация контейнеров начинается с нуля), содержащие m пылесосов, ровно по одному каждого из m типов пылесосов. При этом остаток от деления T на m с остатком указывает тип пылесоса, а неполное частное от деления

T на m с остатком указывает порядковый номер контейнера, в который пылесос упаковывается для отправки.

а) Найдите тип пылесоса, если $T = 3^{12}$, а число m всех различных типов пылесосов равно 11.

б) Может ли число 14 являться типом пылесоса с номером $T = 997$ хотя бы при одном значении m ($m > 1, m \in \mathbb{N}$) числа всех различных типов пылесосов?

в) Существует ли такое натуральное k ($k \geq 2$), что пылесос с номером $T = 3^{5k}$ упаковывается в контейнер, номер которого меньше числа $(k + 242) \cdot 11^{k-2} \cdot 22^{k-1}$, если число m всех типов пылесосов равно 11?

3. Среди четырёхзначных чисел найдите количество чисел, содержащих в своей десятичной записи

а) ровно одну цифру 1;

б) ровно две цифры 1;

в) хотя бы одну цифру 1.

4. В одном из городов 82% жителей говорят по-итальянски, 78% — по-французски и 73% — по-испански. При этом в этом городе нет жителей, говорящих на других языках, и каждый житель говорит хотя бы на одном из этих языков.

а) Какой наибольший процент жителей города может говорить и по-итальянски, и по-французски, и по-испански?

б) Какой наименьший процент жителей города может говорить и по-итальянски, и по-французски?

в) Какой наименьший процент жителей города может говорить и по-итальянски, и по-французски, и по-испански?

5. В течение m дней Лейла записывала на листке бумаги натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день, начиная со второго, количество записанных чисел становилось меньше, чем в предыдущий день, а их сумма становилась больше.

а) Может ли сумма чисел, которые были записаны на доске во второй день, быть равной 5, если $m = 6$?

б) Может ли среднее арифметическое всех чисел, записанных в какой-нибудь день, быть целым числом, кратным 3, если $m = 6$?

в) Найдите наименьшее возможное значение суммы всех записанных чисел, если $m = 6$.

Вариант 2

1. Восемь членов жюри оценивают выступление вокального коллектива. Каждый из них выставляет оценки — целое число от 0 до 13 включительно. Известно, что все члены жюри поставили различные оценки. По старой системе оценивания оценка коллектива определяется как среднее арифметическое всех оценок членов жюри. По новой системе оценивания оценка коллектива определяется следующим образом: отбрасываются две наименьших и две наибольших оценки и считается среднее арифметическое четырех оставшихся оценок.

а) Может ли разность оценок у этого спортсмена, полученных по старой и по новой системам оценивания, быть равной $\frac{13}{60}$?

б) Может ли разность оценок у этого спортсмена, полученных по старой и по новой системам оценивания, быть равной нулю?

в) Найдите наибольшее возможное значение модуля разности оценок этого спортсмена, вычисленных по разным системам оценивания.

2. Завод изготавливает m ($m > 1, m \in N$) различных типов холодильника «Иней». Каждый изготовленный холодильник нумеруется целым положительным числом T . Для отправки холодильники упаковывают в контейнеры (нумерация контейнеров начинается с нуля), содержащие m холодильников, ровно по одному каждого из m типов холодильников. При этом остаток от деления T на m с остатком указывает тип холодильника, а неполное частное от деления T на m с остатком указывает порядковый номер контейнера, в который холодильник упаковывается для отправки.

а) Найдите тип холодильника, если $T = 5^{13}$, а число m всех различных типов холодильников равно 22.

б) Может ли число 10 являться типом холодильника с номером $T = 1061$ хотя бы при одном значении m ($1 < m < 950, m \in N$) числа всех различных типов холодильников?

в) Существует ли такое натуральное k ($k \geq 2$), что пылесос с номером $T = 5^{5k}$ упаковывается в контейнер, номер которого меньше числа $(k + 3124) \cdot 22^{k-2} \cdot 142^{k-1}$, если число m всех типов пылесосов равно 22?

3. Среди четырехзначных чисел найдите количество чисел, содержащих в своей десятичной записи

а) ровно одну цифру 0;

б) ровно две цифры 0;

в) хотя бы одну цифру 0.

4. В одном из городов 87% жителей говорят по-итальянски, 77% — по-французски и 60% — по-испански. При этом в этом городе нет жителей, говорящих на других языках, и каждый житель говорит хотя бы на одном из этих языков.

а) Какой наибольший процент жителей города может говорить и по-итальянски, и по-французски, и по-испански?

б) Какой наименьший процент жителей города может говорить и по-итальянски, и по-французски?

в) Какой наименьший процент жителей города может говорить и по-итальянски, и по-французски, и по-испански?

5. В течение m дней Зухра записывала на листке бумаги натуральные числа, каждое из которых меньше 8. При этом каждый день, начиная со второго, количество записанных чисел становилось меньше, чем в предыдущий день, а их сумма становилась больше.

а) Может ли количество чисел, которые были записаны на доске во второй день, быть равным 5, если $m = 7$?

б) Может ли среднее арифметическое всех чисел, записанных в какой-нибудь день, быть целым числом, кратным 3, если $m = 7$?

в) Найдите наименьшее возможное значение суммы всех записанных чисел, если $m = 7$.

Вариант 3

1. На психологический тренинг пришли m человек. В начале работы психолог попросил каждого пришедшего написать записку с вопросом к любому другому из участников (ровно одному). После этого в группу A были отобраны те, кто получил не более 1 вопроса.

а) Какое наибольшее число участников могло оказаться в группе A , если $m = 100$?

б) Какое наименьшее число участников могло оказаться в группе A , если $m = 144$?

в) Какое наименьшее число участников могло оказаться в группе A , если $m = 97$, а в группу A вошли те, кто не получил ни одного вопроса, и половина тех, кто получил ровно один вопрос (если ровно один вопрос получило нечётное число человек, то берётся наибольшее число, не превосходящее половину)?

2. Натуральные числа от 1 до n в порядке возрастания записаны в строку. Под ними записаны те же числа в другом порядке. Можно ли добиться

того, чтобы сумма каждого числа и записанного под ним была бы точным квадратом:

- а) при $n = 7$;
- б) при $n = 12$;
- в) при $n = 2015$?

3. На доске написано 100 различных натуральных чисел, сумма которых равна 5130.

- а) Может ли среди них быть число 190?
- б) Может ли там не быть числа 17?
- в) Какое наименьшее количество чисел, кратных 17, может быть на доске?

4. В пансионат «Южный» надо поселить n мальчиков. Для этого выделены четыре номера: 1, 2, 3, 4.

а) Найдите количество всех возможных вариантов поселения, если учитывать, кто именно будет заселяться в выделенные номера, при $n = 7$.

б) Найдите количество всех возможных вариантов поселения, если учитывать, кто именно будет заселяться в выделенные номера и то, что в номер 4 будет поселён ровно один мальчик, при $n = 7$.

в) Найдите количество всех возможных вариантов поселения, если учитывать только количество мальчиков, поселяемых в выделенные номера, при $n = 15$.

5. Дана бесконечная возрастающая последовательность (a_n) ($n \in N$), содержащая все натуральные числа, имеющие вид $6k - 1$ ($k \in N$) и не содержащая другие числа.

а) Найдите наибольшую сумму 150 чисел последовательности (a_n) ($n \in N$), каждое из которых меньше числа 959.

б) Найдите наименьшую сумму кубов 16 чисел последовательности (a_n) ($n \in N$), каждое из которых больше числа 23.

в) Верно ли, что дробь

$$\frac{(a_1 a_3 + a_2 a_4 + \dots + a_{n-3} a_{n-1}) - (a_1 a_4 + a_2 a_5 + \dots + a_{n-3} a_n)}{245}$$

является целым числом при $n = 84$?

Вариант 4

1. На психологическом тренинге каждый из n его участников ($n \in N$) должен задать какой-нибудь вопрос другому и ровно одному участнику этого тренинга. Присвоим всем участникам тренинга номера $1, 2, \dots, n$, и если участник с номером i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) задал вопрос участнику с но-

мером j ($j \in \{1, 2, \dots, n\}, j \neq i$), то номер j назовём соответствующим для номера i . Всякое подмножество P множества участников тренинга назовём «закрытым», если соответствующий номер для любого номера участника из P не содержится во множестве номеров участников из P . Для отчётности по проведению тренинга психолог должен подготовить таблицу из двух строк, в первой строке которой расположены номера участников — $1, 2, \dots, n$, а во второй строке под этими номерами расположены соответствующие им номера.

а) Сколько всего различных таблиц можно составить по такому же принципу, как они составляются для отчётности психологом, если $n = 5$?

б) Какое наибольшее число участников может быть в «закрытом» подмножестве, если $n = 20$?

в) Может ли случиться так, что подмножество P , состоящее из сорока участников тренинга было «закрытым», а при добавлении к P любого другого участника, не входящего в P , получается множество, которое закрытым уже не является, если $n = 120$?

2. Натуральные числа от 1 до n в порядке возрастания записаны в строчку. Под ними записаны те же числа в другом порядке. Можно ли добиться того, чтобы сумма каждого числа и записанного под ним была бы точным квадратом:

а) при $n = 6$;

б) при $n = 13$;

в) при $n = 2014$?

3. На доске написано 90 различных натуральных чисел, сумма которых равна 4105.

а) Может ли среди них быть число 120?

б) Может ли там не быть числа 19?

в) Какое наименьшее количество чисел, кратных 19, может быть на доске?

4. В пансионат «Лазурный» надо поселить n девочек. Для этого выделены четыре номера: 1, 2, 3, 4.

а) Найдите количество всех возможных вариантов поселения, если учитывать, кто именно будет заселяться в выделенные номера, при $n = 8$.

б) Найдите количество всех возможных вариантов поселения, если учитывать, кто именно будет заселяться в выделенные номера и то, что номер 4 не будет заселяться вообще, при $n = 8$.

в) Найдите количество всех возможных вариантов поселения, если учитывать только количество девочек, поселяемых в выделенные номера, при $n = 17$.

Глава III. Решения избранных заданий

1. Смешанную дробь представляем в виде обыкновенной, а затем приводим дроби к общему знаменателю:

$$1\frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{7}{5} + \frac{3}{4} = \frac{7 \cdot 4 + 5 \cdot 3}{20} = \frac{43}{20} = \frac{43 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{215}{100} = 2,15.$$

5. Смешанную дробь представляем в виде обыкновенной, а затем пользуемся правилом деления обыкновенных дробей:

$$7\frac{3}{4} : \frac{31}{2} = \frac{31}{4} : \frac{31}{2} = \frac{31}{4} \cdot \frac{2}{31} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0,5.$$

9. Смешанную дробь представляем в виде обыкновенной, а затем в скобках приводим дроби к общему знаменателю:

$$\left(-5\frac{7}{8} - \frac{3}{4}\right) \cdot 16 = \left(-\frac{47}{8} - \frac{3}{4}\right) \cdot 16 = \left(-\frac{53}{8}\right) \cdot \frac{16}{1} = -\frac{53 \cdot 16}{8} = -53 \cdot 2 = -106.$$

13. Находим сначала разность дробей в скобках, приводя их к общему знаменателю, а затем применяем правило деления обыкновенных дробей:

$$\left(\frac{5}{8} - \frac{11}{12}\right) : \frac{7}{48} = \left(\frac{15}{24} - \frac{22}{24}\right) \cdot \frac{48}{7} = \left(-\frac{7}{24}\right) \cdot \frac{48}{7} = -\frac{7 \cdot 48}{24 \cdot 7} = -2.$$

17. Применяя формулу разности квадратов, получаем:

$$(153^2 - 117^2) : 270 = ((153 - 117) \cdot (153 + 117)) : 270 = (153 - 117) \cdot (153 + 117) : 270 = 36 \cdot 270 : 270 = 36.$$

21. Сначала выполняем умножение десятичных дробей, а затем вычитание:

$$0,13 \cdot 0,5 - 0,04 = 0,065 - 0,04 = 0,025.$$

25. Находим сначала разность в знаменателе, а затем умножаем числитель и знаменатель полученного частного на 10, а потом ещё на 2:

$$\frac{2,8}{1,7 - 6,7} = \frac{2,8}{-5} = -\frac{2,8}{5} = -\frac{28}{50} = -\frac{56}{100} = -0,56.$$

29. Находим в столбик или в уме: $1,072 + 3,228 = 4,3$.

Далее делимое, являющееся десятичной дробью, запишем в виде обыкновенной дроби: $4,3 : \frac{43}{5} = 4,3 \cdot \frac{5}{43} = \frac{43}{10} \cdot \frac{5}{43} = 0,5$.

5. Дана бесконечная возрастающая последовательность (a_n) ($n \in N$), содержащая все натуральные числа, имеющие вид $6k - 5$ ($k \in N$) и не содержащая другие числа.

а) Найдите наибольшую сумму 180 чисел последовательности (a_n) ($n \in N$), каждое из которых меньше числа 1319.

б) Найдите наименьшую сумму квадратов 32 чисел последовательности (a_n) ($n \in N$), каждое из которых больше числа 25.

в) Верно ли, что дробь

$$\frac{(a_2a_4 + a_3a_5 + \dots + a_{n-3}a_{n-1}) - (a_2a_5 + a_3a_6 + \dots + a_{n-3}a_n)}{301}$$

является целым числом при $n = 103$?

sbornik.me

33. Выполняем сначала деление десятичных дробей, представляя их в виде обыкновенных:

$$(3,7 : 1,15) \cdot \frac{23}{37} = \left(\frac{37}{10} : \frac{115}{100} \right) \cdot \frac{23}{37} = \left(\frac{37}{10} \cdot \frac{100}{115} \right) \cdot \frac{23}{37} = \frac{37 \cdot 100 \cdot 23}{10 \cdot 115 \cdot 37} = 2.$$

37. Находим сначала сумму в скобках, приводя дроби к общему знаменателю:

$$63 \cdot \left(\frac{7}{18} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right) = 63 \cdot \left(\frac{7}{18} + \frac{9}{18} - \frac{12}{18} \right) = 63 \cdot \frac{4}{18} = 63 \cdot \frac{2}{9} = 14.$$

41. Всего на складе $217 + 315 = 532$ бочки. Чтобы получить число машин, делим с остатком общее число бочек (532) на число бочек в одной машине (85). Получаем $532 : 85 = 6$ (остаток 22). Итак, 6 машин не хватит, значит, нужно 7 машин.

45. 10 блокнотов стоят 64 рубля. У нас ещё останется $80 - 64 = 16$ рублей. На них можно купить 2 блокнота, а 3 уже не купишь. Значит, всего можно купить не более 12 блокнотов.

49. За месяц в школе используется 1200 листов бумаги, поэтому за 3 месяца израсходуют $1200 \cdot 3 = 3600$ листов. В каждой пачке 250 листов, поэтому необходимо $3600 : 250 = 14,4$ пачек. Ясно, что дробное число пачек никто продавать не станет, поэтому придётся купить 15 пачек бумаги.

53. Посчитаем, сколько пакетов яблочного сока (по 34 рубля за пакет) можно купить на 200 рублей. Для этого делим с остатком наши деньги (200 рублей) на цену пакета (34 рубля). $200 : 34 = 5$ (ост. 30). Получилось 5 пакетов сока. В рамках рекламной акции покупатель получит за 4 пакета ещё 2 пакета бесплатно. Всего он сможет получить $5 + 2 = 7$ пакетов сока.

57. Определим, сколько роз можно купить на 550 рублей. Для этого разделим с остатком 550 (деньги Сергея) на 45 (цена розы): $550 : 45 = 12$ (ост. 10). Денег у Сергея хватит на 12 роз и 10 рублей останется. Но букет из 12 роз нам не подходит! Нужно нечётное число роз. Наибольшее подходящее число — это 11.

61. На 1 кг слив необходимо 1,4 кг сахара, поэтому на 23 кг слив нужно $23 \cdot 1,4 = 32,2$ кг сахара. В одной упаковке один килограмм, поэтому 32 упаковок не хватит. А 33 будет в самый раз.

65. Посчитаем, сколько ампул понадобится 25 больным в день: $25 \cdot 3 = 75$ ампул. В каждой упаковке 16 ампул. Чтобы узнать требуемое число упаковок, делим с остатком необходимое количество ампул (75) на число ампул в упаковке (16). Получаем $75 : 16 = 4$ (ост. 11). Итак, нужно 4 упаковки и ещё 11 ампул. Поэтому придётся заказать 5 упаковок.

33. Выполняем сначала деление десятичных дробей, представляя их в виде обыкновенных:

$$(3,7 : 1,15) \cdot \frac{23}{37} = \left(\frac{37}{10} : \frac{115}{100} \right) \cdot \frac{23}{37} = \left(\frac{37}{10} \cdot \frac{100}{115} \right) \cdot \frac{23}{37} = \frac{37 \cdot 100 \cdot 23}{10 \cdot 115 \cdot 37} = 2.$$

37. Находим сначала сумму в скобках, приводя дроби к общему знаменателю:

$$63 \cdot \left(\frac{7}{18} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right) = 63 \cdot \left(\frac{7}{18} + \frac{9}{18} - \frac{12}{18} \right) = 63 \cdot \frac{4}{18} = 63 \cdot \frac{2}{9} = 14.$$

41. Всего на складе $217 + 315 = 532$ бочки. Чтобы получить число машин, делим с остатком общее число бочек (532) на число бочек в одной машине (85). Получаем $532 : 85 = 6$ (остаток 22). Итак, 6 машин не хватит, значит, нужно 7 машин.

45. 10 блокнотов стоят 64 рубля. У нас ещё останется $80 - 64 = 16$ рублей. На них можно купить 2 блокнота, а 3 уже не купишь. Значит, всего можно купить не более 12 блокнотов.

49. За месяц в школе используется 1200 листов бумаги, поэтому за 3 месяца израсходуют $1200 \cdot 3 = 3600$ листов. В каждой пачке 250 листов, поэтому необходимо $3600 : 250 = 14,4$ пачек. Ясно, что дробное число пачек никто продавать не станет, поэтому придётся купить 15 пачек бумаги.

53. Посчитаем, сколько пакетов яблочного сока (по 34 рубля за пакет) можно купить на 200 рублей. Для этого делим с остатком наши деньги (200 рублей) на цену пакета (34 рубля). $200 : 34 = 5$ (ост. 30). Получилось 5 пакетов сока. В рамках рекламной акции покупатель получит за 4 пакета ещё 2 пакета бесплатно. Всего он сможет получить $5 + 2 = 7$ пакетов сока.

57. Определим, сколько роз можно купить на 550 рублей. Для этого разделим с остатком 550 (деньги Сергея) на 45 (цена розы): $550 : 45 = 12$ (ост. 10). Денег у Сергея хватит на 12 роз и 10 рублей останется. Но букет из 12 роз нам не подходит! Нужно нечётное число роз. Наибольшее подходящее число — это 11.

61. На 1 кг слив необходимо 1,4 кг сахара, поэтому на 23 кг слив нужно $23 \cdot 1,4 = 32,2$ кг сахара. В одной упаковке один килограмм, поэтому 32 упаковок не хватит. А 33 будет в самый раз.

65. Посчитаем, сколько ампул понадобится 25 больным в день: $25 \cdot 3 = 75$ ампул. В каждой упаковке 16 ампул. Чтобы узнать требуемое число упаковок, делим с остатком необходимое количество ампул (75) на число ампул в упаковке (16). Получаем $75 : 16 = 4$ (ост. 11). Итак, нужно 4 упаковки и ещё 11 ампул. Поэтому придётся заказать 5 упаковок.

69. Разделим 44 на 5 с остатком. Получится 8 и 4 в остатке. Восемь этажей заполнится полностью и ещё 4 квартиры из этих 44 останутся на 9-й этаж. Значит, Пётр Иванович живёт на 9-м этаже.

73. Одна американская миля равна $1609 \text{ м} = 1,609 \text{ км}$. Скорость автомобиля 47 миль в час соответствует скорости $1,609 \cdot 47 = 75,623 \text{ км в час}$. Округляем ответ до целого числа по математическим правилам. Цифра в разряде десятых равна 6, поэтому округляем в большую сторону, с избытком: $75,623 \approx 76$.

77. Так как минуты времени отправления и прибытия одинаковые, можно их уменьшить и заменить на 00. Нужно посчитать, сколько часов пройдёт с 10:00 до 6:00 следующего дня. В первый день пройдёт $24 - 10 = 14$ часов, во второй — ещё 6 часов, всего $14 + 6 = 20$ часов.

81. Купленные 3,3 кг помидоров стоят $40 \cdot 3,3 = 132$ рубля. Сдача составляет $1000 - 132 = 868$ рублей.

85. Одна разовая поездка стоит 7 рублей, поэтому 48 разовых поездок стоят $48 \cdot 7 = 336$ рублей. Купив проездной за 280 рублей, Маша сэкономила $336 - 280 = 56$ рублей.

89. Найдём разницу показаний счётчика. Первые три цифры одинаковы, их можно не учитывать. Разница равна $308 - 25 = 283$. Найдём, сколько рублей нужно заплатить за 283 киловатт-часа: $283 \cdot 2,1 = 594,3$ рубля.

93. Стоимость платья без скидки составляет 100%, скидка равна 35%. Стоимость платья со скидкой составляет $100\% - 35\% = 65\%$ от цены без скидки. Найдём 65% от 2120 рублей. Чтобы найти проценты от числа, нужно это число разделить на 100 и умножить на число процентов. $2120 : 100 \cdot 65 = 1378$ рублей.

97. Не прошли ОТК 8% станков, поэтому прошли ОТК $100\% - 8\% = 92\%$ станков. Для того чтобы найти проценты от числа, нужно разделить это число на 100 и умножить на число процентов. 92% от 180 000 составляют $180\,000 : 100 \cdot 92 = 165\,600$ станков. Продали 45% от этого количества, то есть $165\,600 : 100 \cdot 45 = 74\,520$ станков.

101. Стоимость билета для ребёнка составляет 50% от 260 рублей, то есть $260 : 100 \cdot 50 = 130$ рублей. 17 детских билетов по 130 рублей стоят $130 \cdot 17 = 2210$ рублей. 2 взрослых билета по 260 рублей стоят $260 \cdot 2 = 520$ рублей. Билеты на всю группу стоят $2210 + 520 = 2730$ рублей.

105. После переоценки блокнот стоит $100\% + 10\% = 110\%$ от начальной цены, что составляет $6 : 100 \cdot 110 = 6,6$ рублей. Посчитаем, сколько блокнотов по цене 6,6 рублей можно купить на 80 рублей.

$80 : 6,6 = 800 : 66 = 12$ (остаток 8). На 80 рублей можно купить 12 блокнотов.

109. Стоимость одного учебника по математике равна $2100 : 15 = 140$ рублей. После подорожания он будет стоить $100\% + 10\% = 110\%$ от начальной цены, что составляет $\frac{110}{100} \cdot 140 = 154$ рубля. Посчитаем, сколько учебников по цене 154 рубля можно купить на 2100 рублей: $2100 : 154 = 13\frac{98}{154}$ (неполное частное равно 13 и остаток 98). На 2100 рублей можно купить 13 учебников.

113. Найдём, сколько рублей будут составлять проценты по кредиту. 12% от 24 000 составляют $24\,000 : 100 \cdot 12 = 2880$ рублей. Значит, всего Анна Владимировна должна заплатить за год $24\,000 + 2880 = 26\,880$ рублей. Месяцев в году 12. Каждый месяц она должна вносить $26\,880 : 12 = 2240$ рублей.

117. По графику (см. рис. 495) определяем, что за первые два дня выпало 30 мм осадков. Последующие два дня — 3-го числа и 4-го числа — осадки не выпадали. За последующие 6 дней — 5-го, 6-го, 7-го, 8-го, 9-го и 10-го — выпало ещё 30 мм осадков. Значит, за первые 10 дней выпало $30 + 30 = 60$ мм осадков.

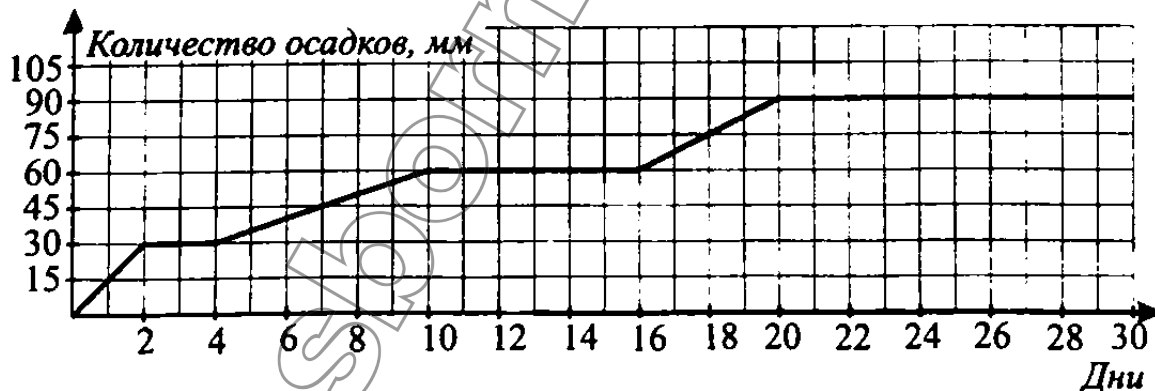


Рис. 495

121. Находим на оси абсцисс отметку, соответствующую 15 часам 7 октября, по этой отметке находим искомую массу продукции: 400 кг (см. рис. 496 на с. 413).

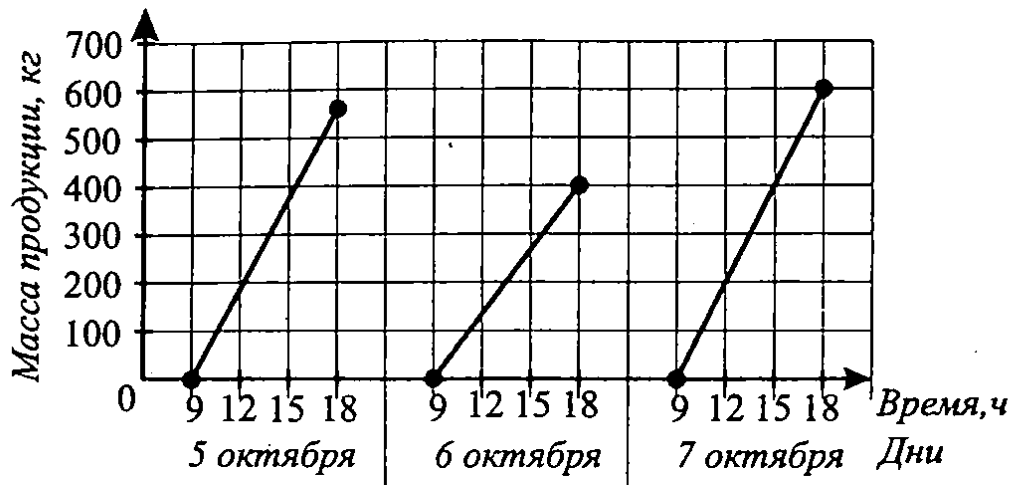


Рис. 496

125. На графике (см. рис. 497) отметим нужный промежуток времени (ночь с пятницы на субботу). Видим, что ответ — 14°C .

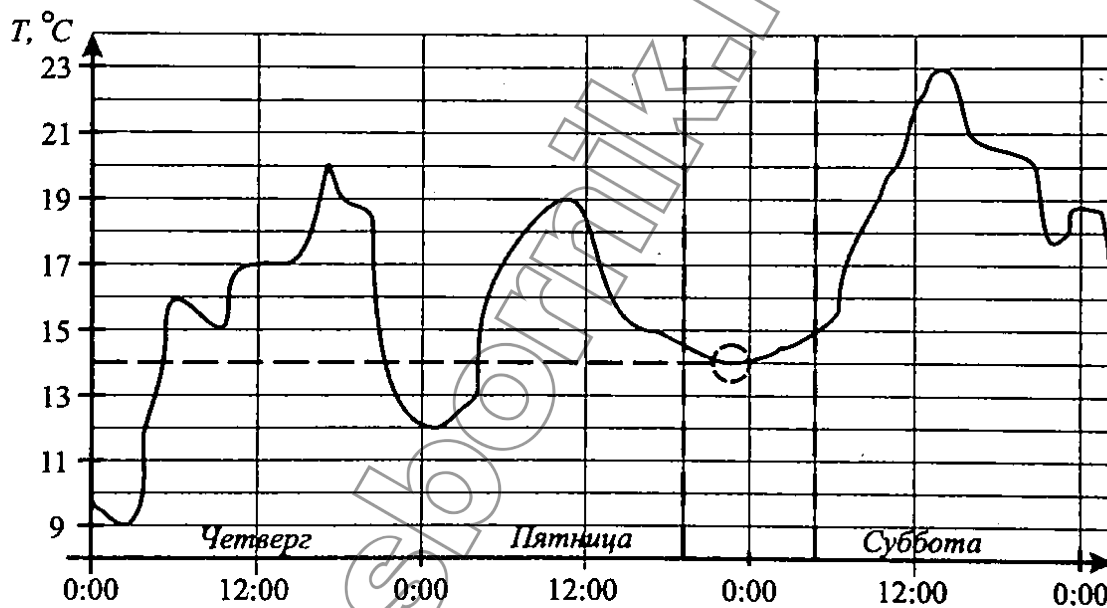


Рис. 497

129. На графике (см. рис. 498 на с. 414) выделяем временной промежуток — четверг. Находим наименьшее значение — 9 и наибольшее — 20. Находим разность $20 - 9 = 11$.

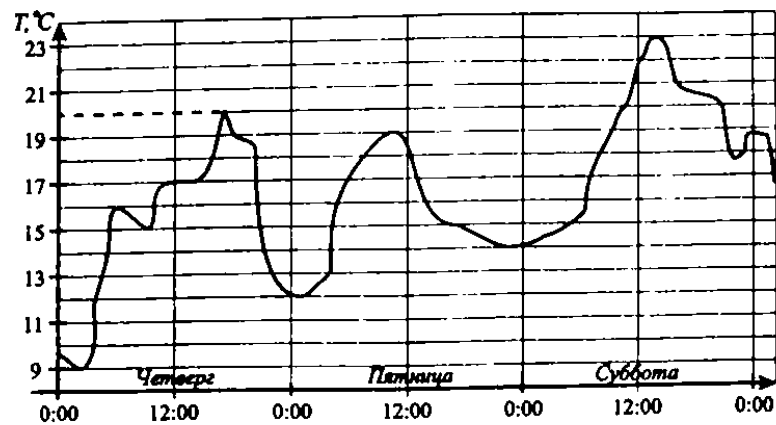


Рис. 498

133. Положительная температура — та, что больше нуля, выше горизонтальной оси. Считаем месяцы: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Получаем 7 месяцев.

137. Будем рассматривать правый столбец таблицы, поочередно перебирая его строки.

- 1) Давление возросло на 6 мм ртутного столба. Такая характеристика соответствует только 9 июля, периоду с 06:00 до 12:00. Это пункт Б левого столбца.
- 2) Давление упало на 8 мм ртутного столба. Такая характеристика соответствует 10 июля, периоду с 18:00 до 00:00. Это пункт Г левого столбца.
- 3) Давление не изменилось. Такая характеристика соответствует только 9 июля, периоду с 12:00 до 18:00 июля. Это пункт В левого столбца.
- 4) Показание давления было наибольшим. Наибольшее значение давления принимало 8 июля в 06:00. Это соответствует пункту А левого столбца.

Теперь заполним таблицу, учитывая полученные компоненты ответа:
А — 4, Б — 1, В — 3, Г — 2.

141. Будем рассматривать правый столбец таблицы, поочередно перебирая его строки.

- 1) Температура поднималась от 0°C до 10°C . Такая характеристика соответствует периоду с 8 часов утра до 12 часов дня. Это пункт Б левого столбца. Поэтому под буквой Б таблицы запишем число 1.
- 2) Температура опускалась от 10°C и была неотрицательной. Такая характеристика соответствует периоду с 12 часов дня до 22 часов. Это пункт В левого столбца. Поэтому под буквой В таблицы запишем число 2.

- 3) Температура была не больше 0°C и не меньше $(-2)^{\circ}\text{C}$. Такая характеристика соответствует только периоду с 22 часов до 24 часов. Это пункт Г левого столбца. Поэтому под буквой Г таблицы запишем число 3.
- 4) Температура была не больше $(-3)^{\circ}\text{C}$. Такая характеристика соответствует только периоду с 4 часов утра до 7 часов утра. Это пункт А левого столбца. Поэтому под буквой А таблицы запишем число 4.

Теперь заполним таблицу, учитывая полученные компоненты ответа:
А — 4, Б — 1, В — 2, Г — 3.

145. 20 стёкол площадью $0,85\text{ м}^2$ каждое составят общую площадь 17 м^2 . Чтобы узнать стоимость стекла, нужно его цену умножить на площадь. Чтобы узнать стоимость резки стекла, нужно число стёкол (20) умножить на стоимость резки за одно стекло. Потом результаты сложить и получить стоимость заказа. Для фирмы А стоимость заказа равна $180 \cdot 17 + 40 \cdot 20 = 3860$ рублей. Для фирмы Б стоимость заказа равна $200 \cdot 17 + 35 \cdot 20 = 4100$ рублей. Для фирмы В стоимость заказа равна $220 \cdot 17 = 3740$ рублей. Так как стоимость заказа больше 3500 руб., то в фирме В резка будет бесплатной. Следовательно, самый дешёвый заказ будет стоить 3740 рублей. •

149. Автомобиль расходует 7 литров бензина на 100 километров пути, расстояние равно 1100 км (в 11 раз больше, чем 100 км), тогда бензина понадобится $7 \cdot 11 = 77$ литров. Вычисляем стоимость 77 литров бензина по цене 23,8 рубля за литр: $77 \cdot 23,8 = 1832,6$ рубля. Три билета на автобус будут стоить $3 \cdot 1200 = 3600$ рублей. Значит, автомобильная поездка будет самой дешёвой, её стоимость составит 1832,6 рубля.

153. Для стен из керамзитоблоков необходимо 520 керамзитоблоков по 40 рублей за штуку и 3 мешка цемента по 180 рублей за мешок, то есть $520 \cdot 40 + 3 \cdot 180 = 20\,800 + 540 = 21\,340$ рублей.

Для стен из кирпича необходимо 2500 кирпичей по 8 рублей за штуку и 7 мешков цемента по 180 рублей за мешок, то есть $2500 \cdot 8 + 7 \cdot 180 = 20\,000 + 1260 = 21\,260$ рублей.

Наиболее дешёвый вариант стоимости материала будет для стен из кирпича и составит 21 260 рублей.

157. Посчитаем расстояния от А до С по разным дорогам и время в пути. Грузовик едет через пункт D, проезжая $76 + 40 = 116$ км со средней скоростью 40 км/ч. Чтобы найти время в пути, нужно расстояние разделить на среднюю скорость: $116 : 40 = 2,9$ ч. Автобус едет через пункт E, его путь равен $105 + 9 = 114$ км. Он едет со средней скоростью 48 км/ч, время поездки: $114 : 48 = 2,375$ ч. Через пункт В едет легковой автомо-

билль со средней скоростью 70 км/ч. Его путь $63 + 27 = 90$ км. Найдём время в пути легкового автомобиля. Оно равно $90 : 70 = 1,2\dots$ ч. В ответе получится бесконечная десятичная дробь, но её точное значение нам не нужно, так как в задаче спрашивалось: «Какой автомобиль добрался до пункта С позже других?» Видим, что самое большое время в пути у грузовика, поэтому он и приедет позже всех.

161. Стоимость заказа складывается из стоимости подачи машины, стоимости минимальной поездки и стоимости минут сверх продолжительности минимальной поездки (для фирм В и С это 45 мин минус 20 или 10 мин соответственно). Заполним таблицу.

Фирма такси	Подача машины	Продолжительность минимальной поездки	Сумма за минимальную поездку	Стоимость 1 минуты сверх минимальной поездки	Число минут сверх минимума	Сумма сверх минимальной	Всего
А	50 руб.	Нет	—	3 руб.	45 мин	135 руб.	185 руб.
В	30 руб.	20 мин	50 руб.	6 руб.	25 мин	150 руб.	230 руб.
С	Беспл.	10 мин	60 руб.	4 руб.	35 мин	140 руб.	200 руб.

Видим, что заказ будет стоить дешевле всего в фирме А, сумма этого заказа 185 рублей.

165. Посчитаем скидки (в рублях), которые клиент мог бы предположительно получить. Скидка 30% от 200 рублей на звонки абонентам других сотовых компаний в своём регионе составит $200 : 100 \cdot 30 = 60$ рублей. Скидка 15% от 300 рублей на звонки абонентам стационарных телефонов составит $300 : 100 \cdot 15 = 45$ рублей. Скидка 25% на услуги мобильного Интернета составит $260 : 100 \cdot 25 = 65$ рублей. Наиболее выгодная скидка составит 65 рублей.

169. Подставим данные таблицы в формулу для вычисления рейтинга.

$$R_1 = \left(\frac{2 \cdot (-4) + 2 \cdot 4 + 4 \cdot (-4)}{12} + 2 \right) \cdot 25 = 16,6\dots \approx 17;$$

$$R_2 = \left(\frac{2 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 3}{12} + 2 \right) \cdot 25 = 70,8\dots \approx 71;$$

$$R_3 = \left(\frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1}{12} + 2 \right) \cdot 25 = 66,6\dots \approx 67;$$

$$R_4 = \left(\frac{2 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 0}{12} + 2 \right) \cdot 25 = 58,3... \approx 58.$$

Наибольший рейтинг $R_2 \approx 71$.

173. Из чего складывается сумма вклада к концу года? Из первоначального вклада минус плата за ведение счёта, а также процентов от полученной суммы. Посчитаем сначала итоговую сумму без процентов. В банке А эта сумма будет равна $10\,000 - 120 = 9880$ рублей, в банке Б — $10\,000 - 15 \cdot 12 = 9820$ рублей, в банке С — $10\,000$ рублей.

Теперь посчитаем проценты по вкладу. 8% от 9880 равно $9880 : 100 \cdot 8 = 790,4$ рубля в банке А. 8,5% от 9820 равно $9820 : 100 \cdot 8,5 = 834,7$ рубля в банке В. 7,5% от 10 000 равно $10\,000 : 100 \cdot 7,5 = 750$ рублей в банке С.

Банк	Обслуживание счёта	Обслуживание счёта в год	Итоговая сумма без процентов	Процентная ставка (% годовых)	Сумма % по вкладу (в руб.)	Вклад к концу года в руб.
А	120 руб. в год	-120 руб.	9880	8	+790,4	10 670,4
В	15 руб. в месяц	-180 руб.	9820	8,5	+834,7	10 654,7
С	Бесплатно	—	10 000	7,5	+750	10 750

Видим, что к концу года вклад окажется наибольшим в банке С и будет равен 10 750 рублей.

177. По двухтарифному счётчику Иван Семёнович за каждый месяц за дневное время заплатил больше на $110 \cdot (3,43 - 3,23) = 22$ руб., а за ночное время меньше на $135 \cdot (3,23 - 2,68) = 74,25$ руб. Экономия за месяц $74,25 - 22 = 52,25$ руб., за год $52,25 \cdot 12 = 627$ рублей.

181. По условию задачи нас интересуют лишь учащиеся, не набравшие 70 баллов по химии, то есть те, кто набрал *строго* меньше, к ним относятся учащиеся с номерами 1, 2, 4, 6, 8, 9. Поочерёдно проанализируем результаты этих шести человек.

Учащийся с номером 1 не получил похвальной грамоты, так как, во-первых, не набрал 70 баллов и по физике и, во-вторых, в сумме имеет $58 + 63 = 121$ балл, а неравенство $121 > 125$ неверно.

Учащийся с номером 2 получил похвальную грамоту, так как набрал 74 балла по физике.

Учащийся с номером 4 получил похвальную грамоту, так как в сумме имеет $58 + 68 = 126 > 125$ баллов.

Учащийся с номером 6 не получил похвальной грамоты, так как, во-первых, не набрал 70 баллов по физике и, во-вторых, в сумме имеет $41 + 54 = 95$ баллов, а неравенство $95 > 125$ неверно.

Учащийся с номером 8 тоже не получил похвальной грамоты, так как не набрал 70 баллов по физике и в сумме набрал $62 + 63 = 125$ баллов, а неравенство $125 > 125$ неверно.

Учащийся с номером 9 получил похвальную грамоту, так как набрал 93 балла по физике.

185. Так как Алевтина должна купить хотя бы одну упаковку сока, содержащего лимон, то ей необходимо купить сок № 1 или сок № 3 (или оба вместе).

Предположим, что Алевтина купила сок № 1, который является импортным. Тогда ей надо купить ещё хотя бы одну упаковку отечественного сока, то есть либо сока № 3, либо сока № 4. Упаковки сока № 1 и сока № 3 вместе стоят $310 + 230 = 540$ (рублей). Но Алевтина предполагает потратить не более 600 рублей в сумме, то есть на третью упаковку сока остаётся $600 - 540 = 60$ (рублей), чего недостаточно. Аналогично упаковки сока № 1 и сока № 4 вместе стоят $310 + 120 = 430$ (рублей). На оставшиеся $600 - 430 = 170$ (рублей) нельзя купить никакую упаковку сока, отличную от уже приобретённых. Значит, Алевтина не может купить упаковку сока № 1 и при этом соблюсти все условия.

Но тогда надо купить упаковку сока № 3, также содержащего лимон. Сок № 3 — отечественный. Значит, Алевтине придётся купить ещё хотя бы одну упаковку импортного сока, то есть либо сока № 2, либо сока № 5, либо сока № 6 (сок № 1 уже исключён).

Упаковки сока № 3 и сока № 2 вместе стоят $230 + 180 = 410$ (рублей), на оставшиеся 190 рублей можно купить упаковку сока № 4. Таким образом, набор номеров соков 234 является ответом и задача решена (так как достаточно указать хотя бы один подходящий набор).

Аналогично можно было получить: упаковки сока № 3 и сока № 5 вместе стоят $230 + 200 = 430$ (рублей), на оставшиеся 170 рублей можно купить упаковку сока № 4. Таким образом, набор номеров соков 345 тоже является ответом.

Упаковки сока № 3 и сока № 6 суммарно стоят $230 + 380 = 610$ (рублей), что уже превышает допустимый лимит в 600 рублей.

189. Пусть скорость первого байкера равна x км/ч. Обозначим через s половину расстояния между городами. Первый байкер проехал $2s$ км за время $\frac{2s}{x}$ ч. Второй байкер проехал первую половину пути (то есть s) со

скоростью 80 км/ч за время $t = \frac{s}{80}$ ч, а вторую — со скоростью, которая на 24 км/ч больше, чем скорость первого байкера (то есть $(x + 24)$ км/ч), за время $\frac{s}{(x + 24)}$ ч. Заполним таблицу для составления уравнения.

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
1-й байкер	$2s$	x	$\frac{2s}{x}$
2-й байкер (1-я половина пути)	s	80	$\frac{s}{80}$
2-й байкер (2-я половина пути)	s	$x + 24$	$\frac{s}{x + 24}$

Так как по условию время движения первого байкера равно времени движения второго байкера, то имеет место следующее уравнение:

$$\frac{2s}{x} = \frac{s}{80} + \frac{s}{x + 24}$$

Разделив обе части последнего равенства на s (где $s > 0$), получим

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{80} + \frac{1}{x + 24}, \quad | \times 80x(x + 24) \neq 0,$$

$$160(x + 24) = x(x + 24) + 80x,$$

$$x^2 - 56x - 3840 = 0,$$

$$x_1 = -40, \quad x_2 = 96.$$

Первый корень явно не подходит по смыслу задачи, потому что скорость должна быть положительна. Следовательно, скорость первого байкера 96 км/ч.

193. Обозначим скорость катера в стоячей воде через x км/ч. Тогда скорость катера по течению равна $(x + 1)$ км/ч, а против течения — $(x - 1)$ км/ч. Заполним таблицу по условию задачи.

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
По течению	180	$x + 1$	$\frac{180}{x + 1}$
Против течения	180	$x - 1$	$\frac{180}{x - 1}$

Составим и решим уравнение.

$$\frac{180}{x-1} - \frac{180}{x+1} = 1, \quad | \times (x-1)(x+1) \neq 0,$$

$$180(x+1) - 180(x-1) = (x-1)(x+1),$$

$$180x + 180 - 180x + 180 = x^2 - 1,$$

$$x^2 = 361,$$

$$x_1 = -19, \quad x_2 = 19.$$

Отрицательный корень не подходит по смыслу задачи. Итак, скорость катера в стоячей воде равна 19 км/ч.

197. Обозначим безостановочную скорость через x км/ч. Тогда скорость движения на обратном пути равна $(x + 5)$ км/ч. Табличная версия задачи имеет следующий вид:

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
Из города на побережье	6800	x	$\frac{6800}{x}$
Обратный путь	6800	$x + 5$	$\frac{6800}{x + 5} + 5$

Составим и решим уравнение.

$$\frac{6800}{x} = \frac{6800}{x+5} + 5, \quad | \times x(x+5) \neq 0,$$

$$6800(x+5) = 6800x + 5x(x+5),$$

$$5x^2 + 25x - 6800 \cdot 5 = 0, \quad | : 5,$$

$$x^2 + 5x - 6800 = 0,$$

$$D = 27225 = 1089 \cdot 25,$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{1089 \cdot 25} = 33 \cdot 5 = 165,$$

$$x_1 = -85, \quad x_2 = 80.$$

Итак, скорость экипажа дальнобойщиков по пути из города к побережью равна 80 км/ч.

201. Скорость поезда: $v = 75 \text{ км/ч} = \frac{75 \cdot 1000 \text{ м}}{3600 \text{ с}} = \frac{250}{12} \text{ м/с}.$

За 24 с поезд пройдёт расстояние $S = \frac{250}{12} \cdot 24 = 500 \text{ (м)}.$

Найдём длину поезда: $500 - 150 = 350 \text{ (м)}.$

205. Средняя скорость находится так: всё пройденное расстояние делится на затраченное время. Найдём расстояние, которое проехал автомобиль: $60 \cdot 2 + 110 \cdot 1 + 85 \cdot 2 = 400 \text{ (км)}.$ Время, затра-

ченное на весь путь, равно $2 + 1 + 2 = 5$ (ч). Средняя скорость равна $400 : 5 = 80$ (км/ч).

209. Пусть второй геймер собирает x бонусов в минуту, тогда первый собирает $x + 20$ бонусов в минуту. Табличная версия задачи имеет следующий вид:

	Число бонусов	Скорость сбора (бонусы/мин)	Время сбора (мин)
Первый геймер	2400	$x + 20$	$\frac{2400}{x + 20}$
Второй геймер	2400	x	$\frac{2400}{x}$

Составим и решим уравнение.

$$\frac{2400}{x} - \frac{2400}{x + 20} = 20,$$

$$\frac{120}{x} - \frac{120}{x + 20} = 1,$$

$$120x + 2400 - 120x = x^2 + 20x,$$

$$x^2 + 20x - 2400 = 0,$$

$$x_1 = -60; \quad x_2 = 40.$$

Отрицательный корень не подходит по смыслу задачи. Итак, второй геймер собирает 40 бонусов в минуту.

213. Пусть второй насос закачивает x литров в минуту, тогда первый — $(x + 5)$ литров в минуту. Заполним следующую таблицу:

	Скорость закачки (л/мин)	Объём бака (л)	Время наполнения (мин)
1-й насос	$x + 5$	600	$\frac{600}{x + 5}$
2-й насос	x	600	$\frac{600}{x}$

По условию первый насос тратит на 6 минут меньше второго. Составим и решим уравнение.

$$\frac{600}{x} - \frac{600}{x + 5} = 6,$$

$$\frac{100}{x} - \frac{100}{x + 5} = 1,$$

$$100x + 500 - 100x = x(x + 5),$$

$$\begin{aligned}x^2 + 5x - 500 &= 0, \\x_1 &= -25, \quad x_2 = 20.\end{aligned}$$

Отрицательный корень не подходит по смыслу задачи. Итак, второй насос закачивает 20 литров в минуту.

217. Пусть Винни-Пух поливает самостоятельно весь огород (берём его за 1) за B минут, Пятачок — за P минут, а Кролик — за K минут. Тогда за одну минуту Винни-Пух поливает часть огорода, равную $\frac{1}{B}$, Пятачок —

$\frac{1}{P}$, Кролик — $\frac{1}{K}$. Таким образом, сообщение о том, что Винни-Пух и Пятачок вместе поливают огород за 35 минут, математически выражается следующим уравнением:

$$\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{P}\right) \cdot 35 = 1, \text{ что равносильно уравнению } \frac{1}{B} + \frac{1}{P} = \frac{1}{35}.$$

Составив аналогично два других уравнения, получим систему

$$\begin{cases} \frac{1}{B} + \frac{1}{P} = \frac{1}{35}, \\ \frac{1}{P} + \frac{1}{K} = \frac{1}{63}, \\ \frac{1}{B} + \frac{1}{K} = \frac{1}{45}. \end{cases}$$

Сложив все уравнения системы, получим

$$2\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{P} + \frac{1}{K}\right) = \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{45}.$$

Приведём правую часть к общему знаменателю:

$$2\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{P} + \frac{1}{K}\right) = \frac{9}{315} + \frac{5}{315} + \frac{7}{315},$$

$$2\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{P} + \frac{1}{K}\right) = \frac{21}{315},$$

$$\frac{1}{B} + \frac{1}{P} + \frac{1}{K} = \frac{1}{30},$$

$$30\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{P} + \frac{1}{K}\right) = 1.$$

Последнее равенство означает, что Винни-Пух, Пятачок и Кролик полють вместе огород за 30 минут.

221. Найдём массу вещества, содержащегося в растворе:

$$12 \text{ кг} \cdot 0,08 = 0,96 \text{ кг}.$$

В раствор добавили 4 кг воды, получили 12 кг + 4 кг = 16 кг раствора, в котором содержится 0,96 кг вещества.

Найдём процент концентрации получившегося раствора:

$$\frac{0,96 \cdot 100\%}{16} = 6\%.$$

225. Пусть в сосуде I x кг кислоты, а в сосуде II y кг кислоты.

$$\text{Тогда } x + y = (75 + 50) \cdot 0,42; \quad x + y = 52,5.$$

$$\text{Доля кислоты в сосуде I} = \frac{x}{75}.$$

$$\text{Доля кислоты в сосуде II} = \frac{y}{50}.$$

Если смешать равные массы m этих растворов, то

$$\frac{m \cdot x}{75} + \frac{m \cdot y}{50} = 2m \cdot 0,5, \quad \frac{x}{75} + \frac{y}{50} = 1, \quad 2x + 3y = 150.$$

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 52,5, \\ 2x + 3y = 150 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -105, \\ 2x + 3y = 150 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 45, \\ x + y = 52,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 45, \\ x = 7,5. \end{cases}$$

Значит, в первом сосуде 7,5 кг кислоты.

229. Пусть x рублей — зарплата жены, y рублей — зарплата мужа, z рублей — стипендия сына, $(x + y + z)$ рублей — бюджет семьи.

Если бы зарплата жены увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 37,5%.

$$\text{Составим 1-е уравнение: } 2x + y + z = 1,375 \cdot (x + y + z).$$

$$x + (x + y + z) = 0,375 \cdot (x + y + z) + (x + y + z), \quad x = 0,375 \cdot (x + y + z),$$

$$\frac{x}{x + y + z} = 0,375.$$

Если бы зарплата мужа уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 39%.

$$\text{Составим 2-е уравнение: } x + \frac{1}{3}y + z = 0,61(x + y + z).$$

$$3x + y + 3z = 1,83(x + y + z), \quad 2x + 2z + (x + y + z) = 1,83(x + y + z),$$

$$\frac{2x}{x + y + z} + \frac{2z}{x + y + z} + 1 = 1,83.$$

Сделаем подстановку: $\frac{x}{x+y+z} = 0,375$:

$$2 \cdot 0,375 + \frac{2z}{x+y+z} = 0,83, \quad \frac{2z}{x+y+z} = 0,83 - 0,75,$$

$$\frac{z}{x+y+z} = 0,08 : 2, \quad \frac{z}{x+y+z} = 0,04.$$

Таким образом, стипендия сына составляет 4% от общего дохода семьи.

233. Исходом будем считать цифру на карточке, извлечённой последней. Общее число исходов равно 4. Число исходов, благоприятствующих событию «карточку с цифрой 3 извлекут последней», равно 1. Искомая вероятность равна $\frac{1}{4} = 0,25$.

237. Общее число исходов равно числу шаров: $14 + 9 + 7 = 30$. Число исходов, благоприятствующих данному событию, равно 9. Искомая вероятность равна $\frac{9}{30} = \frac{3}{10} = 0,3$.

241. Общее число исходов равно числу карточек — их 24. Благоприятных исходов 6 (так как номер 3 написан на шести карточках). Искомая вероятность равна $\frac{6}{24} = \frac{1}{4} = 0,25$.

245. Так как школьник может ответить на 17 билетов, то на 3 билета он ответить не может. Вероятность получить один из этих билетов по определению равна $\frac{3}{20} = \frac{3 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{15}{100} = 0,15$.

249. Всего 20 спортсменов, у всех равные шансы выступать седьмой. Поэтому имеются 20 равновероятных исходов. Из Франции $20 - 6 - 5 = 9$ спортсменов, поэтому имеются 9 благоприятных для указанного события исходов. Искомая вероятность равна $\frac{9}{20} = \frac{9 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{45}{100} = 0,45$.

253. Сначала найдём, сколько докладов запланировано на последний день. На первые три дня запланировано $12 \cdot 3 = 36$ докладов. Остаются ещё $50 - 36 = 14$ докладов, которые распределяются поровну между оставшимися двумя днями, поэтому в последний день запланировано $\frac{14}{2} = 7$ докладов.

Будем считать исходом порядковый номер доклада профессора Н. Всего таких равновозможных исходов 50. Благоприятствуют указанному событию 7 исходов (последние 7 номеров в списке докладов). Искомая вероятность равна $\frac{7}{50} = \frac{7 \cdot 2}{50 \cdot 2} = \frac{14}{100} = 0,14$.

257. Формулировка «на 100 качественных холодильников приходится 15 с дефектами» указывает нам на то, что дефектные 15 штук не входят в 100 качественных. Поэтому общее число исходов равно $100 + 15 = 115$ (равно общему числу холодильников), благоприятных исходов 100. Искомая вероятность равна $\frac{100}{115}$. Для подсчёта приближённого значения дроби

$\frac{100}{115}$ удобно воспользоваться делением уголком:

$$\begin{array}{r} \underline{100,000} \mid 115 \\ \underline{920} \quad | 0,869\dots \\ \underline{800} \\ \underline{690} \\ \underline{1100} \\ \underline{1035} \\ \dots \end{array}$$

Таким образом, $\frac{100}{115} \approx 0,87$.

261. Как и в предыдущей задаче, необходимо внимательно прочитать условие и понять, что является исходом, а что — благоприятным исходом (так, неосмысленное применение формулы вероятности приводит к неправильному ответу $\frac{7}{16}$).

Здесь исход — это соперник Максима Зайцева. Так как всего теннисистов 16, а сам с собой Максим играть не может, то имеется $16 - 1 = 15$ равновероятных исходов. Благоприятный исход — соперник из России. Таких благоприятных исходов $7 - 1 = 6$ (из числа россиян исключаем самого Максима). Искомая вероятность равна $\frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0,4$.

265. Сформируем команды, последовательно помещая футболистов на свободные места, при этом начнём с Фёдора и Сергея. Сначала поместим Фёдора на случайно выбранное место из свободных 33. Теперь помещаем на свободное место Сергея (исходом будем считать выбор места для него). Всего имеется 32 свободных места (одно уже занял Фёдор),

поэтому всего возможны 32 исхода. В одной команде с Фёдором остаётся 10 свободных мест, поэтому событию «Фёдор и Сергей в одной команде» благоприятствуют 10 исходов. Вероятность этого события равна

$$\frac{10}{32} = \frac{5}{16} = \frac{5 \cdot 5^4}{2^4 \cdot 5^4} = \frac{3125}{10\,000} = 0,3125.$$

269. В задачах про бросание монет удобно выписать все возможные исходы, записывая их при помощи букв Р (решка) и О (орёл). Так, исход ОР означает, что при первом броске выпал орёл, а при втором — решка. В рассматриваемой задаче возможны 4 исхода¹: РР, РО, ОР, ОО. Благоприятствуют событию «решка выпадет ровно один раз» 2 исхода: РО и ОР. Искомая вероятность равна $\frac{2}{4} = 0,5$.

273. Исходом будем считать пару чисел: очки при первом и втором броске. Тогда указанному событию благоприятствуют следующие исходы: 2–6, 3–5, 4–4, 5–3, 6–2. Их количество равно 5.

277. Исходом будем считать пару чисел: очки, выпавшие на первой и второй игральной костях. Всего имеется 36 равновозможных исходов² (на первой кости число от 1 до 6, на второй — также число от 1 до 6). Событию «в сумме выпало 4» благоприятствуют следующие исходы: 1–3, 2–2, 3–1. Их количество равно 3. Искомая вероятность равна $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Для подсчёта приближённого значения дроби $\frac{1}{12}$ удобно воспользоваться делением уголком:

$$\begin{array}{r} \underline{1,000} \mid 12 \\ \underline{96} \quad \mid 0,083... \\ \underline{40} \\ \underline{36} \\ \dots \end{array}$$

Таким образом, $\frac{1}{12} \approx 0,08$.

281. Предположим, одна девочка уже села за стол. Эксперимент заключается в выборе места для второй девочки. Всего этот эксперимент имеет 16 равновозможных исходов (по числу оставшихся свободных мест), из которых 2 благоприятствуют событию «девочки будут сидеть рядом» —

¹ Вообще, если монету бросают n раз, имеется 2^n равновозможных исходов.

² Вообще, если бросают n игральных костей (кубиков), имеется 6^n равновозможных исходов. Столько же исходов получается, если один и тот же кубик бросают n раз подряд.

это места по левую и по правую руку от уже сидящей девочки. Искомая вероятность равна $\frac{2}{16} = \frac{1}{8} = 0,125$.

285. Предпоследней может быть любая цифра от 0 до 9 (всего 10 вариантов). Столько же вариантов и для выбора последней цифры. Общее число вариантов для двух последних цифр равно $10 \cdot 10 = 100$. Все эти варианты равновозможны в эксперименте по выбору двух последних цифр.

Найдём количество вариантов, при которых две последние цифры различны. Предпоследней по-прежнему может быть любая цифра от 0 до 9 (всего 10 вариантов). Если предпоследняя цифра выбрана, то для последней остаётся 9 вариантов (любая цифра, не равная предпоследней). Общее число благоприятных вариантов составляет $10 \cdot 9 = 90$. Искомая вероятность равна $\frac{90}{100} = 0,9$.

289. Обозначим события: W = «А. выиграл белыми», B = «А. выиграл чёрными». По условию, $P(W) = 0,45$, $P(B) = 0,4$. Необходимо найти вероятность пересечения событий W и B , то есть $P(W \cap B)$. События W и B независимы (результат одной партии не зависит от результата другой), поэтому $P(W \cap B) = P(W) \cdot P(B) = 0,45 \cdot 0,4 = 0,18$.

293. Вероятность того, что из магазина А не доставят товар, равна $1 - 0,85 = 0,15$. Вероятность того, что из магазина Б не доставят товар, равна $1 - 0,96 = 0,04$. Так как магазины работают независимо, то вероятность отсутствия доставки из обоих магазинов сразу (то есть пересечение вероятностей отсутствия доставки из каждого магазина) равна $0,15 \cdot 0,04 = 0,006$.

297. Обозначим через A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 события, означающие попадание в мишень при соответствующем выстреле. По условию $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = P(A_5) = 0,6$.

Нам необходимо найти вероятность $P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5})$. Так как рассматриваемые события независимы, то эта вероятность равна $P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) \cdot P(\overline{A_4}) \cdot P(\overline{A_5}) =$
 $= 0,6 \cdot 0,6 \cdot (1 - 0,6) \cdot (1 - 0,6) \cdot (1 - 0,6) = 0,6^2 \cdot 0,4^3 =$
 $= 0,36 \cdot 0,064 = 0,02304 \approx 0,02$.

301. Расставим на перекрёстках стрелки в направлениях, по которым может двигаться мышка (см. рис. 499 на с. 428). Выберем на каждом из перекрёстков одно направление из двух возможных и будем считать, что при попадании на перекрёсток мышка будет двигаться по выбранному нами направлению.

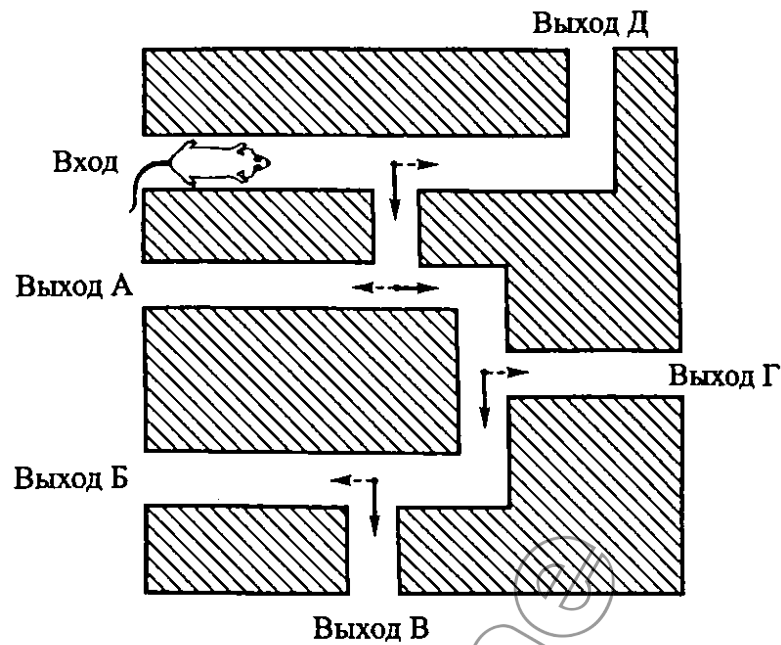


Рис. 499

Чтобы мышка достигла выхода В, нужно, чтобы на каждом перекрёстке было выбрано направление, обозначенное сплошной линией. Всего выбор направления делается 4 раза, каждый раз независимо от предыдущего выбора. Вероятность того, что каждый раз выбрана сплошная стрелка, равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0,5^4 = 0,25^2 = 0,0625$.

305. Представим себе, что все 25 учеников выстроены в ряд, причём первыми стоят 16 мальчиков. Будем дважды выбирать из этого ряда по одному дежурному, каждый раз случайным образом. Обозначим через A событие «в первый раз выбран один из числа первых 16 (в ряду из 25 учеников)», через B — событие «во второй раз выбран один из числа первых 15 (в ряду из оставшихся 24 учеников)». Тогда $A \cap B$ — это событие «будут дежурить два мальчика», его вероятность нам нужно найти.

События A и B независимы, так как номер выбранного ученика в ряду не зависит от того, кто был выбран до или после. По формуле вероятности пересечения независимых событий

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{16}{25} \cdot \frac{15}{24} = \frac{2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 8} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

309. Будем рассуждать о том, когда может сломаться кофемолка. Она может сломаться уже на первом году работы, может сломаться на втором году работы, а может проработать более двух лет и сломаться потом. Будем заполнять следующую таблицу:

Событие	Сломалась на первом году	Сломалась на втором году	Сломалась после двух лет работы
Вероятность			

Так как вероятность события «кофемолка прослужит больше года» равна 0,93, то вероятность противоположного события «кофемолка сломалась на первом году» равна $1 - 0,93 = 0,07$. Вероятность события «кофемолка сломалась после первых двух лет работы» по условию равна 0,81. Вносим найденные значения в таблицу:

Событие	Сломалась на первом году	Сломалась на втором году	Сломалась после двух лет работы
Вероятность	0,07		0,81

В таблице перечислены три несовместных события, одно из которых обязательно произойдет. Поэтому сумма вероятностей в таблице должна быть равна 1. Следовательно, незаполненное искомое значение можно вычислить как $1 - 0,07 - 0,81 = 0,12$.

313. Составим таблицу вероятностей возможных исходов двух событий.

		Второй матч		
		Победа $P = 0,3$	Ничья $P = 0,4$	Поражение $P = 0,3$
Первый матч	Победа $P = 0,3$	0,09	0,12	0,09
	Ничья $P = 0,4$	0,12	0,16	0,12
	Поражение $P = 0,3$	0,09	0,12	0,09

Числа в ячейках получаются по принципу таблицы умножения (умножение вероятностей соответствующих результатов первого и второго матчей), так как вероятности результатов первого и второго матчей не зависят друг от друга. Жирным шрифтом в таблице выделены вероятности тех результатов, при которых команда выходит в следующий круг. Искомая вероятность равна $0,09 + 0,12 + 0,12 = 0,33$.

317. Составим таблицу вероятностей возможных результатов в конце дня.

		Второй автомат	
		Кофе закончился	Кофе остался
Первый автомат	Кофе закончился	0,22	
	Кофе остался		

По условию вероятность события «кофе закончился в обоих автоматах» равна 0,22. Это число мы сразу записали в соответствующую ячейку таблицы.

В первом автомате кофе закончится с вероятностью 0,4, поэтому сумма чисел в верхних ячейках таблицы должна быть равна 0,4. Значит, в правой верхней ячейке должно быть число $0,4 - 0,22 = 0,18$.

		Второй автомат	
		Кофе закончился	Кофе остался
Первый автомат	Кофе закончился	0,22	0,18
	Кофе остался		

Во втором автомате кофе закончится с вероятностью 0,4, поэтому сумма чисел в левых ячейках таблицы также должна быть равна 0,4. Значит, в левой нижней ячейке должно быть число $0,4 - 0,22 = 0,18$.

		Второй автомат	
		Кофе закончился	Кофе остался
Первый автомат	Кофе закончился	0,22	0,18
	Кофе остался	0,18	

Так как сумма чисел во всех четырёх ячейках должна быть равна 1, то искомое число в правой нижней ячейке равно $1 - 0,22 - 0,18 - 0,18 = 0,42$.

		Второй автомат	
		Кофе закончился	Кофе остался
Первый автомат	Кофе закончился	0,22	0,18
	Кофе остался	0,18	0,42

321. Вероятность того, что Н. не сможет набрать 60 баллов ни по литературе, ни по математике, равна $(1 - 0,6) \cdot (1 - 0,9) = 0,4 \cdot 0,1 = 0,04$. Следовательно, хотя бы по одному из этих двух предметов он получит 60 баллов с вероятностью $1 - 0,04 = 0,96$. Для поступления нужно набрать требуемый балл по русскому языку, истории и хотя бы по одному предмету из литературы и математики. Вероятность поступления равна $0,5 \cdot 0,8 \cdot 0,96 = 0,384$.

325. Будем считать все ручки различными. Результатом эксперимента является неупорядоченная пара ручек, которые достала Надя. Всего есть

$$C_{16}^2 = \frac{16!}{14! \cdot 2!} = \frac{16 \cdot 15}{2!} = 120 \text{ равновозможных способов выбрать две}$$

ручки. Пару из синей и красной ручки можно составить $6 \cdot 8 = 48$ спосо-

бами. Следовательно, искомая вероятность равна $\frac{48}{120} = 0,4$.

329. Вероятность того, что решка выпадет ровно 7 раз в серии испытаний из 26 бросков (используем схему Бернулли), равна

$$C_{26}^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{19} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{26!}{7! \cdot 19!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{26}$$

Вероятность того, что решка выпадет ровно 5 раз в серии испытаний из 26 бросков (используем схему Бернулли), равна $C_{26}^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{21} = \frac{26!}{5! \cdot 21!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{26}$.

$$\begin{aligned} \text{Искомое отношение равно } & \frac{\frac{26!}{7! \cdot 19!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{26}}{\frac{26!}{5! \cdot 21!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{26}} = \frac{5! \cdot 21!}{7! \cdot 19!} = \frac{5!}{7!} \cdot \frac{21!}{19!} = \\ & = \frac{1}{6 \cdot 7} \cdot \frac{21 \cdot 20}{1} = 10. \end{aligned}$$

333. Вероятность попадания при каждом отдельном выстреле равна 0,6, а вероятность промаха составляет $1 - 0,6 = 0,4$. Тогда вероятность того, что Алексей не попадёт в цель за два выстрела, равна $0,4 \cdot 0,4 = 0,16$, а вероятность поражения отдельно взятой цели равна $1 - 0,16 = 0,84$. Найдём вероятность события A — «Алексей поразит ровно 4 мишени». 4 мишени из 5 можно выбрать C_5^4 способами. Вероятность каждого такого способа равна $(0,84)^4 \cdot (0,16)^1$ (вероятность того, что будет 4 попадания по конкретным мишеням и 1 промах). Значит $P(A) = C_5^4 \cdot (0,84)^4 \cdot (0,16)^1$ (схема Бернулли).

Вероятность события B — «Алексей поразит ровно 3 мишени». 3 мишени из 5 можно выбрать C_5^3 способами. Вероятность каждого такого способа равна $(0,84)^3 \cdot (0,16)^2$ (вероятность того, что будет 3 попадания по конкретным мишеням и 2 промаха). Значит, $P(B) = C_5^3 \cdot (0,84)^3 \cdot (0,16)^2$.

$$\begin{aligned} \text{Искомая величина } \frac{P(A)}{P(B)} &= \frac{C_5^4 \cdot (0,84)^4 \cdot (0,16)^1}{C_5^3 \cdot (0,84)^3 \cdot (0,16)^2} = \frac{\frac{5!}{4!1!} \cdot (0,84)^1}{\frac{5!}{3!2!} \cdot (0,16)^1} = \\ &= \frac{3!}{4!} \cdot \frac{2!}{1!} \cdot \frac{0,84}{0,16} = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \frac{21}{4} = 2,625. \end{aligned}$$

337. Согласно определению $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$. Количество элементов во множестве X будем обозначать знаком $|X|$.

$$\text{Тогда } P(A) = \frac{|A|}{|M|} = \frac{6}{15}, P(B \cap A) = \frac{|B \cap A|}{|M|} = \frac{3}{15}. \text{ Поэтому}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{15}}{\frac{6}{15}} = \frac{3}{6} = 0,5.$$

341. 1-й способ.

Вероятность неудачи в случае каждой отдельно взятой попытки равна $1 - 0,9 = 0,1$. По условию должна потребоваться одна или две попытки. Пусть событие A_1 — «потребовалась ровно одна попытка». По условию $P(A_1) = 0,9$.

Пусть событие A_2 — «потребовалось ровно две попытки». Это означает, что первая попытка должна была быть неудачной, а вторая удачной. Тогда $P(A_2) = 0,1 \cdot 0,9 = 0,09$.

Так как события A_1 и A_2 несовместны, то искомая вероятность $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = 0,99$.

2-й способ.

Найдём вероятность противоположного события: «потребовалось более двух попыток» или, что то же самое, «первые две попытки были неудачными». Вероятность этого события равна $0,1 \cdot 0,1 = 0,01$. Тогда искомая вероятность равна $1 - 0,01 = 0,99$.

345. Пусть H_1 — «ковбой выбрал пристрелянный револьвер», H_2 — «ковбой выбрал непристрелянный револьвер», A — «ковбой попал в муху». Тогда $P(H_1) = \frac{2}{5} = 0,4$ (вероятность схватить один из двух

пристрелянных револьверов), $P(H_2) = \frac{3}{5} = 0,6$ (вероятность схватить один из трёх непристрелянных револьверов). По условию $P(A|H_1) = 0,8$, $P(A|H_2) = 0,25$.

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = 0,8 \cdot 0,4 + 0,25 \cdot 0,6 = 0,47.$$

349. Семь очков в сумме могло выпасть в следующих случаях (в каждой «тройке» последовательно перечислены результаты трёх бросков):

- 1) (5; 1; 1); (1; 5; 1); (1; 1; 5);
- 2) (4; 2; 1); (4; 1; 2); (2; 1; 4); (2; 4; 1); (1; 2; 4); (1; 4; 2);
- 3) (3; 2; 2); (2; 3; 2); (2; 2; 3);
- 4) (3; 3; 1); (3; 1; 3); (1; 3; 3).

Всего 15 равновозможных случаев. Событию «хотя бы один раз выпало три очка» благоприятствуют шесть из них (отмеченные цифрами 3 и 4).

Искомая вероятность равна $\frac{6}{15} = 0,4$.

353. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P\{c, d\}}{P\{c, d, e\}}$. Согласно формулам вероятности объединения и пересечения, получаем:

$$\frac{0,5 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 0,6}{0,5 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 0,4} = \frac{0,6}{0,8} = 0,75.$$

357. 1-й способ.

Рассмотрим две гипотезы: H_1 — при первом броске выпала нужная комбинация и H_2 — при первом броске не выпала нужная комбинация.

Заметим, что $P(H_1) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$, так как из 36 упорядоченных пар, соответствующих очкам на кубиках, ровно две удовлетворяют требованию:

(3; 6) и (6; 3). $P(H_2) = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}$.

Событие A — «клиент получил комплимент от повара в результате этой игры». По формуле полной вероятности получим: $P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2)$.

$P(A|H_1) = 1$, так как если выполнено H_1 , то клиент получит комплимент от повара.

$P(A|H_2) = \frac{1}{18}$, так как если выполнено H_2 , то клиент получит комплимент от повара, если получит нужную комбинацию вторым броском, то есть $P(A|H_2) = P(H_1)$.

$$\text{Тогда } P(A) = 1 \cdot \frac{1}{18} + \frac{1}{18} \cdot \frac{17}{18} = \frac{35}{324} = 0,108 \dots \approx 0,11.$$

2-й способ. Найдём вероятность противоположного события — в обеих попытках нужная комбинация не выпала. При одной попытке вероятность выпадения нужной комбинации равна $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$, так как из 36 упорядоченных пар, соответствующих очкам на кубиках, ровно две удовлетворяют требованию: (3; 6) и (6; 3). Значит, вероятность невыпадения нужной комбинации равна $1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}$. Оба раза нужная комбинация

не выпала с вероятностью $\frac{17}{18} \cdot \frac{17}{18} = \frac{289}{324}$. Отсюда искомая вероятность

$$\text{равна } 1 - \frac{289}{324} = \frac{35}{324} = 0,108 \dots \approx 0,11.$$

361. Эксперимент заключается в подбрасывании двух игральных костей, исходом является упорядоченная пара чисел, в которой на первом месте

стоит число очков, выпавшее на первом кубике, а на втором месте — число очков, выпавшее на втором кубике. Эксперимент имеет $6 \cdot 6 = 36$ равно-возможных исходов. Пусть событие A — «ни разу не выпало 6», это событие наступит, если при первом броске выпадет любое число очков, кроме 6 (всего 5 вариантов), и аналогично при втором броске. Всего $5 \cdot 5 = 25$ исходов благоприятствуют событию A , отсюда $P(A) = \frac{25}{36}$.

Пусть событие B — «в сумме выпало 9 очков». Тогда $A \cap B$ — «в сумме выпало 9 очков и ни разу не выпало 6». Событию $A \cap B$ благоприятствуют исходы (4; 5) и (5; 4) — всего 2 исхода. $P(A \cap B) = \frac{2}{36}$. Тогда

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{25}{36}} = \frac{2}{25} = 0,08.$$

Можно рассуждать немного иначе. Посчитаем вероятность события B при условии, что A наступило. Если A наступило, то возможен любой из 25 исходов, из которых 2 благоприятствуют событию A . Искомая вероятность равна $\frac{2}{25} = 0,08$.

365. Пусть H_i — событие, заключающееся в том, что при первом броске выпало i очков. Тогда $P(H_i) = \frac{1}{6}$ для любого целого i от 1 до 6. Пусть событие A — «сумма очков не превысила 4 при первом броске, но превысила при втором».

При первом броске могло выпасть от 1 до 4 очков.

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3) + P(A|H_4)P(H_4) = P(A|H_1) \cdot \frac{1}{6} + P(A|H_2) \cdot \frac{1}{6} + P(A|H_3) \cdot \frac{1}{6} + P(A|H_4) \cdot \frac{1}{6}.$$

Ясно, что $P(A|H_1) = \frac{3}{6}$ (если при первом броске выпало 1, то при втором броске должно выпасть 4, 5 или 6 — три варианта из шести).

Аналогично $P(A|H_2) = \frac{4}{6}$ (если при первом броске выпало 2, то при втором броске должно выпасть 3, 4, 5 или 6 — четыре варианта из шести).

Далее, $P(A|H_3) = \frac{5}{6}$ (если при первом броске выпало 3, то при втором броске должно выпасть 2, 3, 4, 5 или 6 — пять вариантов из шести).

Наконец, $P(A|H_4) = 1$ (если при первом броске выпало 4, то при втором броске сумма гарантированно превысит 4).

$$\text{Отсюда } P(A) = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} = 0,5.$$

369. Вероятность того, что первым Катя вытащит красный фломастер, равна $\frac{5}{8}$. Если это событие наступит, то вероятность вытащить снова красный фломастер станет равна $\frac{4}{7}$ (так как останется 4 красных фломастера из 7). Аналогично вероятность вытащить третий красный фломастер при условии того, что первые два — красные, равна $\frac{3}{6}$. Таким образом, вероятность того, что первые три вытащенных фломастера — красные, равна $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{28}$. Если первые три вытащенных фломастера — красные, то вероятность четвертым вытащить зелёный равна $\frac{3}{5}$ (так как среди 5 оставшихся ровно 3 зелёных). Тогда искомая вероятность равна $\frac{5}{28} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{28} = 0,107 \dots \approx 0,11$.

373. Рассмотрим две гипотезы: H_1 — «был взят первый кубик», H_2 — «был взят второй кубик». По условию обязательно наступает ровно одна из этих гипотез, и $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$. Пусть событие A — «в каком-

то порядке выпали числа 2 и 4». Тогда $P(A|H_1) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$.

(Вероятность того, что сначала выпало 2, а затем 4, равна $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

Аналогично вероятность того, что сначала выпало 4, а затем 2, тоже равна $\frac{1}{36}$.) $P(A|H_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. (Вероятность того, что сначала выпало

2, а затем 4, равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Аналогично вероятность того, что сначала

выпало 4, а затем 2, тоже равна $\frac{1}{4}$.)

По формуле полной вероятности получаем, что

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{18} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{18}.$$

$$\text{Искомая вероятность } P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{5}{18}} = 0,9.$$

377. Пусть эксперимент заключается в выборе одного случайного пациента, направленного на анализ. Рассмотрим две гипотезы, являющиеся противоположными событиями: H_1 — «этот пациент болен», H_2 — «этот пациент не болен». Событие A — «у наудачу взятого пациента тест дал положительный результат». По условию $P(A) = 0,11$. Вероятность положительного теста у больного пациента равна $P(A|H_1) = 0,88$, а у здорового — $P(A|H_2) = 1 - 0,92 = 0,08$.

Пусть x — это $P(H_1)$, то есть x — это вероятность того, что наудачу взятый пациент болен (тогда $P(H_2) = 1 - x$ — это вероятность того, что наудачу взятый пациент здоров).

По формуле полной вероятности получим, что

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) = 0,88x + 0,08(1 - x).$$

Получим уравнение $0,88x + 0,08(1 - x) = 0,11$; $0,8x = 0,03$, $x = \frac{3}{80}$.

$$\text{Искомая вероятность } P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{0,88 \cdot \frac{3}{80}}{0,11} = 0,3.$$

381. Рассмотрим два события:

A — «Команда „Факел“ прекратила участие в турнире, проиграв „Пламени“»;

B — «Команда „Пламя“ прекратила участие в турнире, проиграв „Факелу“».

Эти два события несовместны, их объединение равносильно событию «„Факел“ и „Пламя“ встретились в рамках турнира».

Тогда искомая вероятность равна $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Найдём $P(A)$. Рассмотрим две гипотезы: H_1 — «„Факел“ выиграл турнир», H_2 — «„Факел“ не выиграл турнир» (эти гипотезы являются противоположными событиями). $P(H_1) = \frac{1}{20}$, так как каждая из 20

рек» будет самой сильной командой, при этом условии равна $\frac{1}{4}$, так как мы с одинаковой вероятностью можем предполагать любую силу команды «Игрек», а всего в первых трёх раундах участвуют четыре команды.

$$\text{Тогда } P(A) = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{4}.$$

2. Найдём $P(B \cap A)$. Событие $B \cap A$ полностью аналогично событию A , только вместо трёх первых раундов рассматриваются четыре.

$$P(B \cap A) = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{5}.$$

$$\text{Отсюда } P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{8} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{2}{8} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\binom{1}{5}}{\binom{1}{4}} = 0,8.$$

389. Найдём вероятность P_n того, что цель останется непоражённой в результате n выстрелов. Это событие противоположно оговорённому в условии, поэтому его вероятность должна быть не более $1 - 0,75 = 0,25$. Заметим, что вероятность промаха при каждом отдельно взятом выстреле равна $1 - 0,3 = 0,7$.

$$n = 1; P_1 = 0,7.$$

$$n = 2; P_2 = 0,7 \cdot 0,7 = 0,49 > 0,25.$$

$$n = 3; P_3 = 0,49 \cdot 0,7 = 0,343 > 0,25.$$

$$n = 4; P_4 = 0,343 \cdot 0,7 = 0,2401 \leq 0,25.$$

Значит, наименьшее число патронов равно 4.

393. Одному произвольному бросанию монеты соответствует следующая функция распределения Y :

Количество «орлов»	0	1
Вероятности событий	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$EY = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Двадцати семи случайным броскам монеты соответствует событие, являющееся суммой двадцати семи случайных событий выпадения орла. Так как математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых, то получаем $27EY = 27 \cdot \frac{1}{2} = 13,5$.

команд-участников имеет по условию равные шансы на победу в турнире. Отсюда $P(H_2) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$.

Очевидно, что $P(A|H_1) = 0$ (в этом случае событие A невозможно) и $P(A|H_2) = \frac{1}{19}$ (если «Факел» кому-то проиграл, то в силу одинаковых начальных шансов игроков, «Факел» с одинаковой вероятностью мог проиграть любому из них, кроме себя).

По формуле полной вероятности получаем, что $P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) = 0 + \frac{1}{19} \cdot \frac{19}{20} = \frac{1}{20}$.

Заметим, что $P(B) = P(A) = \frac{1}{20}$, так как все игроки в начале турнира находятся в одинаковой ситуации.

Искомая вероятность равна $\frac{1}{20} + \frac{1}{20} = 0,1$.

385. В первом раунде в турнир вступают две команды, а в каждом из последующих раундов — по одной из числа ранее не участвовавших. Можно считать, что одна из команд, выступающих в первом раунде, заходит в помещение для игры раньше другой. Тогда все команды вступают в турнир в определённом порядке. За время первых k игр в турнир вступит $(k + 1)$ команда.

Пусть событие A — «Команда „Игрек“ выиграла первые три игры турнира», событие B — «Команда „Игрек“ выиграла четвёртую игру турнира».

Тогда $B \cap A$ — «Команда „Игрек“ выиграла первые четыре игры турнира».

Искомую вероятность $P(B|A)$ найдём по формуле $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$.

1. Найдём $P(A)$. Для наступления события A необходимо, чтобы «Игрек» вступил в турнир в первом раунде и оказался самой сильной командой среди первых четырёх, которые участвуют в этих трёх раундах.

Вероятность того, что «Игрек» вступит в турнир в первом раунде, то есть под номером 1 или 2, равна $\frac{2}{8}$, так как «Игрек» имеет одинаковые шансы вступить под любым номером от 1 до 8. Вероятность того, что «Иг-

397. При первом броске с одинаковой вероятностью $\frac{1}{2}$ могут выпасть O или P .

Если при первом броске выпадет O , то математическое ожидание выпадения после этого ещё O и P равно $3 + 1 = 4$, так как математическое ожидание выпадения O и P равно 3.

Если при первом броске выпадет P , то математическое ожидание выпадения после этого ещё O и O равно $4 + 1 = 5$, так как математическое ожидание выпадения O и O равно 4 (см. рис. 500).

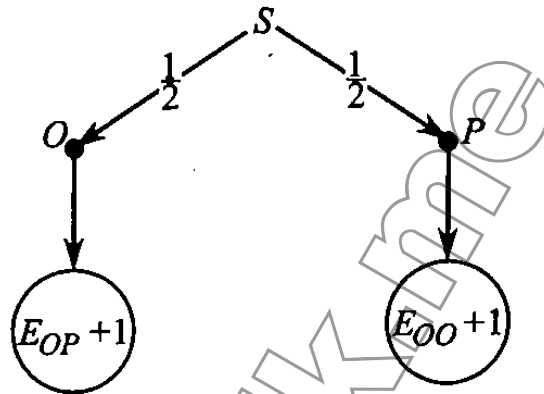


Рис. 500

Отсюда получаем, что $E_{OOP} = \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 5 = 4,5$.

401. Подставив в формулу $E = \frac{mv^2}{2}$ значения $v = 6$ м/с, $m = 15$ кг,

получим $E = \frac{15 \cdot 6^2}{2} = \frac{15 \cdot 36}{2} = 270$ (Дж).

405. Подставив в формулу $R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$ значения $a = 4$ и $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, полу-

чим $R = \frac{4}{2 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{4}{\frac{4}{3}} = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3$.

409. Подставим указанные значения a , b , r и S в формулу

$S = \frac{1}{2} r(a + b + c)$. Получим $30 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (5 + 12 + c)$, $30 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (17 + c)$,

$17 + c = 30$, $c = 13$.

413. Подставим в формулу $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ вместо d число 25, вместо a число 12 и вместо b число 9. Получим $25 = \sqrt{12^2 + 9^2 + c^2}$, $25 = \sqrt{144 + 81 + c^2}$, $25 = \sqrt{225 + c^2}$. Тогда $\sqrt{225 + c^2} = 625$, $c^2 = 400$, $c = 20$ (метров).

417. Подставим в формулу $C = 120 + 9(t - 5)$ вместо t число 25. Получим $C = 120 + 9(25 - 5)$, $C = 120 + 9 \cdot 20 = 120 + 180 = 300$ (рублей).

421. Заметим, что $1 < b < 2$, $4 < a < 5$ (см. рис. 501).

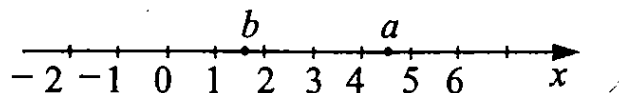


Рис. 501

Тогда $3 < 3b < 6$, $6 < a + 2 < 7$, то есть $3b < 6 < a + 2$. Наибольшее число — это $(a + 2)$. Это число обозначено номером 4.

425. А) $s^2 = 11$, $s^2 - 6 = 5$. $5 \in [5; 6]$. Промежуток $[5; 6]$ имеет номер 2, поэтому под буквой А запишем число 2.

В) $3 < s < 4$, так как $3^2 = 9 < 11$, а $4^2 = 16 > 11$. Тогда $1 < \sqrt{3} < \sqrt{s} < \sqrt{4} = 2$. Значит, $\sqrt{s} \in [1; 2]$. Промежуток $[1; 2]$ имеет номер 1, поэтому под буквой В запишем число 1.

Б) Заметим, что $\frac{\sqrt{s}}{s} = \frac{1}{\sqrt{s}}$. Так как $1 < \sqrt{s} < 2$, то $0 < \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{s}} < 1$.

Значит, $\frac{1}{\sqrt{s}} \in [0; 1]$. Промежуток $[0; 1]$ имеет номер 4, поэтому под буквой Б запишем число 4.

Г) $\frac{10}{s} = \frac{10}{\sqrt{11}} = \sqrt{\frac{100}{11}} = \sqrt{9\frac{1}{11}} > 3$. Кроме того, $\sqrt{9\frac{1}{11}} < 4$. Зна-

чит, $\frac{10}{s} \in [3; 4]$. Промежуток $[3; 4]$ имеет номер 3, поэтому под буквой Г запишем число 3.

429. Решим каждое неравенство отдельно.

А) $16^x \geq 16$, $16^x \geq 16^1$. Ясно, что $16 > 1$, значит, рассматриваемое неравенство равносильно неравенству $x \geq 1$, то есть $x \in [1; +\infty)$, что соответствует решению 4.

Б) $\frac{1}{16^x} \geq 16$, $\left(\frac{1}{16}\right)^x \geq 16$, $16^{-x} \geq 16^1$. Ясно, что $16 > 1$, значит, рассматриваемое неравенство равносильно неравенству $-x \geq 1$, $x \leq -1$, то есть $x \in (-\infty; -1]$, что соответствует решению 2.

В) $\log_{16} x \geq 1$, ОДЗ $x > 0$. Преобразуем неравенство к виду $\log_{16} x \geq \log_{16} 16$. Ясно, что $16 > 1$, значит, рассматриваемое неравенство равносильно неравенству $x \geq 16$, то есть $x \in [16; +\infty)$, что соответствует решению 1.

Г) $\log_{16} x \leq 1$, ОДЗ $x > 0$. Преобразуем неравенство к виду $\log_{16} x \leq \log_{16} 16$. Ясно, что $16 > 1$, значит, на ОДЗ рассматриваемое неравенство равносильно неравенству $x \leq 16$, то есть $x \in (0; 16]$, что соответствует решению 3.

433. Решим каждое неравенство отдельно.

А) $3^x \geq 3$, $3^x \geq 3^1$. Ясно, что $3 > 1$, значит, рассматриваемое неравенство равносильно неравенству $x \geq 1$, что соответствует решению на рисунке 2.

Б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 3$; $3^{-x} \geq 3^1$; $x \leq -1$, что соответствует решению на рисунке 4.

В) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 3$; $3^{-x} \leq 3^1$; $x \geq -1$, что соответствует решению на рисунке 1.

Г) $3^x \leq 3$; $3^x \leq 3^1$; $x \leq 1$, что соответствует решению на рисунке 3.

437. Приблизительно оценим каждое значение, стоящее в правом столбце.

1) Из рисунка видно, что $n \approx 1,5$, $-2 < m < -1,5$. Отсюда видно, что $n + m < 0$, а это соответствует только точке А.

2) $m^2 + n^2 > 1,5^2 + (-1,5)^2 = 4,5$, что соответствует только точке D.

3) $\frac{3}{n} \approx \frac{3}{1,5} = 2$. Тогда выполняется примерная оценка $0 < \frac{3}{n} + m < 0,5$, что соответствует точке В.

4) Считая $n \approx 1,5$, получим $3 < n - m < 3,5$, что соответствует точке С.

Таким образом, точке А соответствует значение под номером 1, точке В соответствует значение под номером 3, точке С — под номером 4, точке D — под номером 2.

441. $x = 1\frac{5}{12} : \left(-5\frac{2}{3}\right)$,

$$1\frac{5}{12} : \left(5\frac{2}{3}\right) = \frac{17}{12} : \frac{17}{3} = \frac{17}{12} \cdot \frac{3}{17} = \frac{3}{12} = 3 : 12 = 0,25,$$

$$x = -0,25.$$

445. Прибавим к обеим частям уравнения число 5. Получим уравнение $0,2x = 5$. Разделим обе части этого уравнения на 0,2. Получим

$$x = \frac{5}{0,2} = 25.$$

449. Разделим обе части этого уравнения на 2,5. Получим $x - 2 = \frac{8}{2,5} = 3,2$. Прибавим к обеим частям уравнения число 2. Получим $x = 5,2$.

453. По условию $a = 5$, $b = 7$ и $c = -6$. Тогда по формуле корней получаем:

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-6)}}{2 \cdot 5},$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 120}}{10}, x_{1,2} = \frac{-7 \pm 13}{10},$$

$$x_1 = -2, x_2 = 0,6.$$

Большим корнем является $x_2 = 0,6$.

457. Перенесём $(3x - 4)^2$ из правой части уравнения в левую и разложим разность квадратов на множители:

$$(3x + 1)^2 - (3x - 4)^2 = 0, ((3x + 1) - (3x - 4))((3x + 1) + (3x - 4)) = 0, \\ 5(6x - 3) = 0, 6x - 3 = 0, x = 0,5.$$

461. Рассмотрим это уравнение как пропорцию — равенство двух дробей:

$$\frac{2x - 21}{x + 12} = \frac{x}{1}.$$

В пропорции произведение крайних членов равно произведению средних (если говорить образным языком, умножаем крест-накрест):

$$\frac{2x - 21}{x + 12} \cdot \frac{x}{1}.$$

Получим $x(x + 12) = 2x - 21$; $x^2 + 12x = 2x - 21$; $x^2 + 10x + 21 = 0$. Полученное уравнение имеет два корня: $x_1 = -3$; $x_2 = -7$. Убеждаемся, что оба числа являются корнями исходного уравнения, и пишем в ответ большее из них — (-3) .

465. Представим левую и правую части уравнения в виде дробей с числителем, равным 2:

$$\frac{1}{2x + 3} = \frac{2}{2(2x + 3)} = \frac{2}{4x + 6}; -2 = \frac{2}{-1}. \text{ Получим уравнение}$$

$\frac{2}{4x + 6} = \frac{2}{-1}$. Из равенства дробей следует, что $4x + 6 = -1$. Значит,

$$x = \frac{-7}{4} = -1,75.$$

469. Заметим, что $-125 = (-5)^3$. Из определения корня третьей степени получаем, что $x - \frac{3}{2} = -5$, $x = -3,5$.

$$473. \quad \left(\sqrt{\frac{5x+39}{16}}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$\frac{5x+39}{16} = \frac{4}{16},$$

$$5x+39 = 4,$$

$$5x = 4 - 39,$$

$$5x = -35,$$

$$x = -7.$$

Проверка: $\sqrt{\frac{5 \cdot (-7) + 39}{16}} = \frac{1}{2}$, $\sqrt{\frac{4}{16}} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

477. Возводим обе части уравнения в квадрат. Получим уравнение $66 - 5x = x^2$, $x^2 + 5x - 66 = 0$. По формулам Виета получаем два корня: $x_1 = -11$; $x_2 = 6$. $x_2 = 6$ корнем не является, так как $\sqrt{36} \neq -6$. $x_1 = -11$ корнем является, так как $\sqrt{121} = 11 = -(-11)$.

481. Из равенства нулю произведения следует, что хотя бы один из сомножителей равен нулю. Если $\sqrt{5-x} - 4 = 0$, то $\sqrt{5-x} = 4$. Возводим обе части уравнения в квадрат. Получим уравнение $5-x = 16$, $x = -11$. Аналогично из уравнения $\sqrt{7-x} - 2 = 0$ получим $x = 3$. Наибольшим из двух корней $x = -11$ и $x = 3$ является $x = 3$.

$$485. \quad 5^{2x+4} = 5^{-2},$$

$$2x+4 = -2,$$

$$2x = -2 - 4,$$

$$x = -3.$$

489. Заметим, что $81^{x+2} = (3^4)^{x+2} = 3^{4x+8}$ и $\frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} = 3^{-3}$. Получаем уравнение: $3^{4x+8} = 3^{-3}$. Отсюда следует, что $4x+8 = -3$, $4x = -11$, $x = -3,75$.

493. Заметим, что $0,4 = \frac{2}{5}$. Разделим обе части уравнения на 5^{3+x} . Получим уравнение $\frac{2^{3+x}}{5^{3+x}} = \frac{2}{5}$, $\left(\frac{2}{5}\right)^{3+x} = \left(\frac{2}{5}\right)^1$, $3+x = 1$, $x = -2$.

497. По определению логарифма:

$$x + 8 = 2^5,$$

$$x + 8 = 32,$$

$$x = 24.$$

501. $\log_5(3x - 9) = \log_5 6^2,$

$$3x - 9 = 6^2,$$

$$3x - 9 = 36,$$

$$3x = 36 + 9,$$

$$3x = 45,$$

$$x = 15.$$

Проверка: $\log_5(3 \cdot 15 - 9) = 2 \log_5 6,$

$$\log_5(36) = \log_5 36,$$

$x = 15$ — корень уравнения.

505. Решим сначала уравнение $\frac{12}{x-4} = x+7$. Оно равносильно в ОДЗ

уравнениям: $12 = (x-4)(x+7), 12 = x^2 + 3x - 28, x^2 + 3x - 40 = 0.$

По формулам Виета получаем $x_1 = -8$ и $x_2 = 5$. Теперь выберем такие значения, при которых $x+7 > 0$. При $x = -8$ значение $x+7 < 0$, а при $x = 5$ значение $x+7 > 0$. Поэтому уравнение имеет единственный корень $x = 5$.

$$509. 1) -\frac{7}{8} + 4\frac{2}{3} = -\frac{7}{8} + \frac{4 \cdot 3 + 2}{3} = -\frac{7}{8} + \frac{14}{3} =$$

$$= -\frac{7^{\setminus 3}}{8} + \frac{14^{\setminus 8}}{3} = -\frac{21}{24} + \frac{112}{24} = \frac{112 - 21}{24} = \frac{91}{24}.$$

$$2) \frac{91}{24} \cdot 9,6 = \frac{91}{24} \cdot 9 \frac{6}{10} = \frac{91}{24} \cdot \frac{96}{10}.$$

Сокращаем 96 и 24, $96 : 24 = 4,$

$$\frac{91}{24} \cdot \frac{96}{10} = \frac{91 \cdot 4}{10} = \frac{364}{10} = 36 \frac{4}{10} = 36,4.$$

513. По формуле разности квадратов получаем

$49x^2 - 25 = (7x+5)(7x-5)$. Поэтому

$$\frac{49x^2 - 25}{7x+5} - 7x = \frac{(7x+5)(7x-5)}{7x+5} - 7x = 7x - 5 - 7x = -5.$$

Значит, $\frac{49x^2 - 25}{7x+5} - 7x = -5$ при любом значении x .

517. По свойствам степеней получаем:

$$(5^{-7} \cdot 5^{10}) : 5^4 = 5^{((-7)+10)-4} = 5^{-1} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

$$521. (4^3)^7 : 4^{22} = 4^{3 \cdot 7 - 22} = 4^{-1} = 0,25.$$

$$525. \frac{18^3 \cdot 3^2}{3^7} = \frac{(3^2 \cdot 2)^3 \cdot 3^2}{3^7} = \frac{3^8 \cdot 2^3}{3^7} = 3 \cdot 8 = 24.$$

529. По указанным выше формулам $\sqrt[15]{a^{18}} = \sqrt[5]{a^6}$. Поэтому $\sqrt[15]{a^{18}} \cdot \sqrt[5]{a^4} = \sqrt[5]{a^6} \cdot \sqrt[5]{a^4} = \sqrt[5]{a^{10}} = a^2$. Так как $a = 0,5$, то $a^2 = 0,25$.

$$533. \frac{14 \sqrt[18]{x} \sqrt[9]{x}}{\sqrt[6]{x}} = \frac{14x^{\frac{1}{18}} x^{\frac{1}{9}}}{x^{\frac{1}{6}}} = 14x^{\frac{1}{18} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6}} = 14x^{\frac{1}{18} + \frac{2}{18} - \frac{3}{18}} = 14.$$

537. $\sqrt{(a-5)^2} + \sqrt{(a-7)^2} = |a-5| + |a-7|$. Так как $a > 5$, то $|a-5| = a-5$. Так как $a < 7$, то $|a-7| = 7-a$.

Значит, $|a-5| + |a-7| = (a-5) + (7-a) = 7-5 = 2$.

541. По определению логарифма $3^{\log_3 7} = 7$.

$$545. 6^{2 \log_6 5} = 6^{\log_6 5^2} = 5^2 = 25.$$

$$549. \log_7 4,9 + \log_7 10 = \log_7 (4,9 \cdot 10) = \log_7 49 = \log_7 (7^2) = 2.$$

$$553. \log_{16} \log_3 9 = \log_{16} 2 = \log_{2^4} 2 = \frac{1}{4} \log_2 2 = \frac{1}{4} = 0,25.$$

557. По формуле замены логарифма по одному основанию через логарифмы по другому основанию получаем:

$$\frac{\log_{16} 17^3}{\log_{16} \sqrt{17}} = \log_{\sqrt{17}} 17^3 = \log_{17^{\frac{1}{2}}} 17^3 = \log_{17^{\frac{1}{2}}} 17^3.$$

Отсюда по свойствам логарифмов получаем:

$$\log_{17^{\frac{1}{2}}} 17^3 = \frac{3}{\frac{1}{2}} \log_{17} 17 = 6.$$

$$\begin{aligned} 561. (1 - \log_3 15)(1 - \log_5 15) &= (\log_3 3 - \log_3 15)(\log_5 5 - \log_5 15) = \\ &= \left(\log_3 \frac{3}{15}\right) \left(\log_5 \frac{5}{15}\right) = \left(\log_3 \frac{1}{5}\right) \left(\log_5 \frac{1}{3}\right) = (-\log_3 5)(-\log_5 3) = \\ &= \frac{1}{\log_5 3} \cdot \log_5 3 = 1. \end{aligned}$$

565. Заметим, что $\sin 55^\circ = \sin(90^\circ - 35^\circ)$. По формулам приведения $\sin(90^\circ - 35^\circ) = \cos 35^\circ$. Поэтому $\frac{3 \cos 35^\circ}{\sin 55^\circ} = \frac{3 \cos 35^\circ}{\cos 35^\circ} = 3$.

569. $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = 17 - 1 = 16$. Так как $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{tg} \alpha > 0$, поэтому $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{16} = 4$.

$$573. 14\sqrt{6} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} = 14\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 14\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = 42.$$

577. По формулам приведения $\cos 67,5^\circ = \sin 22,5^\circ$. Тогда
 $(\cos^2 67,5^\circ - \cos^2 22,5^\circ) \cdot \cos 67,5^\circ \cos 22,5^\circ =$
 $= (\sin^2 22,5^\circ - \cos^2 22,5^\circ) \sin^2 22,5^\circ \cos 22,5^\circ$. По формулам двойного аргумента получаем $(\cos^2 67,5^\circ - \cos^2 22,5^\circ) \cdot \cos 67,5^\circ \cos 22,5^\circ =$
 $= -\cos 45^\circ \cdot \frac{1}{2} \sin 45^\circ = -\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -0,25$.

581. Подставляя в уравнение $y = \frac{k}{x} + b$ в качестве значения x первую координату точки, вместо y — вторую координату, получим систему уравне-

$$\text{ний } \begin{cases} 6 = \frac{k}{6} + b, \\ 10 = \frac{k}{-2} + b. \end{cases} \quad \text{Вычтем из первого уравнения второе: } -4 = \frac{k}{6} + \frac{k}{2};$$

$$-4 = \frac{2}{3}k; k = -6.$$

$$\text{Тогда } 6 = \frac{-6}{6} + b; b = 7.$$

585. Пусть функция, график которой изображён на рисунке левее, задаётся уравнением $f(x) = ax + b$. Функция, график которой изображён на рисунке правее, задаётся уравнением $g(x) = cx + d$.

Графику функции $f(x) = ax + b$ принадлежат точки $(-1; -3)$ и $(-4; 3)$. Поэтому верны два равенства;

$$\begin{cases} -3 = -a + b, \\ 3 = -4a + b. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим $-6 = 3a$, $a = -2$. Подставляя вместо a число -2 в первое уравнение, получим $b = -5$. Поэтому $f(x) = -2x - 5$.

Графику функции $g(x) = cx + d$ принадлежат точки $(0; 3)$ и $(1; -3)$. Поэтому верны два равенства;

$$\begin{cases} 3 = d, \\ -3 = c + d. \end{cases}$$

Подставляя вместо d число 3 во второе уравнение, получим $c = -6$. Поэтому $g(x) = -6x + 3$. Абсциссой точки пересечения графиков является решение уравнения $-2x - 5 = -6x + 3$, $x = 2$.

589. Находим коэффициенты a , b и c уравнения $g(x) = ax^2 + bx + c$. Точки $(-1; 6)$, $(1; -4)$ и $(2; 3)$ принадлежат графику функции $g(x)$. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 6 = a - b + c, \\ -4 = a + b + c, \\ 3 = 4a + 2b + c. \end{cases}$$

Вычитаем первое уравнение из второго и третьего.

$$\begin{cases} -10 = 2b, \\ -3 = 3a + 3b. \end{cases}$$

Отсюда $b = -5$ и $a = 4$ и $c = 6 - a + b = -3$.

Получаем $g(x) = 4x^2 - 5x - 3$. Для нахождения ординаты точки B находим её абсциссу из уравнения

$$4x^2 - 5x - 3 = -4x + 11. \text{ Корнями этого уравнения являются числа } 2 \text{ и } -\frac{7}{4}. f\left(-\frac{7}{4}\right) = 18.$$

593. По рисунку определяем, что точки $(-2; 2)$ и $(0; 1)$ принадлежат графику функции, поэтому справедливы равенства:

$$\begin{cases} 2 = \log_a(b + 2), \\ 1 = \log_a b; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 = b + 2, \\ a = b. \end{cases}$$

Отсюда $a^2 - a - 2 = 0$. Тогда получаем два значения a — -1 и 2 . Так как основание логарифма не может быть отрицательным, то $a = 2$.

Получаем, что $f(x) = \log_2(2 - x)$. Решаем уравнение $6 = \log_2(2 - x)$, $2 - x = 2^6$, $x = -62$.

597. Точки $(3; 4)$ и $(8; 6)$ принадлежат графику функции $g(x) = a\sqrt{x + b}$. Поэтому справедливы равенства:

$$\begin{cases} 4 = a\sqrt{3 + b}, \\ 6 = a\sqrt{8 + b}. \end{cases} \quad \frac{4}{\sqrt{3 + b}} = \frac{6}{\sqrt{8 + b}},$$

$16(8 + b) = 36(3 + b)$, $128 + 16b = 108 + 36b$. Отсюда $b = 1$ и $a = 2$, $g(x) = 2\sqrt{x + 1}$.

Находим абсциссу точки пересечения графиков, решая уравнение $0,8x - 4 = 2\sqrt{x + 1}$.

Возводим обе части уравнения в квадрат и переносим в левую часть все слагаемые из правой части, получим уравнение $0,64x^2 - 10,4x + 12 = 0$.

Корнями этого уравнения являются числа 15 и $\frac{10}{8}$. Однако $\frac{10}{8}$ корнем

уравнения $0,8x - 4 = 2\sqrt{x + 1}$ не является, так как $0,8 \cdot \frac{10}{8} - 4 < 0$.

Получим $x = 15$.

601. Находим коэффициенты a , b и c уравнения $g(x) = ax^2 + bx + c$ по точкам её графика: $(-1; 2)$, $(1; -2)$ и $(3; -4)$. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2 = a - b + c, \\ -2 = a + b + c, \\ -4 = 9a + 3b + c. \end{cases}$$

Вычитаем первое уравнение из второго и третьего.

$$\begin{cases} -4 = 2b, \\ -6 = 8a + 4b. \end{cases}$$

Отсюда $b = -2$ и $a = 0,25$ и $c = 2 - a + b = -0,25$.

Получаем $g(x) = 0,25x^2 - 2x - 0,25$. Находим абсциссу точки B из уравнения

$0,25x^2 - 2x - 0,25 = -0,25x^2 + 1,5x + 3,75$, $0,5x^2 - 3,5x - 4 = 0$, $x^2 - 7x - 8 = 0$. Корнями этого уравнения являются числа 8 и -1 . Абсцисса точки B равна 8.

605. По графику функции видно, что функция — убывающая, поэтому знак производной в точке касания — «минус». Выберем две точки касательной, например, $(-2; -9)$ и $(-5; -3)$. Разность их абсцисс $\Delta x = 3$, разность ординат $\Delta y = 6$. Делим Δy на Δx , получаем $6 : 3 = 2$, ставим знак «—».

609. Производная функции $f(x)$ положительна в точке, если эта точка принадлежит промежутку возрастания и касательная в ней не горизонтальна.

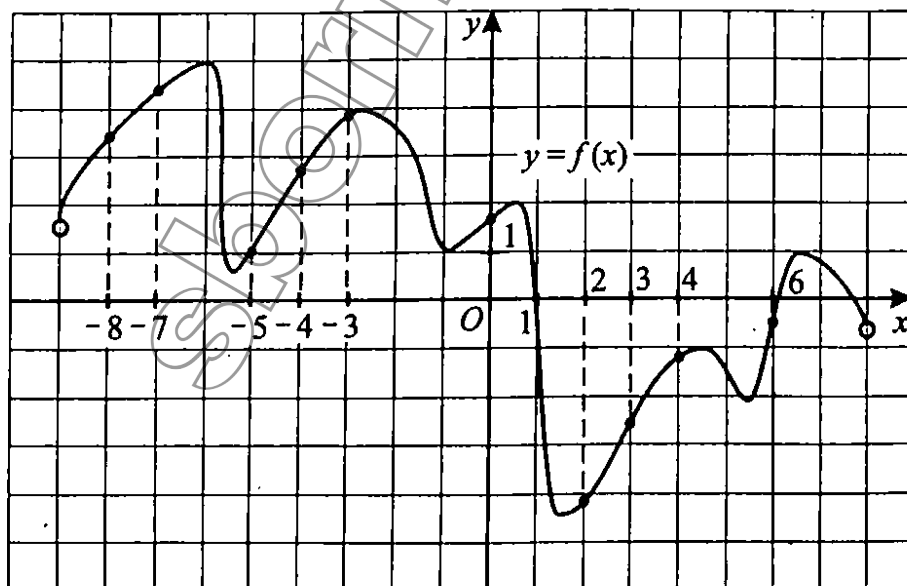


Рис. 502

На рисунке 502 отмечены точки, принадлежащие промежуткам возрастания, в которых производная функции $f(x)$ положительна. Это точки

−8; −7; −5; −4; −3; 0; 2; 3; 4; 6. Количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ положительна, равно 10.

613. Значение функции положительно в тех точках, в которых график проходит выше горизонтальной оси абсцисс. Для того чтобы значение производной функции в заданной точке было положительным, достаточно того, чтобы рассматриваемая точка принадлежала интервалу возрастания и касательная в этой точке не была горизонтальной прямой.

Аналогично значение функции отрицательно в тех точках, в которых график проходит ниже горизонтальной оси абсцисс. Если значение производной в заданной точке является отрицательным, то эта точка принадлежит промежутку убывания.

Опираясь на вышесказанное, получим, что в точке A значение функции отрицательно и значение производной функции отрицательно. Из тех же соображений заметим, что в точке B значение функции отрицательно, а значение производной функции положительно. В точке C значение функции положительно и значение производной функции положительно. Наконец, в точке D значение функции положительно, а значение производной функции отрицательно. Остаётся выписать ответ — 1243.

617. Точка является точкой экстремума непрерывной функции, если при прохождении через эту точку производная меняет знак, то есть график производной пересекает ось абсцисс Ox . Производная функции $y = f'(x)$ на отрезке $[-4; 3]$ меняет знак три раза, поэтому количество точек экстремума функции $y = f(x)$ на данном промежутке равно 3.

621. Точка является точкой экстремума дифференцируемой функции, если при прохождении через неё знак производной меняется, то есть график производной пересекает ось абсцисс Ox . Таких точек на интервале $(-3; 3)$ две: $x = -1$ и $x = 2$.

Точка является точкой максимума непрерывной функции, если при прохождении через эту точку знак производной меняется с «+» на «−». В данном случае точкой максимума является точка $x = -1$ (см. рис. 503, с. 450).

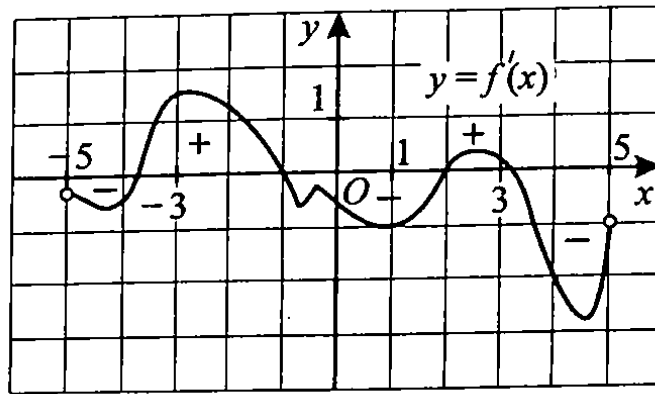


Рис. 503

625. Расставим знаки производной (см. рис. 504) и выберем промежутки, где производная отрицательна (на них функция убывает). Это и будут промежутки убывания: $[-1; 2]$, $[6; 13]$, $[15; 16]$. Длина наибольшего из них равна $13 - 6 = 7$.

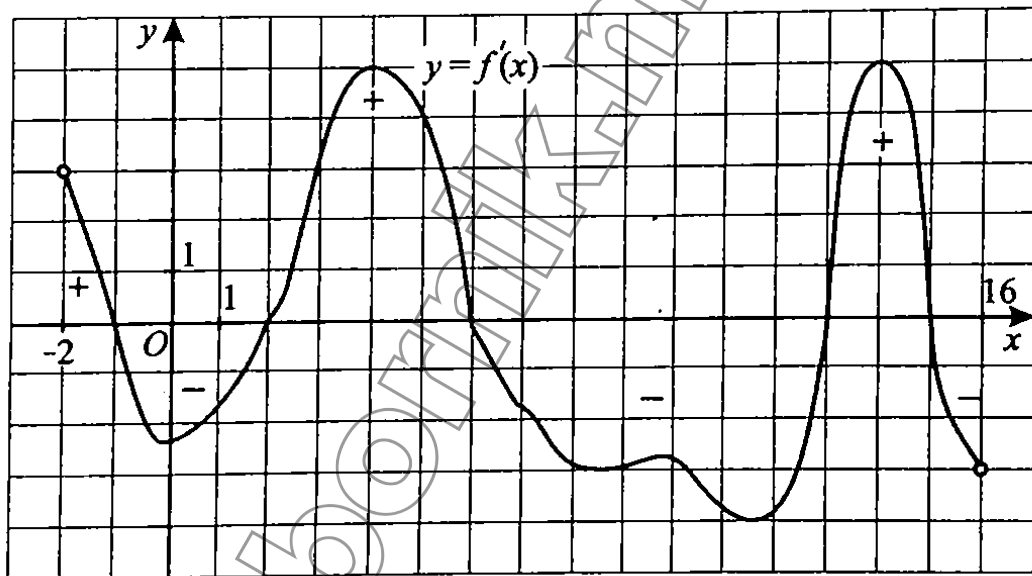


Рис. 504

629. Значение производной в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной, проведённой к графику этой функции в точке с абсциссой x_0 . $f'(x)$ наименьшее в точке, в которой касательная образует самый маленький тупой угол с осью Ox («горка» в этом месте на вид «самая крутая»). Проведём касательные в заданных точках (см. рис. 505, с. 451). Тупые углы (а значит, $f'(x) < 0$) в точках $x = -1$ и $x = 4$. $\alpha < \beta$, значит, наименьшая производная в точке 4.

633. Касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = x + 1$ или совпадает с ней, если её угловой коэффициент $k = 1$. Но значение углового коэффициента касательной равно значению

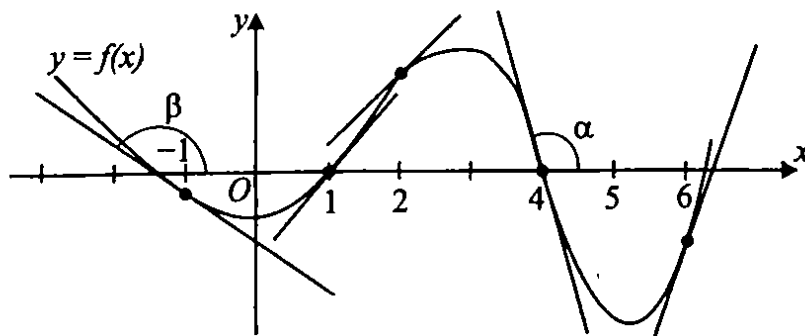


Рис. 505

производной в точке касания, то есть нам нужно найти точки, в которых производная $f'(x) = 1$. Построим прямую $y = 1$, параллельную оси Ox (см. рис. 506). Видим, что прямая и график функции имеют 4 общие точки. Это и значит, что $f'(x) = 1$ в этих четырёх точках, и в них касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = x + 1$ или совпадает с ней.

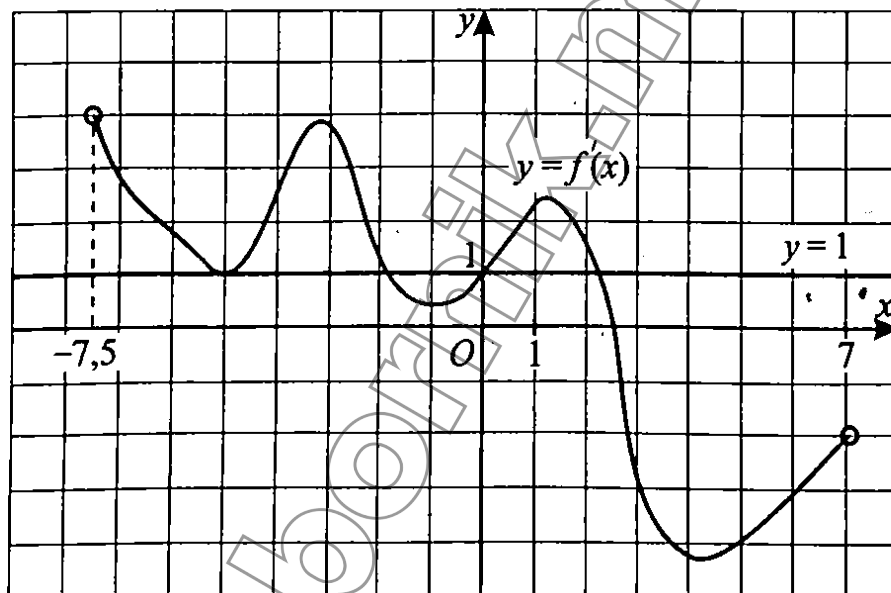


Рис. 506

637. По графику найдём значение производной функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$, которое будет тангенсом искомого угла наклона касательной: $f'(3) = 1 = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \alpha = 45^\circ$.

641. Угловым коэффициентом касательной равен значению производной в точке касания. Угловым коэффициентом касательной $y = -4x + 15$ равен -4 . Получим $y'(x) = -4$, где

$$y'(x) = (x^3 + 3x^2 - 4x + 11)' = 3x^2 + 6x - 4.$$

$3x^2 + 6x - 4 = -4$; $3x^2 + 6x = 0$; $3x(x + 2) = 0$, следовательно, $x = 0$ либо $x = -2$.

Мы получили два возможных значения для абсциссы точки касания. Выбрать одно из них можно, подставив найденные значения x в формулы функции и касательной. В точке касания значения функции и прямой должны совпасть.

$$\text{При } x = 0 \quad y = x^3 + 3x^2 - 4x + 11 = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 11 = 11;$$

$$y_{\text{кас}} = -4x + 15 = -4 \cdot 0 + 15 = 15.$$

$$y(0) = 11, \quad y_{\text{кас}}(0) = 15.$$

Так как значения функции и касательной при $x = 0$ разные, абсцисса $x = 0$ нам не подходит.

Проверим при $x = -2$:

$$y = x^3 + 3x^2 - 4x + 11 = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 11 = \\ = -8 + 12 + 8 + 11 = 23;$$

$$y_{\text{кас}} = -4x + 15 = -4 \cdot (-2) + 15 = 8 + 15 = 23.$$

Значения функции и касательной при $x = -2$ равны, значит, абсцисса точки касания $x = -2$.

645. По графику функции $y = f'(x)$ определяем, что производная равна нулю в двух точках промежутка $(-5; 0)$. Но только при переходе через одну из них производная меняет знак с «+» на «-». Этой точкой является первая слева точка, в которой производная обращается в ноль.

649. Заштрихованная фигура является криволинейной трапецией, ограниченной отрезками прямых $x = -2$ и $x = 1$ и графиком функции $y = f(x)$. Для вычисления площади фигуры используем формулу $S = F(b) - F(a)$, в нашем случае $a = -2$, $b = 1$.

$$S = F(1) - F(-2) = \frac{2 \cdot 1^3}{3} + 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 1 - \\ - \left(\frac{2 \cdot (-2)^3}{3} + 2 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 1 \right) = \\ = \frac{2}{3} + 2 + 3 - 1 - \left(-\frac{16}{3} + 8 - 6 - 1 \right) = \frac{2}{3} + \frac{16}{3} + 4 - 1 = \\ = \frac{18}{3} + 3 = 6 + 3 = 9.$$

653. Найдём разность первообразных, посчитав площадь трапеции $ABCD$ (см. рис. 507, с. 453).

$$F(3) - F(-1) = S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BA = \frac{3 + 4}{2} \cdot 2 = 7.$$

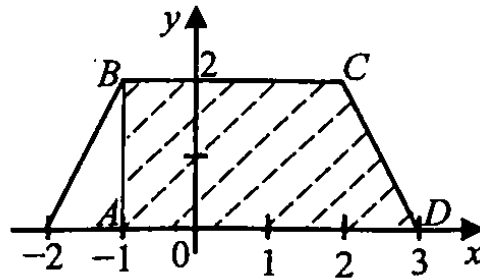


Рис. 507

657. Найдём производную заданной функции.

$$y' = 2 \cdot 3 \cdot x^2 - 5 \cdot 2 \cdot x - 4 = 6x^2 - 10x - 4 = 2\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 2).$$

$$y' = 0 \text{ при } x = 2, x = -\frac{1}{3} \text{ (см. рис. 508).}$$

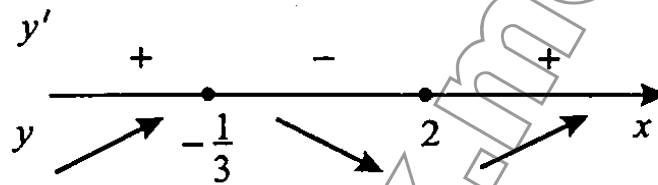


Рис. 508

Следовательно, единственной точкой минимума является $x = 2$, так как при переходе через неё производная функции меняет знак с «-» на «+».

661. Найдём производную заданной функции.

$$y' = 2(x - 2)(-2x - 3) + (x - 2)^2 \cdot (-2) = 2(x - 2)(-2x - 3 - x + 2) = 2(x - 2)(-3x - 1).$$

$$y' = 0 \text{ при } x = 2, x = -\frac{1}{3}.$$

Заметим, что графиком производной является парабола, ветви которой направлены вниз. Поэтому на промежутке $\left(-\frac{1}{3}; 2\right)$ производная имеет знак «плюс», а на промежутке $(2; +\infty)$ — знак «минус». Значит, до точки $x = 2$ функция возрастает, а после неё убывает. Следовательно, $x = 2$ является точкой максимума. Точка $x = -\frac{1}{3}$ является точкой минимума,

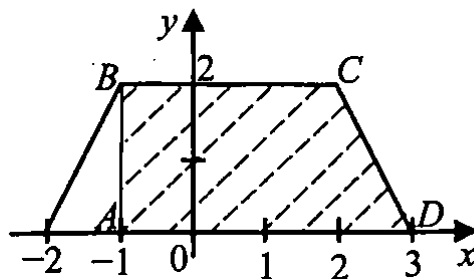


Рис. 507

657. Найдём производную заданной функции.

$$y' = 2 \cdot 3 \cdot x^2 - 5 \cdot 2 \cdot x - 4 = 6x^2 - 10x - 4 = 2\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 2).$$

$$y' = 0 \text{ при } x = 2, x = -\frac{1}{3} \text{ (см. рис. 508).}$$

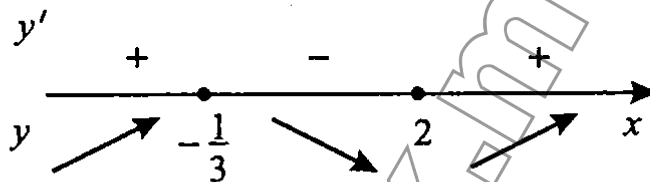


Рис. 508

Следовательно, единственной точкой минимума является $x = 2$, так как при переходе через неё производная функции меняет знак с «-» на «+».

661. Найдём производную заданной функции.

$$y' = 2(x - 2)(-2x - 3) + (x - 2)^2 \cdot (-2) = 2(x - 2)(-2x - 3 - x + 2) = 2(x - 2)(-3x - 1).$$

$$y' = 0 \text{ при } x = 2, x = -\frac{1}{3}.$$

Заметим, что графиком производной является парабола, ветви которой направлены вниз. Поэтому на промежутке $\left(-\frac{1}{3}; 2\right)$ производная имеет знак «плюс», а на промежутке $(2; +\infty)$ — знак «минус». Значит, до точки $x = 2$ функция возрастает, а после неё убывает. Следовательно, $x = 2$ является точкой максимума. Точка $x = -\frac{1}{3}$ является точкой минимума,

так как на промежутке $(-\infty; -\frac{1}{3})$ производная имеет знак «минус», а на промежутке $(-\frac{1}{3}; 2)$ — знак «плюс».

Следовательно, единственной точкой максимума является $x = 2$, так как при переходе через неё производная функции меняет знак с «+» на «-».

665. 1. Найдём производную:

$$y'(x) = (3\sqrt{2}\sin x + 3\sqrt{2}x - 15)' = 3\sqrt{2}\cos x + 3\sqrt{2} + 0 = 3\sqrt{2}\cos x + 3\sqrt{2}.$$

2. Определим знаки производной $y'(x) = 3\sqrt{2}\cos x + 3\sqrt{2}$.

Это выражение неотрицательно при всех значениях x , так как $\cos x$ принимает значения от -1 до $+1$ (всегда выполняется $3\sqrt{2}\cos x + 3\sqrt{2} \geq 3\sqrt{2} \cdot (-1) + 3\sqrt{2} = 0$). Следовательно, $y'(x) \geq 0$, и функция возрастает при всех значениях x . Наименьшее значение возрастающая функция принимает на левом конце заданного промежутка (при наименьшем возможном значении аргумента $x = 0$).

3. Вычисляем значение функции в точке $x = 0$.

$$y = 3\sqrt{2}\sin 0 + 3\sqrt{2} \cdot 0 - 15 = -15.$$

669. 1. Найдём производную:

$$y' = (16x - 16 \operatorname{tg} x + 4\pi - 56)' = 16 - \frac{16}{\cos^2 x} - 0 = \frac{16\cos^2 x - 16}{\cos^2 x} = \frac{16(\cos^2 x - 1)}{\cos^2 x}.$$

2. Определим знаки производной на промежутке $[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \cos x \leq 1, \quad 0 < \frac{1}{2} \leq \cos^2 x \leq 1, \quad \cos^2 x - 1 \leq 0.$$

$$y'(x) = \frac{16(\cos^2 x - 1)}{\cos^2 x} \leq 0.$$

Следовательно, заданная функция не возрастает на промежутке $[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$.

Наибольшее значение невозрастающая функция принимает на левом конце заданного промежутка, то есть при наименьшем возможном значении аргумента $x = -\frac{\pi}{4}$.

$$y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 16 \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) - 16 \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 4\pi - 56 = \\ = -4\pi + 16 + 4\pi - 56 = -40.$$

673. 1. Найдём значения функции на концах отрезка:

$$y(-9) = (-9 + 7)e^{-9+8} = -2e^{-1} \approx -\frac{20}{27}, \text{ так как } e \approx 2,7;$$

$$y(-7) = (-7 + 7)e^{-7+8} = 0.$$

2. Найдём производную:

$$y' = ((x + 7)e^{x+8})' = (x + 7)'e^{x+8} + (x + 7)(e^{x+8})' = \\ = 1e^{x+8} + (x + 7)e^{x+8} = (1 + x + 7)e^{x+8} = (x + 8)e^{x+8}.$$

3. Найдём значения x , при которых производная функции равна нулю:
 $(x + 8)e^{x+8} = 0$; $x + 8 = 0$; $x = -8$.

4. Это значение $x = -8$ принадлежит промежутку, данному в задаче:
 -8 лежит на отрезке $[-9; -7]$.

5. Найдём значение функции в точке, где производная равна нулю:

$$y(-8) = (-8 + 7)e^{-8+8} = -1 \cdot 1 = -1.$$

6. Видим, что из чисел -1 ; $-\frac{20}{27}$; 0 наименьшим является -1 .

677. 1. По условию $y = x^{\frac{5}{2}} - 6x^{\frac{3}{2}} + 18$ ($x \geq 0$). Найдём производную:

$$y' = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1} - 6 \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{18}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}(5x - 18). y' = 0 \text{ при } x = 0$$

и $x = 3,6$.

2. Знак y' совпадает со знаком функции $y = 5x - 18$ на интервале $(0; +\infty)$. Её графиком является прямая линия, которая образует острый угол с положительным направлением оси Ox . Поэтому при $0 < x < 3,6$ производная отрицательна, а при $x > 3,6$ — положительна. Следовательно, на промежутке $0 < x < 3,6$ заданная функция убывает, а на промежутке $x > 3,6$ — возрастает. Точка $x = 3,6$ является точкой минимума.

681. 1. Найдём производную:

$$y' = 5x - \frac{5}{x^2} = \frac{5x^3 - 5}{x^2} = 5 \frac{x^3 - 1}{x^2}. y' = 0 \text{ при } x = 1.$$

2. Знак y' совпадает со знаком функции $y = x^3 - 1$. Её график получается из кубической параболы $y = x^3$ параллельным переносом вверх

вдоль оси Oy на одну единицу. Поэтому при $-\infty < x < 0$ производная отрицательна, при $0 < x < 1$ — отрицательна, а при $x > 1$ — положительна.

Следовательно, на промежутке $\frac{1}{2} < x < 1$ заданная функция убывает, а на промежутке $1 < x < 10$ — возрастает. Точка $x = 1$ является точкой минимума, и она — единственная точка минимума, поэтому в ней заданная функция принимает наименьшее значение. $y(1) = \frac{5}{2} + 5 + 2013 = 2020,5$.

$$685. y = \log_3(x^2 + 2x + 4) + 3. \quad y' = \frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + 4) \ln 3}; \quad y' = 0 \text{ при } x = -1.$$

Заметим, что $x^2 + 2x + 4 > 0$ для любого x , так как $D < 0$ и коэффициент при x^2 положителен. При переходе через $x = -1$ производная меняет знак с «−» на «+» (см. рис. 509). Значит, точка $x = -1$ является точкой минимума.

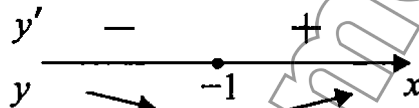


Рис. 509

Наименьшее значение $y(-1) = 4$.

689. Пусть по всем четырём показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, равную x , тогда рейтинг можно посчитать по формуле

$$R = \frac{7In + Op + 3Tr + Q}{A} = \frac{7x + x + 3x + x}{A} = \frac{12x}{A}. \text{ По условию } R = x,$$

$$\frac{12x}{A} = x, \quad A = 12.$$

693. Значение выручки предприятия за месяц, соответствующее условию задачи, задано формулой

$$r = q \cdot p = (280 - 10p)p.$$

По условию $r \geq 960$, поэтому

$$(280 - 10p)p \geq 960,$$

$$280p - 10p^2 \geq 960,$$

$$-10p^2 + 280p - 960 \geq 0,$$

$$p^2 - 28p + 96 \leq 0,$$

$p_1 = 4, p_2 = 24 \Rightarrow p \in [4; 24], p_{\max} = 24$. То есть максимальный уровень цены, при котором выручка предприятия составит не менее 960 тыс. руб., равен 24 тыс. руб.

697. Составим и решим неравенство:

$$\eta \geq 75\%, \quad \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\% \geq 75\%,$$

$$\frac{T_1 - 350}{T_1} \geq 0,75, \quad T_1 - 350 \geq 0,75T_1,$$

$$T_1 - 0,75T_1 \geq 350, \quad 0,25T_1 \geq 350,$$

$$T_1 \geq 1400.$$

Наименьшее искомое значение температуры нагревателя равно 1400 К.

701. Составим и решим неравенство:

$$h(t) \geq 25, \quad -5t^2 + 30t \geq 25, \quad t^2 - 6t + 5 \leq 0, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 5, \quad t \in [1; 5]$$

(см. рис. 510), $\Delta t = t_2 - t_1 = 4$.

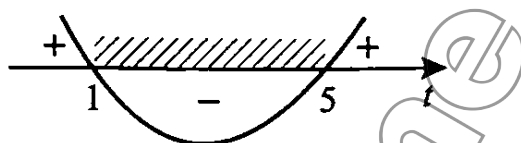


Рис. 510

Итак, на высоте не менее 25 м мяч находился в течение 4 секунды.

705. Время полёта $t \geq 5$ с, значит, $\frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \geq 5$. $\sin \alpha \geq \frac{5g}{2v_0}$,

$$\sin \alpha \geq \frac{5 \cdot 1,6}{2 \cdot 8}, \quad \sin \alpha \geq \frac{1}{2}. \text{ Наименьший острый угол } \alpha = 30^\circ.$$

709. Из условия следует, что $E = \frac{0,16 \cdot 4 \cos^2 \pi t}{2}$, $E = 0,32 \cos^2 \pi t$.

Пусть $t \in [0; 1]$. Найдём, при каких t выполняется $E \geq 0,24$, то есть $0,32 \cos^2 \pi t \geq 0,24$; $\cos^2 \pi t \geq \frac{3}{4}$; $\cos \pi t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\cos \pi t \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Учиты-

вая, что $t \in [0; 1]$, получим $\pi t \in [0; \frac{\pi}{6}]$ или $\pi t \in [\frac{5\pi}{6}; \pi]$, откуда $t \in [0; \frac{1}{6}]$

или $t \in [\frac{5}{6}; 1]$.

Таким образом, $E \geq 0,24$ на протяжении $\frac{1}{6}$ секунды в начале 1-й се-

кунды и $\frac{1}{6}$ в её конце. И тогда $E \geq 0,24$ на протяжении $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ секунды,

$$\frac{1}{3} \approx 0,33.$$

713. Приведём данные к требуемым единицам измерения: $90 \text{ см} = 0,9 \text{ м}$.

Составим неравенство по условию задачи и решим его относительно скорости.

$$P = m \left(\frac{v^2}{L} - g \right) \geq 0,$$

$$\frac{v^2}{L} - g \geq 0,$$

$$v^2 \geq gL, \quad v > 0,$$

$$v \geq \sqrt{gL}, \quad v \geq \sqrt{10 \cdot 0,9}, \quad v \geq \sqrt{9} = 3.$$

Итак, искомое минимальное значение скорости вращения ведёрка равно 3 м/с .

717. Запишем формулу работы $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$ и подставим данные из условия $\nu = 40 \text{ моль}$, $p_1 = 1,3 \text{ атм}$, $\alpha = 3,5$, $T = 300 \text{ К}$. Получим

$$3,5 \cdot 40 \cdot 300 \log_2 \frac{p_2}{1,3} \leq 126\,000, \quad \log_2 \frac{p_2}{1,3} \leq \frac{126\,000}{3,5 \cdot 40 \cdot 300}, \quad \log_2 \frac{p_2}{1,3} \leq 3,$$

$$\frac{p_2}{1,3} \leq 2^3, \quad \frac{p_2}{1,3} \leq 8, \quad p_2 \leq 10,4.$$

Наибольшее давление при данных условиях равно $10,4 \text{ атм}$.

721. Чтобы ответить на вопрос, с какой высоты горизонт виден на расстоянии 16 километров , подставим в формулу $l = \sqrt{2Rh}$ известные величины и решим уравнение:

$$\sqrt{2 \cdot 6400 \cdot h} = 16,$$

$$80\sqrt{2 \cdot h} = 16, \quad \sqrt{2 \cdot h} = \frac{16}{80}, \quad \sqrt{2 \cdot h} = \frac{1}{5},$$

$$2 \cdot h = \frac{1}{25}, \quad h = \frac{1}{50} = 0,02, \quad h = 0,02 \text{ км}.$$

725. $F_A \leq 1\,130\,400$,

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \rho g \leq 1\,130\,400,$$

$$R^3 \leq \frac{3 \cdot 1\,130\,400}{\pi \rho g \cdot 4},$$

$$R^3 \leq \frac{3 \cdot 1\,130\,400}{3,14 \cdot 1000 \cdot 10 \cdot 4} = 27,$$

$$R \leq 3.$$

Следовательно, максимальный радиус батискафа составляет 3 м .

729. Составим выражение для определения разности высот и вычислим эту величину.

$$h_1 = 4,9t_1^2, \quad h_2 = 4,9t_2^2,$$

$$\Delta h = h_2 - h_1 = 4,9(t_2^2 - t_1^2) = 4,9(5,5^2 - 4,5^2) =$$

$$= 4,9(5,5 - 4,5)(5,5 + 4,5) = 49.$$

То есть второе сооружение выше первого на 49 м.

733. 1) Утверждение не является верным, так как верным по правилу обращения следствия было бы утверждение «Если на доме не загорается фонарь, то к дому не подъезжает автомобиль».
- 2) Утверждение верно, так как является обращением исходного утверждения.
- 3) Утверждение неверно, так как фонарь загорается независимо от цвета подъезжающего автомобиля.
- 4) Утверждение верно, так как фонарь загорается независимо от цвета подъезжающего автомобиля.

737. Сумма, выделяемая на каждый вид расходов, является положительным числом, изображаемым точкой на числовой прямой. Чем больше число, тем правее соответствующая точка.

Пусть O , $П$, $К$, $Р$ — суммы, выделяемые на одежду, питание, коммунальные услуги и ремонт соответственно. По условию $O < П < Р$, $O < К$. Отметим указанные точки на числовой прямой (см. рис. 511).

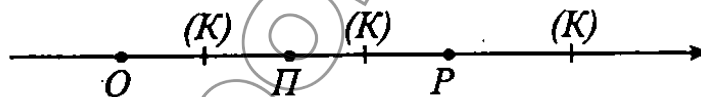


Рис. 511

На рисунке указаны различные возможные положения точки $К$ (все они правее точки O).

Используя рисунок, сделаем выводы относительно данных четырёх утверждений.

- 1) Утверждение верно.
- 2) Утверждение не следует из имеющихся данных, так как точки $К$ и $П$ могут не совпадать.
- 3) Утверждение верно.
- 4) Утверждение не следует из имеющихся данных, так как точка $К$ может находиться справа от точки $Р$ на числовой прямой.

741. Обозначим через H , $Я$, $К$ соответственно множество не отдыхавших нигде сотрудников, множество тех, кто отдыхал в Китае, и множество тех, кто отдыхал в Японии. Тогда множества $Я$ и $К$ не пусты по условию и не пересекаются (так как отдыхавшие в Китае не отдыхали в Японии). Изобразим указанные множества на рисунке 512.

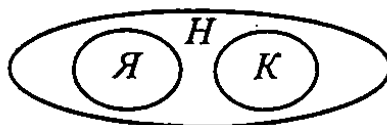


Рис. 512

Рассмотрим, какие утверждения следуют из исходных данных.

- 1) Утверждение не следует из исходных данных, так как некоторые сотрудники отдела могли не отдыхать нигде.
- 2) Утверждение следует из исходных данных.
- 3) Как и утверждение 1, это утверждение не следует из исходных данных: некоторые сотрудники отдела могли не отдыхать нигде.
- 4) Утверждение следует из исходных данных.

745. Обозначим:

H — множество учащихся, не посещающих кружки;

$Б$ — множество учащихся, посещающих только кружок по биологии;

$Х$ — множество учащихся, посещающих только кружок по химии;

$БХ$ — множество учащихся, посещающих оба кружка.

Существуют разные варианты распределения школьников по кружкам. На рисунке 513 представлены два «крайних» случая: на диаграмме слева множество H пусто, а на диаграмме справа пусто множество $Х$.

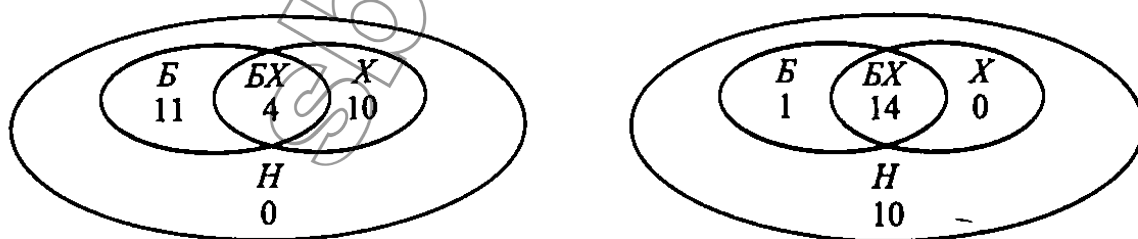


Рис. 513

Рассмотрим, какие утверждения следуют из исходных данных.

- 1) Утверждение не следует из исходных данных, что иллюстрирует диаграмма слева.
- 2) Утверждение не следует из исходных данных, что иллюстрируют обе диаграммы.

- 3) Утверждение следует из исходных данных, что иллюстрируют диаграммы. Действительно, если число не посещающих кружки школьников равно 0, то число посещающих оба кружка равно 4, так как $25 = (15 + 14) - 4$ (диаграмма слева). С увеличением числа школьников, не посещающих кружки, число посещающих оба кружка увеличивается вплоть до 14 (диаграмма справа).
- 4) Утверждение не следует из исходных данных, что иллюстрирует диаграмма слева.

749. Согласно условию масса каждого отдыхающего лежит на интервале от 56 кг до 100 кг. Рассмотрим, какие утверждения следуют из этих данных.

- 1) Утверждение не следует из исходных данных. Отдыхающий с массой 98 кг может как найтись (так как $56 < 98 < 100$), так и не найтись (например, если все отдыхающие легче 95 кг).
- 2) Утверждение не следует из исходных данных. Например, утверждение ложно в случае приезда только двух отдыхающих с массой 57 кг и 90 кг.
- 3) Утверждение не следует из исходных данных. Например, утверждение ложно в случае приезда только двух отдыхающих с массой 57 кг и 90 кг.
- 4) Утверждение верно, так как разница между массой пары отдыхающих меньше длины интервала (56 кг; 100 кг), равной 44 кг.

753. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов. В данном треугольнике катеты равны 2 см и 6 см (посчитаем по клеточкам), поэтому площадь $S = \frac{2 \cdot 6}{2} = 6$ (см²).

757. Проведём высоту h . Треугольник тупоугольный, поэтому высота проводится вне треугольника.

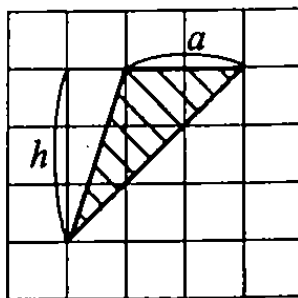


Рис. 514

На рисунке 514 (см. с. 461) сторона $a = 2$ см, высота $h = 3$ см.

$$S = \frac{ah}{2} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3 \text{ см}^2.$$

761. Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон a и b . Для того чтобы найти стороны прямоугольника, рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = 2$ и $BC = 1$ и гипотенузой $AC = b$ (см. рис. 515).

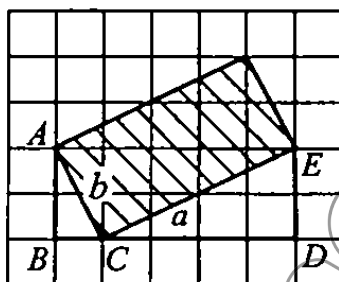


Рис. 515

По теореме Пифагора гипотенуза $b = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Из треугольника CDE с катетами $CD = 4$ и $DE = 2$ найдём гипотенузу CE . $a = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$. Следовательно, площадь прямоугольника $S = \sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = 10$ (см²).

765. Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон AD и AB (см. рис. 516).

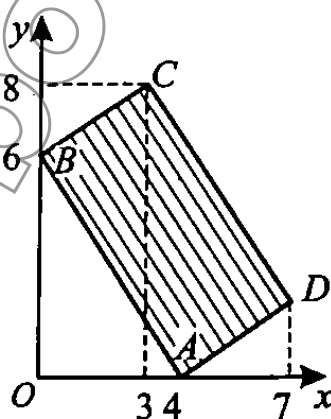


Рис. 516

По теореме Пифагора $AD = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$. Из треугольника OAB с катетами $OA = 4$ и $OB = 6$ найдём гипотенузу AB .

$AB = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$. Следовательно, площадь прямоугольника $S = \sqrt{13} \cdot \sqrt{52} = 26$.

769. Площадь трапеции равна половине произведения суммы оснований на высоту. Обозначим трапецию $ABCD$. Проведём из точки D высоту DM к основанию AB . По рисунку 517 видно, что высота равна 2 см, основания $AB = 4$ см, $DC = 2$ см.

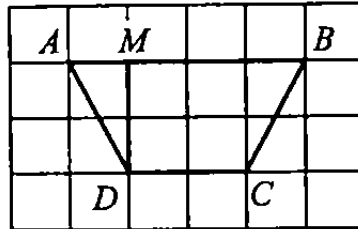


Рис. 517

$$\text{Площадь трапеции } S = \frac{(2 + 4) \cdot 2}{2} = 6 \text{ (см}^2\text{)}.$$

773. Диагонали находим как гипотенузы прямоугольных треугольников ACB и MPK по теореме Пифагора (см. рис. 518).

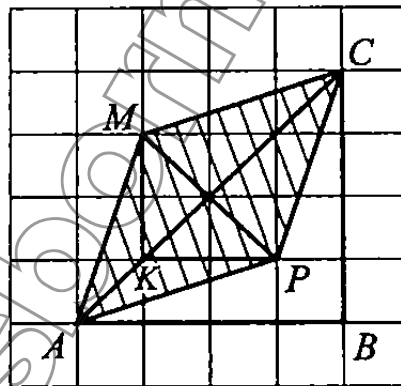


Рис. 518

Диагональ $AC = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$, $MP = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$. Площадь ромба $S = \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{32}}{2} = 8$.

777. Достроим четырёхугольник до прямоугольника (см. рис. 519 на с. 464).

Чтобы найти площадь четырёхугольника, нужно из площади прямоугольника со сторонами 5 и 6 вычесть площади четырёх прямоугольных

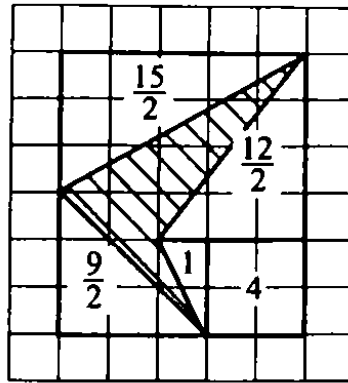


Рис. 519

треугольников и квадрата. Попробуйте посчитать площади прямоугольных треугольников самостоятельно, величины этих площадей указаны на рисунке.

Получаем площадь заданного четырёхугольника:

$$S = 30 - 7,5 - 6 - 1 - 4,5 - 4 = 7 \text{ (см}^2\text{)}.$$

781. Площадь круга равна произведению числа π на квадрат радиуса. Найдём радиус. Из центра O проведём радиус OA . В треугольнике OAB сторона OA — гипотенуза, катеты равны 1 и 2 (см. рис. 520).

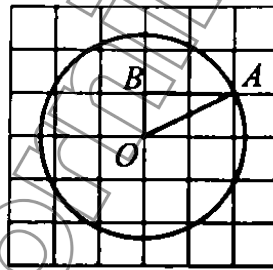


Рис. 520

Найдём гипотенузу по теореме Пифагора.

$$OA = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}. \text{ Площадь круга } S = \pi(\sqrt{5})^2 = 5\pi, \frac{S}{\pi} = \frac{5\pi}{\pi} = 5.$$

785. Посчитаем, какая часть круга заштрихована. Проведя дополнительные линии (см. рис. 521 А, с. 465), видим, что сектор на рисунке А составляет $\frac{1}{8}$ часть круга. Поэтому $S_C = 4\pi : 8 = 0,5\pi$; $\frac{S_C}{\pi} = 0,5$.

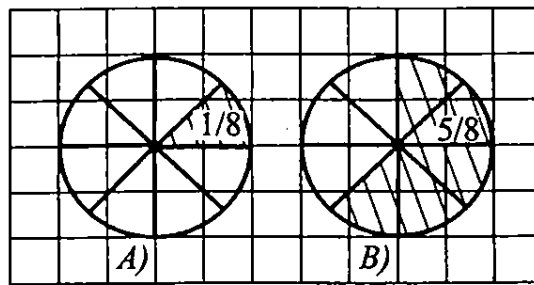


Рис. 521

789. Сумма углов треугольника равна 180° , а четырёхугольника — 360° .

В $\triangle ACE$ $\angle 5 = 180^\circ - \angle 1 - \angle 2 = 180^\circ - 52^\circ - 26^\circ = 102^\circ$ (см. рис. 522).

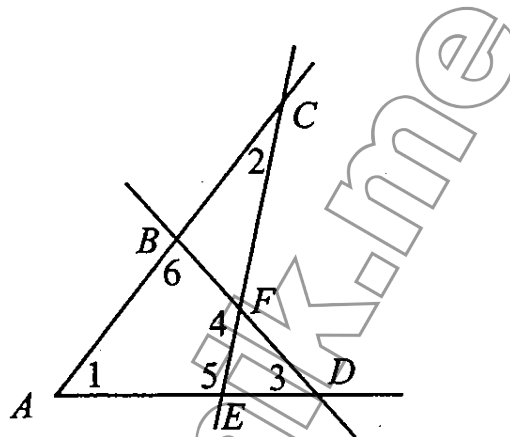


Рис. 522

В $\triangle ABD$ $\angle 6 = 180^\circ - \angle 1 - \angle 3 = 180^\circ - 52^\circ - 48^\circ = 80^\circ$.

В четырёхугольнике $ABFE$ $\angle 1 + \angle 6 + \angle 4 + \angle 5 = 360^\circ$,
 $\angle 4 = 360^\circ - 52^\circ - 80^\circ - 102^\circ = 126^\circ$.

793. 1. $\angle OAC = \frac{1}{2} \angle A = \frac{1}{2} \cdot 62^\circ = 31^\circ$.

2. $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 62^\circ - 76^\circ = 42^\circ$.

3. $\angle OCA = \frac{1}{2} \angle C = \frac{1}{2} \cdot 42^\circ = 21^\circ$.

4. $\angle AOK$ — внешний угол треугольника $\triangle ACO$, значит,
 $\angle AOK = \angle OAC + \angle OCA = 31^\circ + 21^\circ = 52^\circ$.

797. В $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 39^\circ$, $\angle B = 51^\circ$.

CD — биссектриса, $\angle ACD = \angle DCB = 45^\circ$.

CH — высота, $\angle AHC = 90^\circ$. Нужно найти $\angle DCH$, он равен разности $\angle ACH - \angle ACD$.

Найдём $\angle ACH$ из $\triangle ACH$.

$$\angle ACH = 180^\circ - 90^\circ - 39^\circ = 51^\circ. \quad \angle DCH = 51^\circ - 45^\circ = 6^\circ.$$

801. $\triangle MKB = \triangle MBE$ по первому признаку ($KM = ME$ по условию, MB — общая сторона. $\angle KMB = \angle BME$, так как MB — биссектриса), $\angle BEM = \angle K = 95^\circ$.

Внешний угол $\triangle BEP$ равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним, то есть $\angle BEM = \angle P + \angle PBE$.

$$\angle PBE = 95^\circ - 35^\circ = 60^\circ.$$

805. Средняя линия трапеции параллельна основаниям трапеции, и её концы являются серединами боковых сторон. $DC \parallel AB \parallel EF$, $ED = EA$, $BF = CF$. Параллельные прямые DC , EF и AB проходят через концы равных отрезков на одной прямой (AD), значит, и на прямой DB они отсекают равные отрезки (по теореме Фалеса). $BK = DK \Rightarrow EK$ и KF — средние линии $\triangle ADB$ и $\triangle DCB$. Средняя линия треугольника равна половине параллельной ей стороны, $EK = AB : 2 = 14 : 2 = 7$; $KF = DC : 2 = 10 : 2 = 5$. Большой из отрезков равен 7.

809. В параллелограмме $ABCD$ пронумеруем образовавшиеся углы (см. рис. 523). По условию BE и CE — биссектрисы углов B и $C \Rightarrow \angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 = \angle 5$ как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей $BE \Rightarrow \angle 1 = \angle 5 \Rightarrow AE = AB$.

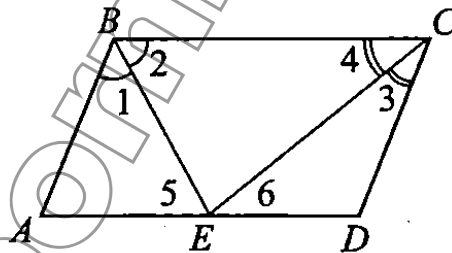


Рис. 523

$\angle 3 = \angle 4$, $\angle 4 = \angle 6$ как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей $CE \Rightarrow \angle 3 = \angle 6 \Rightarrow DC = DE$.

$AB = DC$ как противоположные стороны параллелограмма \Rightarrow

$$\Rightarrow AB = AE = DC = DE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \cdot 14 = 7.$$

813. Сумма углов, не смежных с данным внешним углом, равна величине этого внешнего угла, то есть $\angle A + \angle C = 85^\circ$.

Обозначим $\angle A = 2x$, $\angle C = 3x$.

$$2x + 3x = 85, \quad 5x = 85, \quad x = 17.$$

$\angle C = 3x = 3 \cdot 17 = 51^\circ$ — наибольший из углов A и C .

817. По рисунку определяем, что треугольник ABC — равнобедренный ($AB = AC$). Поэтому его высота h является медианой. А медиана, как видно из рисунка, является гипотенузой прямоугольного треугольника, у которого катеты равны по $3\sqrt{2}$. Следовательно, $h^2 = (3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 36$. Отсюда $h = 6$.

821. Угол между касательной и радиусом, проведённым в точку касания, прямой: $\angle OAC = 90^\circ$. Центральный угол $\angle DOA$ равен угловой величине дуги, на которую он опирается, то есть $\angle DOA = \sphericalangle DA = 128^\circ$. Внешний угол треугольника равен сумме двух углов, не смежных с ним, $\angle DOA = \angle OAC + \angle ACO$, $\angle ACO = 128^\circ - 90^\circ = 38^\circ$.

825. Вписанный угол равен половине градусной меры дуги, на которую он опирается. $\angle AMB = 0,5 \sphericalangle AB = 0,5 \cdot 106^\circ = 53^\circ$. $\angle MAK = 0,5 \sphericalangle MK = 0,5 \cdot 42^\circ = 21^\circ$. $\angle AMB$ — внешний к углу M $\triangle AMC$, значит, $\angle AMB$ равен сумме $\angle MCA$ и $\angle MAC$ этого треугольника.

$$\angle C = \angle AMB - \angle MAC = 53^\circ - 21^\circ = 32^\circ.$$

829. Угол между хордой и касательной к окружности, проведённой из конца хорды, равен половине угловой величины дуги, которую стягивает эта хорда. $\angle CBA = 0,5 \sphericalangle AB = 0,5 \cdot 104^\circ = 52^\circ$.

833. $\angle ABD = \angle ABC - \angle DBC$. $\angle DAC = \angle DBC = 52^\circ$ (как вписанные углы, которые опираются на одну и ту же дугу). $\angle ABD = 113^\circ - 52^\circ = 61^\circ$.

837. Четырёхугольник $ABCD$ — вписанный, поэтому сумма его противоположных углов равна 180° .

По условию $\angle A : \angle B : \angle D = 5 : 2 : 6$.

Обозначим $\angle A = 5x$, $\angle B = 2x$, $\angle D = 6x$.

$$\angle B + \angle D = 180^\circ, 8x = 180^\circ, x = 22,5^\circ.$$

$$\angle C = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 5x = 180^\circ - 112,5^\circ = 67,5^\circ.$$

841. У любого четырёхугольника, описанного около окружности, суммы длин противоположных сторон равны, то есть $BC + AD = DC + AB$.

Поэтому $AD + CB = \frac{P}{2} = 42 : 2 = 21$. Наибольшая боковая сторона

$CB = 12 \Rightarrow AD = 21 - 12 = 9$. Так как $AD \perp AB$, то $MK = AD = 2R$, где R — радиус вписанной окружности. Тогда $R = 9 : 2 = 4,5$.

845. $ABCD$ — прямоугольник, $AC = BD$, $OC = OD$ (см. рис. 524 на с. 468). $\angle ABC = 90^\circ$, значит, AC — диаметр.

В равнобедренном $\triangle COD$ $\angle COD = 60^\circ$, значит, $\triangle COD$ — равнобедренный, $OC = CD = 12$.

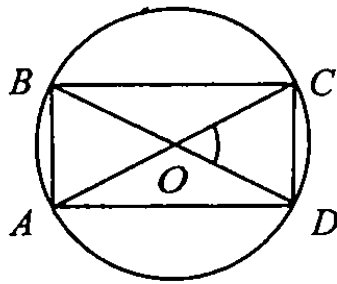


Рис. 524

849. В равнобедренном треугольнике центр вписанной окружности O лежит на высоте, проведённой к основанию, т.е. $O \in CH$ (см. рис. 525). O — точка пересечения биссектрис. $OH = r$. AO — биссектриса, она делит сторону CH треугольника ACH на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, $\frac{AH}{HO} = \frac{AC}{CO}$. CH — медиана, как высота, проведённая к основанию равнобедренного треугольника ABC , $AH = 30 : 2 = 15$. Из $\triangle ACH$ по теореме Пифагора $CH = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$. $\frac{15}{r} = \frac{25}{20 - r}$, $25r = 15(20 - r)$, $40r = 15 \cdot 20$, $r = 7,5$.

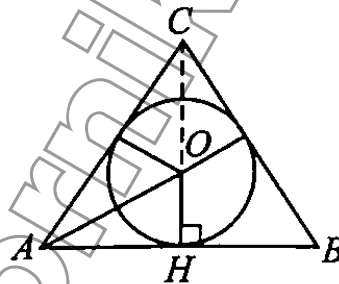


Рис. 525

853. По теореме синусов отношение стороны к синусу противолежащего к ней угла равно $2R$:

$$\frac{7}{\sin 30^\circ} = 2R, \frac{7}{\frac{1}{2}} = 2R, 14 = 2R, R = 7.$$

857. Если в одном сантиметре заключено 0,5 км, то в 6 см соответственно заключено в 6 раз больше, то есть $6 \cdot 0,5 = 3$ (км).

861. Участок имеет прямоугольную форму, его общая площадь (вместе с домом) равна произведению сторон $30 \cdot 60 = 1800 \text{ м}^2$. Площадь дома аналогично равна $4 \cdot 6 = 24 \text{ (м}^2\text{)}$.

Значит, искомая площадь равна $1800 - 24 = 1776 \text{ (м}^2\text{)}$.

865. Участок имеет прямоугольную форму, длина изгороди, огораживающей весь участок, равна $2 \cdot (30 + 35) = 130$ м. Для огораживания квадратного участка понадобится ещё $2 \cdot 20 = 40$ м изгороди. Суммарная длина изгороди равна $130 + 40 = 170$ м.

869. Рассмотрим рисунок 526. В $\triangle ABC$ $\angle A = 90^\circ$, $AC = 12$ м, $BC = 13$ м. По теореме Пифагора имеем $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Отсюда $AB^2 = BC^2 - AC^2$, $AB^2 = 13^2 - 12^2 = 25$, $AB = 5$ м.

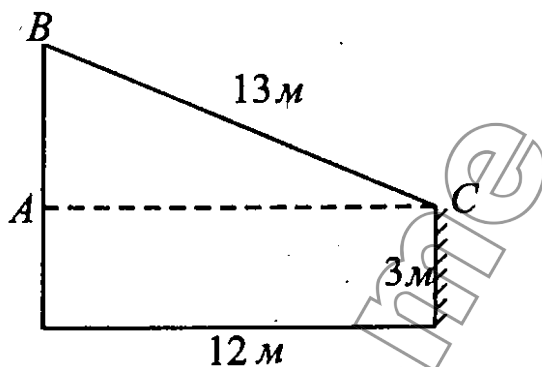


Рис. 526

Учитывая, что высота палатки 3 м, найдём высоту столба:
 $5 \text{ м} + 3 \text{ м} = 8 \text{ м}$.

873. Рассмотрим рисунок 527. $\triangle ACD \sim \triangle ABE$, $\frac{CD}{BE} = \frac{AD}{AE}$;

$AD = AE + ED = 20 + 20 = 40$; $\frac{CD}{1,8} = \frac{40}{20}$; $\frac{CD}{1,8} = 2$; $CD = 3,6$ м.

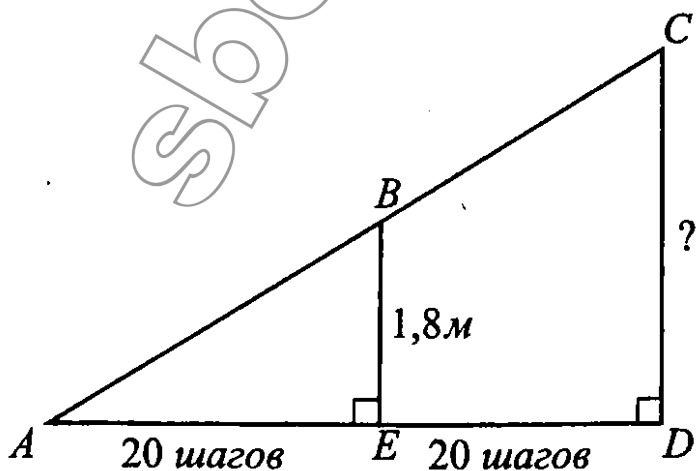


Рис. 527

877. Синусом острого угла в прямоугольном треугольнике называют отношение противолежащего катета к гипотенузе. По теореме Пифагора $AC^2 + BC^2 = AB^2$ найдём противолежащий углу A катет BC (см. рис. 528).

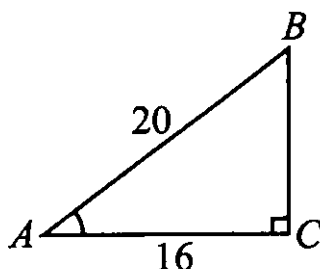


Рис. 528

$$BC^2 = AB^2 - AC^2, BC^2 = 20^2 - 16^2 = 400 - 256 = 144,$$

$$BC = \sqrt{144} = 12. \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{20} = 0,6.$$

881. Так как угол A острый, то

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - 0,28^2} = \sqrt{0,9216} = 0,96.$$

885. По условию $\operatorname{tg} A = \frac{3\sqrt{17}}{AC} = 4$. $AC = \frac{3\sqrt{17}}{4}$. По теореме Пифагора

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = \frac{9 \cdot 17}{16} + 9 \cdot 17 = \frac{9 \cdot 17^2}{16}, AB = \frac{3 \cdot 17}{4} = 12,75.$$

889. Достроим угол до прямоугольного треугольника ABC (см. рис. 529).

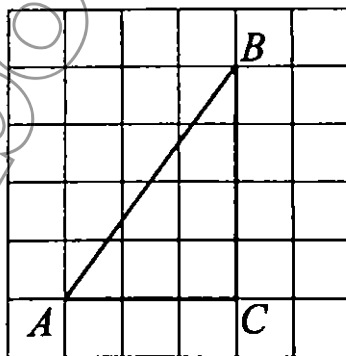


Рис. 529

Тангенсом угла называют отношение противолежащего катета к прилежащему.

$$\operatorname{tg} BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{3}. \text{ Значение тангенса, умноженное на 3, равно 4.}$$

893. Косинусом острого угла в прямоугольном треугольнике называют отношение прилежащего катета к гипотенузе. Рассмотрим прямоугольный треугольник CHB с прямым углом H и катетами BH и HC (см. рис. 530). Найдём в нём катет BH .

$$BH^2 = BC^2 - HC^2,$$

$$BH^2 = 15^2 - (2\sqrt{54})^2 = 225 - 216 = 9,$$

$$BH = \sqrt{9} = 3.$$

$$\cos B = \frac{BH}{BC} = \frac{3}{15} = 0,2.$$

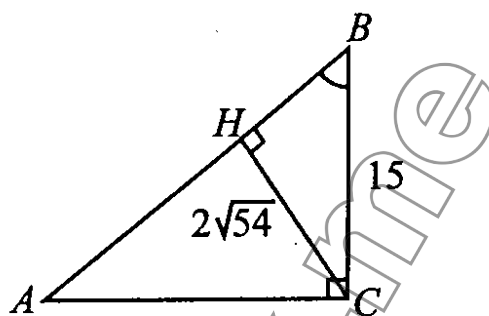


Рис. 530

897. Проведём высоту CH в треугольнике ABC . Тогда по свойству высоты в равнобедренном треугольнике $AH = 12$. $\frac{AH}{AC} = \cos A$, $\frac{12}{AC} = 0,6$,

$$AC = \frac{12}{0,6} = 20.$$

901. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны, значит, он равнобедренный. Высота CH , проведённая к основанию равнобедренного треугольника, делит AB пополам, поэтому $AH = HB = 24 : 2 = 12$. Рассмотрим прямоугольный треугольник CHA с прямым углом H и катетами AH и HC . $AH = 12$, $\cos A = 0,6$. Найдём AC . Косинусом острого угла в прямоугольном треугольнике называют отношение прилежащего катета к гипотенузе.

$$\cos A = \frac{AH}{AC} = \frac{12}{AC} = 0,6.$$

$$AC = 12 : 0,6 = 20.$$

По теореме Пифагора $CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$.

905. В равнобедренном треугольнике ABC высота CH является медианой, значит, $AH = HB$ (см. рис. 531 на с. 472). Рассмотрим прямоугольный треугольник BCH с гипотенузой $BC = 15$ и катетами CH и HB . В

данном треугольнике $\sin B = \frac{\sqrt{21}}{5} = \frac{CH}{CB}$, $\frac{\sqrt{21}}{5} = \frac{CH}{15}$, тогда

$$CH = \sqrt{21} \cdot 15 : 5 = 3\sqrt{21}.$$

Катет HB можно найти по теореме Пифагора:

$$\begin{aligned} HB &= \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{225 - (3\sqrt{21})^2} = \\ &= \sqrt{225 - 189} = \sqrt{36} = 6. \end{aligned}$$

AB в два раза больше HB , $AB = 6 \cdot 2 = 12$.

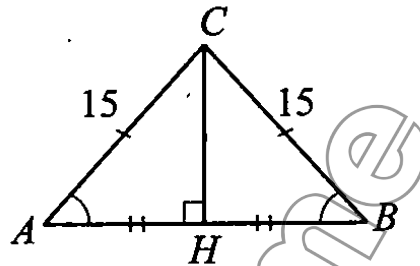


Рис. 531

909. Внешним углом треугольника называют угол, образованный стороной этого треугольника и продолжением другой его стороны. На рисунке 532 внешний угол при вершине A — это угол BAK .

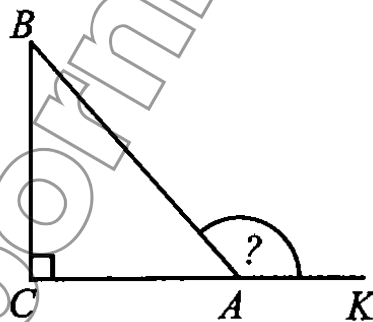


Рис. 532

BAK и CAB — смежные углы. Тангенсы смежных углов — противоположные числа (отличаются только знаком), поэтому найдём тангенс угла CAB . Тангенсом угла называют отношение противолежащего катета к прилежащему. Для нашего треугольника

$$\cos A = \frac{10}{\sqrt{109}} = \frac{AC}{BA}. \text{ Будем считать, что } AC = 10, BA = \sqrt{109}.$$

Найдём $BC = \sqrt{BA^2 - CA^2} = \sqrt{109 - 100} = \sqrt{9} = 3$. Тогда

$$\operatorname{tg} BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{10} = 0,3, \operatorname{tg} BAK = -0,3.$$

913. Внешним углом треугольника называют угол, образованный стороной этого треугольника и продолжением другой его стороны. На рисунке 533 внешний угол при вершине A — это угол BAK .

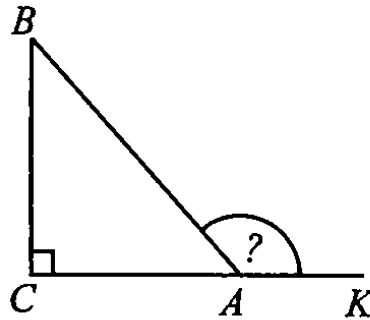


Рис. 533

BAK и CAB — смежные углы. Косинусы смежных углов — противоположные числа (отличаются только знаком). По условию $\cos \angle BAK = -\frac{11}{\sqrt{157}}$, поэтому $\cos \angle CAB = \frac{11}{\sqrt{157}} = \frac{AC}{AB}$. Отсюда

$$AC = \frac{11AB}{\sqrt{157}}.$$

По определению получаем, что $\frac{BC}{AB} = \sin A$, $\frac{2}{AB} = \sin A$.

$$\text{Но } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{121}{157}} = \frac{6}{\sqrt{157}}. \text{ Значит, } \frac{2}{AB} = \frac{6}{\sqrt{157}}.$$

$$\text{Следовательно, } AB = \frac{\sqrt{157}}{3}, \text{ } 3AC = \frac{3 \cdot 11AB}{\sqrt{157}} = 11.$$

917. Точке A симметрична точка $B(-2; 5)$ (см. рис. 534). Абсцисса точки B равна -2 .

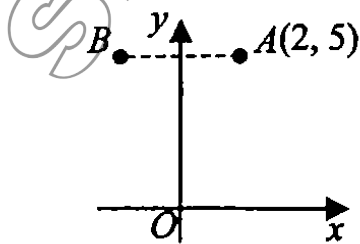


Рис. 534

921. Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Абсцисса точки P равна $\frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-1 + 6}{2} = 2,5$.

925. По рисунку и по условию определяем, что ордината точки A больше ординаты точки B на 4 единицы. Так как $OBAD$ — параллелограмм, то ордината точки D больше ординаты точки O также на 4 единицы ($12 - 8 = 4$). Но ордината точки O равна нулю. Значит, ордината точки D равна 4.

929. По определению $\overrightarrow{KN} - \overrightarrow{KP} = \overrightarrow{PN}$. Началом вектора является точка P , а его концом — точка N . Так как PN является стороной равностороннего треугольника со стороной 10, то $|\overrightarrow{PN}| = 10$.

933. Найдём координаты вектора \vec{a} . Он выходит из начала координат, поэтому его координаты равны координатам его конца: $\vec{a} \{2; 3\}$. Аналогично $\vec{b} \{6; 4\}$.

$\vec{a} - \vec{b}$ имеет координаты $\{2 - 6; 3 - 4\}$, то есть $\{-4; -1\}$. Сумма координат $-4 + (-1) = -5$.

937. Скалярное произведение векторов вычисляют по формуле $\overrightarrow{KN} \cdot \overrightarrow{KM} = |\overrightarrow{KN}| \cdot |\overrightarrow{KM}| \cdot \cos \alpha$, где α — угол между векторами. В правильном $\triangle MKN$ углы равны по 60° , поэтому $\overrightarrow{KN} \cdot \overrightarrow{KM} = 10 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ = 100 \cdot 0,5 = 50$.

941. Данный многогранник составлен из двух прямоугольных параллелепипедов (см. рис. 535). Измерения большого параллелепипеда равны 16, 6 и 7. Измерения малого параллелепипеда равны $16 - 10 = 6$, 6 и $10 - 7 = 3$.

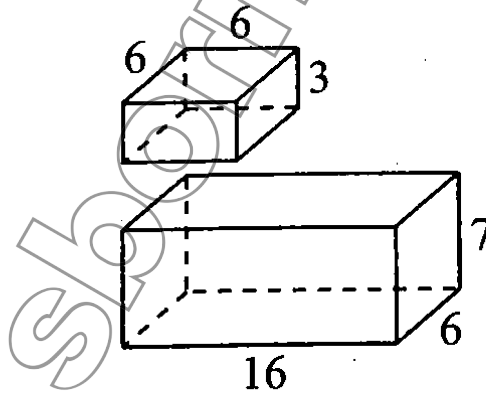


Рис. 535

Суммарный объём этих параллелепипедов равен $16 \cdot 6 \cdot 7 + 6 \cdot 6 \cdot 3 = 96 \cdot 7 + 36 \cdot 3 = 672 + 108 = 780$.

945. Проведём плоскость $F_1F_2K_2$ и отбросим ту часть фигуры, которая оказалась справа. Достроим оставшуюся часть многогранника до прямоугольного параллелепипеда $AFKDA_2F_2K_2D_2$ (см. рис. 536).

Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений.

$$AK_2^2 = FA^2 + DA^2 + AA_2^2 = 4^2 + 3^2 + 6^2 = 16 + 9 + 36 = 61.$$

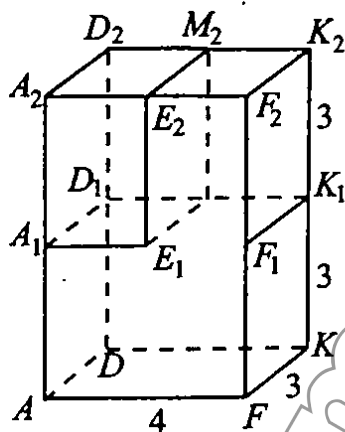


Рис. 536

949. Заметим, что угол F_2AB лежит в плоскости грани $AA_1E_1E_2F_2F_1B_1B$ многогранника (см. рис. 537). Все углы многогранника прямые, поэтому $F_2F_1 \perp AB$.

Продолжим F_2F_1 до пересечения с AB в точке F . В прямоугольном $\triangle AF_2F \angle F = 90^\circ$; $\operatorname{tg} \alpha = F_2F : AF = \frac{6}{4} = 1,5$.

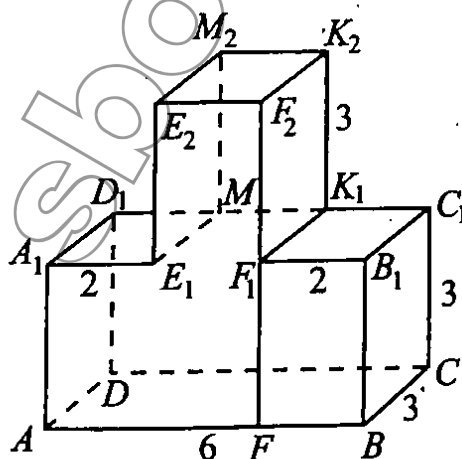


Рис. 537

953. При решении этой задачи данный многогранник удобнее всего рассматривать как прямую призму с высотой $h = 7$. Основанием этой призмы является многоугольник (см. рис. 538) с периметром $P = 2 \cdot (5 + 4) = 18$ и площадью $S_{\text{осн.}} = 5 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 17$.

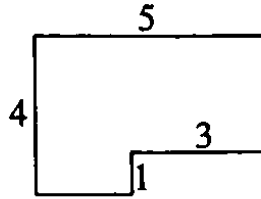


Рис. 538

Тогда площадь боковой поверхности призмы $S_{\text{бок.}} = Ph = 18 \cdot 7 = 126$, а площадь всей поверхности $S = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}} = 126 + 2 \cdot 17 = 160$.

957. Нам известны два измерения прямоугольного параллелепипеда (2 и 5), нужно найти третье измерение. Обозначим его через x . Тогда площадь поверхности параллелепипеда

$S = 2(2 \cdot 5 + 2x + 5x)$. По условию $S = 62$, поэтому $2(2 \cdot 5 + 2x + 5x) = 62$; $7x + 10 = 31$; $x = 3$. Искомое ребро равно 3.

961. Если обозначить ребро куба через a , то объём $V = a^3 = 24\sqrt{3}$, а диагональ $d = a\sqrt{3}$.

Из уравнения $a^3 = 24\sqrt{3}$ получаем:

$$a = \sqrt[3]{24\sqrt{3}} = \sqrt[6]{(24\sqrt{3})^2} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 3^3} = 2\sqrt{3}. \text{ Значит, } d = 2(\sqrt{3})^2 = 6.$$

965. Обозначим ребро куба через a . Тогда площадь поверхности исходного куба равна $6a^2$, а площадь поверхности увеличенного куба $6(a+1)^2$. По условию $6(a+1)^2 - 6a^2 = 90$; $12a + 6 = 90$; $12a = 84$; $a = 7$.

969. Обозначим через S площадь основания призмы. Тогда из формулы объёма призмы $V = Sh$ имеем $12S = 600$, $S = 50$ (см²). После погружения детали уровень воды поднялся на $16 - 12 = 4$ см. Объём детали $V = 50 \cdot 4 = 200$ (см³).

973. Обозначим через V_1 и S_1 объём и площадь основания исходной призмы, через V_2 и S_2 объём и площадь основания отсечённой призмы.

Так как у обеих призм общая высота, то $\frac{V_2}{V_1} = \frac{S_2}{S_1}$. Средняя линия отсекает от треугольника в основании исходной призмы подобный треугольник, коэффициент подобия $k = \frac{1}{2}$ (так как средняя линия в 2 раза меньше па-

параллельной ей стороны треугольника). Отсюда $\frac{S_2}{S_1} = k^2 = \frac{1}{4}$; $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{4}$;

$$V_2 = \frac{1}{4}V_1 = \frac{1}{4} \cdot 48 = 12.$$

977. По теореме Пифагора можно найти гипотенузу c треугольника в основании призмы. $c^2 = 5^2 + 12^2$; $c^2 = 169$; $c = 13$. Периметр основания призмы $P = 5 + 12 + 13 = 30$. Площадь прямоугольного треугольника в основании равна половине произведения его катетов: $S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$.

Площадь боковой поверхности $S_{\text{бок.}} = Ph = 30h$. В условии дана площадь всей поверхности призмы $S_{\text{полн.}} = 180$. Отсюда $S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}} = 180$; $30h + 2 \cdot 30 = 180$; $30h = 120$; $h = 4$.

981. В правильной шестиугольной призме (см. рис. 539) в основании лежит правильный шестиугольник $ABCDEF$, в котором $\angle EDC = 120^\circ$. По теореме косинусов для $\triangle EDC$ получаем:

$$EC^2 = ED^2 + DC^2 - 2 \cdot ED \cdot DC \cdot \cos \angle D.$$

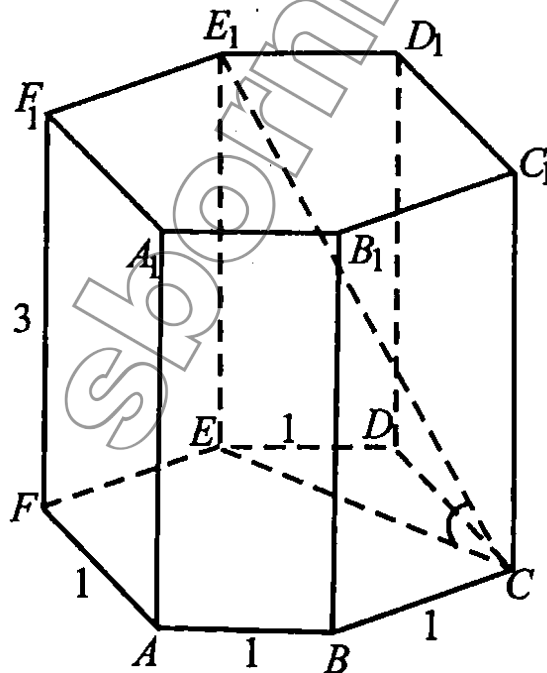


Рис. 539

$$EC^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos \angle 120^\circ,$$

$$EC^2 = 2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 2 + 1 = 3, \quad EC = \sqrt{3}.$$

$$\text{В } \triangle E_1EC \quad \angle E_1EC = 90^\circ, \quad EC = \sqrt{3}, \quad EE_1 = 3,$$

$$\operatorname{tg} \angle CE_1E = \frac{EC}{EE_1} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\angle CE_1E = 30^\circ.$$

985. Проведём апофему EH (см. рис. 540). EH — высота равнобедренного треугольника ABE , поэтому является его медианой, и

$$AH = BH = \frac{AB}{2} = \frac{16}{2} = 8.$$

По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника AEH имеем $EH^2 = AE^2 - AH^2$; $EH^2 = 17^2 - 8^2 = 225$; $EH = 15$. В основании пирамиды лежит квадрат с периметром $4 \cdot 16 = 64$ и площадью $16^2 = 256$. Искомая площадь равна сумме площади основания и площади боковой поверхности:

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{осн.}} + \frac{1}{2}Pl = 256 + \frac{1}{2} \cdot 64 \cdot 15 = 256 + 480 = 736.$$

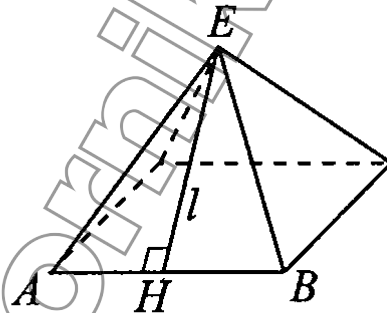


Рис. 540

989. По условию высота пирамиды $EH = 12$. Из прямоугольного треугольника ENG имеем $\operatorname{ctg} \angle EGH = \frac{HG}{EH}$;

$$HG = EH \operatorname{ctg} 60^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}. \text{ Аналогично из прямоугольного}$$

треугольника EHA получаем $HA = 4\sqrt{3}$. Площадь прямоугольника в основании $S_{\text{осн.}} = AB \cdot AD = HG \cdot (2 \cdot HA) = 4\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{3} = 96$. Объём

$$\text{пирамиды } V = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}}h = \frac{1}{3} \cdot 96 \cdot 12 = 384.$$

993. Опустим из вершины G перпендикуляр GH на плоскость основания пирамиды. В основании пирамиды лежит правильный шестиугольник, и точка H — его центр. В правильном шестиугольнике радиус описанной окружности равен стороне шестиугольника, поэтому отрезки AH, BH, \dots, FH разбивают шестиугольник на шесть равносторонних треугольников (см. рис. 541). Площадь каждого треугольника равна $4^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$, поэтому площадь шестиугольника равна $24\sqrt{3}$.

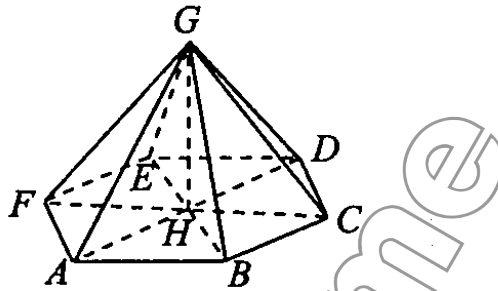


Рис. 541

Теперь найдём высоту пирамиды. По теореме Пифагора для треугольника AHG имеем $HG^2 = AG^2 - AH^2$; $HG^2 = 8^2 - 4^2$; $HG^2 = 48$; $HG = 4\sqrt{3}$.

Объём пирамиды равен трети произведения площади основания на высоту: $V = \frac{1}{3} \cdot 24\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 96$.

997. Указанный в условии многогранник является пирамидой, основанием которой является шестиугольник $ABCDEF$, а высотой — боковое ребро AA_1 . Поэтому её объём $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} h = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 3 = 4$.

1001. Объём воды после переливания остаётся тем же: $V_1 = V_2$; $\pi r_1^2 \cdot 45 = \pi r_2^2 \cdot h_2$. Так как диаметр второго сосуда в 3 раза больше диаметра первого, то и радиус второго втрое больше радиуса первого: $45r_1^2 = (3r_1)^2 \cdot h_2$; $45r_1^2 = 9r_1^2 \cdot h_2$; $h_2 = 5$ (см).

1005. Осевое сечение — это прямоугольник со сторонами $2r$ и h , где r — радиус основания, h — высота цилиндра. Площадь этого прямоугольника равна $2rh$. Площадь боковой поверхности цилиндра $S_{\text{бок.}} = 2\pi rh$. Отсюда $\frac{S_{\text{бок.}}}{\pi} = \pi \cdot 2rh = \pi \cdot \frac{6}{\pi} = 6$.

1009. По условию $h = l \sin 30^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$ (см. рис. 542);

$$r = l \cos 30^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}. \text{ Искомый объём}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot (5\sqrt{3})^2 \cdot 5 = 125\pi; \frac{V}{\pi} = 125.$$

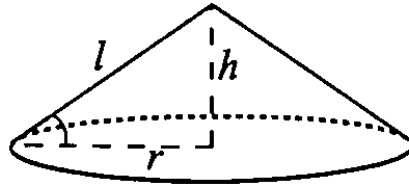


Рис. 542

1013. Угол 60° , вырезанный из основания, составляет $\frac{60}{360} = \frac{1}{6}$ часть

полного угла. Таким образом, $\frac{1}{6}$ часть конуса была удалена, $\frac{5}{6}$ осталось. Объём конуса с радиусом основания 15 и высотой 18 равен $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 15^2 \cdot 18 = 225 \cdot 6\pi = 1350\pi$. Искомый объём $V = \frac{5}{6} \cdot 1350\pi = 1125\pi$;

$$\frac{V}{\pi} = 1125.$$

1017. Обозначим через r радиус основания конуса, через l образующую. Тогда, по условию, $2\pi r = 4$; $\pi r = 2$.

$$S_{\text{бок.}} = \pi r l = 2 \cdot 5 = 10.$$

1021. Обозначим через r радиус шара. Тогда $\frac{4}{3}\pi r^3 = 36\,000\pi$;

$$r^3 = 27\,000; r = 30. \text{ Площадь поверхности шара}$$

$$S = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 30^2 = 3600\pi; \frac{S}{\pi} = 3600.$$

1025. Обозначим радиус шара через r . Тогда площадь большого круга шара равна πr^2 , а площадь поверхности шара — $4\pi r^2$. Таким образом, площадь поверхности шара в 4 раза больше площади большого круга шара и равна $4 \cdot 10 = 40$.

1029. Объём куба прямо пропорционален третьей степени его ребра, поэтому объём куба увеличится в $4^3 = 64$ раза.

1033. Объём конуса прямо пропорционален площади основания. Площадь основания равна πr^2 , то есть прямо пропорциональна квадрату радиуса. Таким образом, при увеличении радиуса основания в 2,5 раза объём конуса увеличится в $2,5^2 = 6,25$ раза.

1037. При увеличении всех линейных размеров тетраэдра в 3 раза его площадь поверхности увеличится в $3^2 = 9$ раз.

1041. Объём конуса равен $\frac{1}{3}Sh$, а объём цилиндра — Sh , где S — площадь их общего основания, h — общая высота. Видно, что объём цилиндра в 3 раза больше объёма конуса и равен $16 \cdot 3 = 48$.

1045. Каждая сторона прямоугольника в основании параллелепипеда равна диаметру цилиндра, то есть $2 \cdot 5 = 10$. Площадь основания параллелепипеда равна $10 \cdot 10 = 100$. Высоту h параллелепипеда находим из формулы объёма параллелепипеда: $100h = 600$; $h = 6$. Найденная высота параллелепипеда одновременно является и высотой цилиндра.

1049. Рассмотрим куб как четырёхугольную призму. Его объём $V_{\text{куб}} = S_{\text{осн.}} h_{\text{куб}}$. Основание пирамиды совпадает с основанием призмы, а высота вдвое меньше высоты призмы. Поэтому

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot \frac{1}{2} h_{\text{куб}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot V_{\text{куб}} = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5.$$

1053. Обозначим сторону шестиугольника в основании пирамиды через r . Правильный шестиугольник можно разбить на 6 правильных треугольников со стороной r , поэтому площадь шестиугольника равна $6 \cdot \frac{r^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} r^2$.

Найдём площадь треугольника ABC .

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 = \frac{1}{6} S_{ABCDEF}.$$

Таким образом, площадь основания пирамиды $GABC$ в 6 раз меньше площади основания шестиугольной пирамиды, а их высоты совпадают. Поэтому объёмы этих пирамид находятся в том же соотношении, что и площади их оснований.

$$V_{GABC} = \frac{1}{6} V_{GABCDEF} = \frac{1}{6} \cdot 60 = 10.$$

1057. а) По определению логарифма получаем

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + 0,5 \sin 2x - 2 \cos^3 x + 2 = 2.$$

$$\cos x + \sin x \cos x - 2 \cos^3 x = 0. \cos x(1 + \sin x - 2 \cos^2 x) = 0.$$

$$1) \cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$2) 1 + \sin x - 2 \cos^2 x = 0, 1 + \sin x - 2 + 2 \sin^2 x = 0, \\ 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$$

$$\text{Замена } \sin x = t, 2t^2 + t - 1 = 0. t_1 = -1, t_2 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Если } \sin x = -1, \text{ то } x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что множество чисел, которые находятся по формуле $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, содержится во множестве чисел, которые находятся по формуле $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Если } \sin x = \frac{1}{2}, \text{ то } x = \frac{\pi}{6} + 2m\pi, m \in \mathbb{Z}, x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Таким образом, } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{6} + 2m\pi, m \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

$$б) -\frac{7\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \leq -3\pi, -7 \leq 1 + 2k \leq -6,$$

$$-8 \leq 2k \leq -7, -4 \leq k \leq -3,5, k = -4,$$

$$x = \frac{\pi}{2} - 4\pi = -\frac{7\pi}{2}.$$

$$-\frac{7\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + 2m\pi \leq -3\pi, -21 \leq 1 + 12m \leq -18,$$

$$-22 \leq 12m \leq -19, -\frac{22}{12} \leq m \leq -\frac{19}{12}, \text{ целых решений нет.}$$

$$-\frac{7\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{6} + 2n\pi \leq -3\pi, -21 \leq 5 + 12n \leq -18,$$

$$-26 \leq 12n \leq -23, -\frac{26}{12} \leq n \leq -\frac{23}{12}, n = -2,$$

$$x = \frac{5\pi}{6} - 4n = -\frac{19\pi}{6}$$

1059. а) Областью определения уравнения является множество решений системы

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \neq 0, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$

Умножим обе части уравнения на $\cos x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$.

$$\sin x \cdot \cos x = -\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \sin x - \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \cos x.$$

Применяем формулу синуса разности двух чисел:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x.$$

Тогда

$$\sin x \cdot \cos x = -\left(\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x\right) \sin x - \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x\right) \cos x.$$

$$\sin x \cos x = -\frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos^2 x + \frac{3}{2} \sin x \cos x.$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0, \cos 2x = 0, x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$$

Найденные значения x принадлежат области определения.

$$\text{б) } -\frac{3\pi}{2} < \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} < 0, -6 < 1 + 2k < 0,$$

$$-7 < 2k < -1, -3,5 < k < -0,5, k = -3; -2; -1,$$

$$x = \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{2} = -\frac{5\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}.$$

$$x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}.$$

1061. а) Дробь равна нулю, когда числитель равен 0, а знаменатель не равен 0.

Так как $-9 \sin x$ находится под знаком квадратного корня, то $-9 \sin x \geq 0$. Но $\sqrt{-9 \sin x}$ находится в знаменателе, поэтому $-9 \sin x > 0$, $\sin x < 0$.

Значит, уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin x < 0, \\ 8 \cos^2 x - 6 \cos x - 5 = 0. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы: $8 \cos^2 x - 6 \cos x - 5 = 0$. Сделаем замену $\cos x = t$, где t удовлетворяет условию $-1 \leq t \leq 1$. Получим квадратное уравнение $8t^2 - 6t - 5 = 0$, корнями которого являются $t_1 = \frac{5}{4}$, $t_2 = -\frac{1}{2}$. Учитывая условие $-1 \leq t \leq 1$, получим единственное значение t , равное $t_2 = -\frac{1}{2}$. Поэтому $\cos x = -\frac{1}{2}$. Получаем систему

$$\begin{cases} \sin x < 0, \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}, \text{ откуда } x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Так как точки, соответствующие числам $x = +\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ принадлежат второй четверти, то синусы этих чисел положительны. Точки, соответствующие числам $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ принадлежат третьей четверти. Синусы этих чисел отрицательны.

$$\text{б) } -6\pi \leq -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leq -\frac{9\pi}{2}, -36 \leq -4 + 12n \leq -27,$$

$$-32 \leq 12n \leq -23, -\frac{32}{12} \leq n \leq \frac{-23}{12}, -2\frac{2}{3} \leq n \leq -1\frac{11}{12}, n = -2,$$

$$x = -\frac{2\pi}{3} - 4\pi = -\frac{14\pi}{3}.$$

1063. а) Преобразуем уравнение: $\sin x - \cos x - 8 \sin x \cos x + 1 = 0$,
 $\sin x - \cos x - 4 \sin 2x + 1 = 0$

Замена: $\sin x - \cos x = t, t^2 = 1 - \sin 2x, \sin 2x = 1 - t^2. t - 4 + 4t^2 + 1 = 0,$
 $4t^2 + t - 3 = 0,$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{4}, t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{8} = \frac{-1 \pm 7}{8}.$$

$$t_1 = -1, t_2 = \frac{3}{4}.$$

Заметим, что $\sin x - \cos x = \sqrt{2}(\sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos x) = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})$

$$1) \sin x - \cos x = -1, \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) = -1, \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2t\pi, t \in \mathbb{Z}, x = 2t\pi, t \in \mathbb{Z}.$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}.$$

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \sin x - \cos x = \frac{3}{4}.$$

$$\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{3}{4}, \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{8},$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \arcsin \frac{3\sqrt{2}}{8} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. x = \frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{3\sqrt{2}}{8} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \pi - \arcsin \frac{3\sqrt{2}}{8} + 2m\pi, m \in \mathbb{Z},$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi - \arcsin \frac{3\sqrt{2}}{8} + 2m\pi, m \in \mathbb{Z},$$

$$x = \frac{5\pi}{4} - \arcsin \frac{3\sqrt{2}}{8} + 2m\pi, m \in \mathbb{Z}.$$

$$б) \text{ Заметим, что } 0 < \arcsin \frac{3\sqrt{2}}{8} < \arcsin \frac{4\sqrt{2}}{8} = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Поэтому } x = \frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{3\sqrt{2}}{8} \in [0; \pi].$$

$$\text{Но } x = \frac{5\pi}{4} - \arcsin \frac{3\sqrt{2}}{8} \text{ не принадлежит } [0; \pi].$$

Из оставшихся решений уравнения в промежутке $[0; \pi]$ попадает число 0.

$$1065. а) \sin 2x + \cos 2x = 1$$

$$2 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x - 1 = 0$$

$$2 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x = 0$$

$$\sin x(\cos x - \sin x) = 0$$

$$1) \sin x = 0; x = \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \sin x = \cos x; \operatorname{tg} x = 1; x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

б) При помощи окружности (см. рис. 543) отберём корни на промежутке $[\frac{\pi}{6}; 2\pi]$.

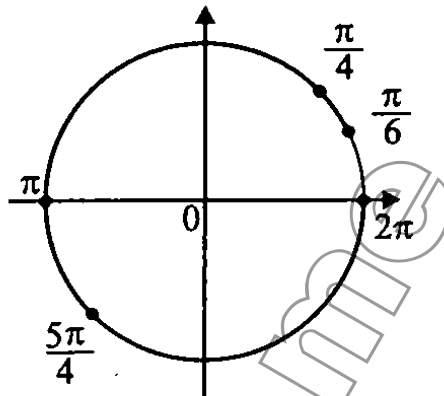


Рис. 543

Получим корни $\frac{\pi}{4}; \pi; \frac{5\pi}{4}, 2\pi$.

1067. а) Преобразуем исходное уравнение, воспользовавшись формулой синуса двойного угла, получим:

$$4 \sin^3 x + 14 \sin x \cos x - 4 \sin x = 0;$$

$$2 \sin x(2 \sin^2 x + 7 \cos x - 2) = 0; 2 \sin x(2 - 2 \cos^2 x + 7 \cos x - 2) = 0;$$

$$2 \sin x(7 \cos x - 2 \cos^2 x) = 0; 2 \sin x \cos x(7 - 2 \cos x) = 0;$$

$$\sin 2x \left(\cos x - \frac{7}{2} \right) = 0.$$

Учитывая, что $\cos x \neq \frac{7}{2}$, получим: $\sin 2x = 0, 2x = \pi n, n \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi n}{2},$

$n \in \mathbb{Z}.$

б) Выберем решения, принадлежащие указанному промежутку, для этого решим двойное неравенство $-\frac{\pi}{3} < \frac{\pi n}{2} \leq \frac{3\pi}{2}; -\frac{2}{3} < n \leq 3,$ откуда $n = 0$

и $x = 0, n = 1$ и $x = \frac{\pi}{2}, n = 2$ и $x = \pi, n = 3$ и $x = \frac{3\pi}{2}.$

$$1069. а) \sqrt{3} \sin^2 2x - 2 \sin 4x + \sqrt{3} \cos^2 2x = 0;$$

$$\sqrt{3}(\sin^2 2x + \cos^2 2x) - 2 \sin 4x = 0.$$

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством, получим

$$\sqrt{3} - 2 \sin 4x = 0; \sin 4x = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\begin{cases} 4x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z, \\ 4x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z, \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z. \end{cases}$$

б) Найдём корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-1, 1]$.

1) Рассмотрим серию решений $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$.

Очевидно, что при $k = 0$ значение $x = \frac{\pi}{12}$ принадлежит отрезку $[-1; 1]$,

так как $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{4}{12} = \frac{1}{3} < 1$.

При $k \geq 1$ значения $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} \geq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} \geq \frac{\pi}{2} > \frac{3}{2} > 1$ — не принадлежат отрезку $[-1; 1]$.

При $k \leq -1$ значения $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} \leq \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} = -\frac{5\pi}{12} < -\frac{5 \cdot 3}{12} < -1$ — не принадлежат указанному промежутку.

2) Рассмотрим серию решений $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$.

При $n = 0$ получим $x = \frac{\pi}{6}$ — принадлежит отрезку $[-1; 1]$.

При $n \geq 1$ значения $x \geq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} > 1$, при $n < -1$ значения

$x \leq \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3} < -1$, так как $\pi > 3$. Промежутку $[-1; 1]$ принадлежат лишь $x = \frac{\pi}{6}$.

•

$$1071. \text{ а) } \sin(3\pi - 2x) + 1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(\pi - x).$$

$$\sin 2x + 1 = \sin x + \cos x, \quad 2 \sin x \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x = \sin x + \cos x,$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin x + \cos x, \quad (\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x - 1) = 0,$$

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = 0, \\ \sin x + \cos x = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = 0, \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \\ x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

б) Найдём все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$.

$$1) \frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{4} + \pi n < 2\pi; \quad \frac{1}{2} \leq -\frac{1}{4} + n < 2, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \leq n < 2 + \frac{1}{4};$$

$$\frac{3}{4} \leq n < \frac{9}{4}; \quad n = 1, n = 2. \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}; \quad x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}.$$

$$2) \frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k < 2\pi, \quad \frac{1}{2} \leq -\frac{1}{4} + (-1)^k \frac{1}{4} + k < 2.$$

k — чётное: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \leq k < 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2} \leq k < 2, \quad k = 1$ (не является чётным).

k — нечётное: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \leq k < 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}, \quad 1 \leq k < 2,5, \quad k = 1, k = 2$ (не является нечётным).

$$x = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{\pi}{2}.$$

$$1073. \text{ а) } \left(\frac{3}{7}\right)^{\sin 2x} + \left(\frac{3}{7}\right)^{-\sin 2x} = 2.$$

Пусть $\left(\frac{3}{7}\right)^{\sin 2x} = t$, $t + \frac{1}{t} = 2$, $t^2 - 2t + 1 = 0$, $t = 1$.

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{\sin 2x} = 1, \sin 2x = 0, 2x = \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$б) -5\pi \leq x < -\frac{7\pi}{2}, -5\pi \leq \frac{\pi k}{2} < -\frac{7\pi}{2}, -5 \leq \frac{k}{2} < -\frac{7}{2},$$

$$-10 \leq k < -7,$$

$$k = -10, x = -5\pi;$$

$$k = -9, x = -\frac{9\pi}{2};$$

$$k = -8, x = -4\pi.$$

$$\begin{aligned} 1075. а) \cos 3x &= \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \\ &= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x = \\ &= (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \cos x (1 - \cos^2 x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x. \end{aligned}$$

Тогда исходное уравнение равносильно уравнению

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x = -2 \cos x,$$

$$\cos x (4 \cos^2 x - 1) = 0,$$

$$\cos x = 0 \text{ или } \cos^2 x = \frac{1}{4}, \text{ то есть } \cos x = \pm \frac{1}{2},$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \text{ (см. рис. 544).}$$

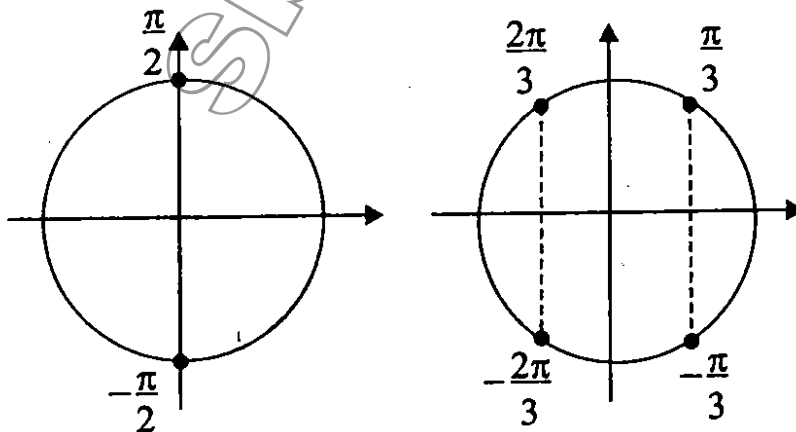


Рис. 544

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие указанному промежутку (см. рис. 545).

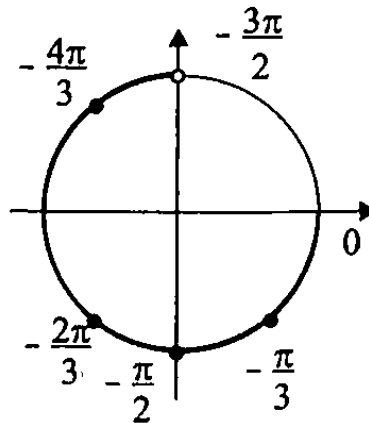


Рис. 545

Получим: $x = -\frac{4\pi}{3}$; $x = -\frac{2\pi}{3}$; $x = -\frac{\pi}{2}$; $x = -\frac{\pi}{3}$.

1077. а) На рисунке 546 изображена четвертая часть заданной пирамиды $KABCFGH$, где O — центр окружности, описанной около основания пирамиды, точка L — середина AB .

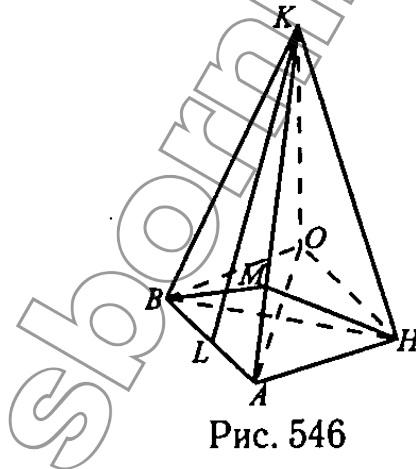


Рис. 546

KO — перпендикуляр к плоскости основания, AK — наклонная, AO — проекция AK на плоскость основания. AO проходит через середину хорды BH , поэтому $AO \perp BH$. По теореме о трёх перпендикулярах получаем, что $AK \perp BH$. Что и требовалось доказать.

б) Так как треугольники ABK и ANK равны, то основания высот этих треугольников, опущенных из точек B и H на сторону AK совпадают. На рисунке — точка M , $\angle BMH$ — угол между гранями AKB и AKH .

По теореме Пифагора $KB = \sqrt{KO^2 + OB^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} =$

$$= AK = HK. \angle BOA = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ = \angle AOH. \text{ Значит,}$$

$$\angle BOH = 90^\circ.$$

По теореме Пифагора $BH = \sqrt{BO^2 + OH^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$

Найдём угол BMH по теореме косинусов из треугольника BMH .

$$BM = \frac{2S_{ABK}}{AK} = \frac{2S_{ABK}}{\sqrt{80}}.$$

$2S_{ABK} = AB \cdot KL$. По теореме косинусов

$$AB = \sqrt{BO^2 + OA^2 - 2 \cdot BO \cdot OA \cdot \cos 45^\circ} =$$

$$= \sqrt{4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{32 - 16\sqrt{2}} =$$

$$= 4\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

$$KL = \sqrt{KB^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2} = \sqrt{80 - (2\sqrt{2 - \sqrt{2}})^2} = \sqrt{72 + 4\sqrt{2}} =$$

$$= 2\sqrt{18 + \sqrt{2}},$$

$$2S_{ABK} = AB \cdot KL = 4\sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{18 + \sqrt{2}} = 8\sqrt{34 - 16\sqrt{2}}.$$

$$BM = \frac{2S_{ABK}}{AK} = \frac{8\sqrt{34 - 16\sqrt{2}}}{4\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{34 - 16\sqrt{2}}}{\sqrt{5}}.$$

$$\cos \angle BMH = \frac{2BM^2 - BH^2}{2BM^2} = \frac{8(34 - 16\sqrt{2}) - 160}{8(34 - 16\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{14 - 16\sqrt{2}}{34 - 16\sqrt{2}} = \frac{-9 - 80\sqrt{2}}{161}.$$

1079. а) Через точку B_1 на грани BB_1C_1C проведём прямую, параллельную прямой A_1M (см. рис. 547 на с. 492).

Точку пересечения её с ребром BC обозначим через K . Тогда B_1K параллельна TC . Значит, A_1M параллельна TC . Что и требовалось доказать.

б) Через точку B в грани AA_1B_1V проведём прямую, параллельную прямой NC . Точку пересечения её с ребром A_1B_1 обозначим через P . Тогда PB параллельна NC . Затем на грани AA_1B_1V через точку A_1 про-

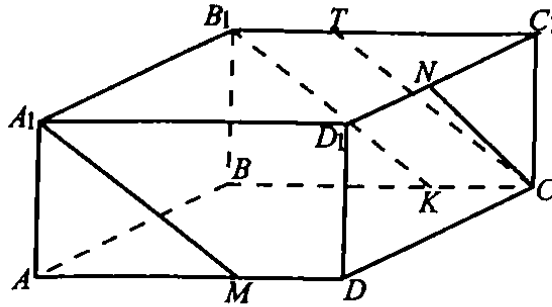


Рис. 547

ведём прямую, параллельную прямой PB . Точку пересечения её с ребром AB обозначим через L . Значит, A_1L параллельна NC (см. рис. 548).

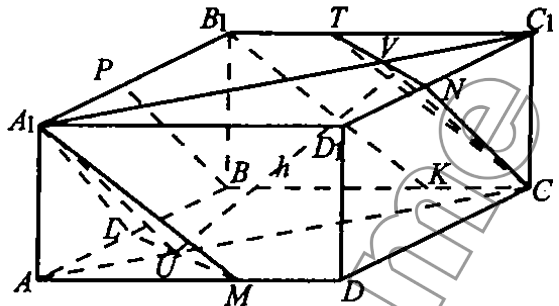


Рис. 548

Две пересекающиеся прямые плоскости TNC соответственно параллельны двум пересекающимся прямым плоскости A_1LM . Поэтому эти плоскости параллельны. Расстояние между ними и будет расстоянием между скрещивающимися прямыми A_1M и CN .

Пусть LM пересекает AC в точке U , а TN пересекает A_1C_1 в точке V . Высота h параллелограмма A_1UCV , проведённая из точки U на сторону VC будет общим перпендикуляром к плоскостям TNC и A_1LM . Её длина является расстоянием между скрещивающимися прямыми.

Действительно, по условию и построению имеем: $C_1N = B_1P = 4$; $LB = A_1P = 2$; $AL = AM = 4$. Отсюда получаем $UM \perp A_1U$; $UM \perp AU$. Тогда $UM \perp AA_1VC$, $h \perp UM$. Но $h \perp A_1U$ по построению. Значит, $h \perp A_1LM$.

Найдём теперь h , используя трапецию AA_1VC .
 $S_{UA_1VC} = S_{AA_1VC} - S_{AA_1U}$.

$$AU = AM \cdot \cos 45^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} = VC_1. \text{ По теореме Пифагора}$$

$$A_1U = \sqrt{AA_1^2 + AU^2} = \sqrt{8^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{72}.$$

$$S_{UA_1VC} = \frac{A_1V + AC}{2} \cdot AA_1 - \frac{1}{2} AU \cdot AA_1 = \frac{4\sqrt{2} + 6\sqrt{2}}{2} \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 8 =$$

$$= 32\sqrt{2}.$$

С другой стороны, $S_{UA_1VC} = A_1U \cdot h = \sqrt{72} \cdot h$. Получаем, что

$$\sqrt{72} \cdot h = 32\sqrt{2}, h = \frac{32\sqrt{2}}{\sqrt{72}} = \frac{16}{3}.$$

1081. а) Проведём медиану BK в треугольнике ABC (см. рис. 549)

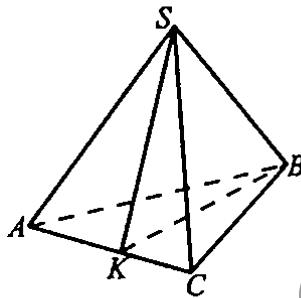


Рис. 549

Так как треугольник ABC — равнобедренный, то BK является высотой, поэтому $BK \perp AC$.

Аналогично в равнобедренном треугольнике ASC медиана SK перпендикулярна AC . Получаем, что AC перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости KSB . Поэтому AC перпендикулярна плоскости KSB . Значит, AC перпендикулярна SB . Что и требовалось доказать.

б) В соответствии с условием рассмотрим рис. 550, где O — центр основания пирамиды, K — середина AC , $NL \parallel SO$, $OT \parallel AC \parallel MP$, $LE \perp OK$, $LF \perp OT$.

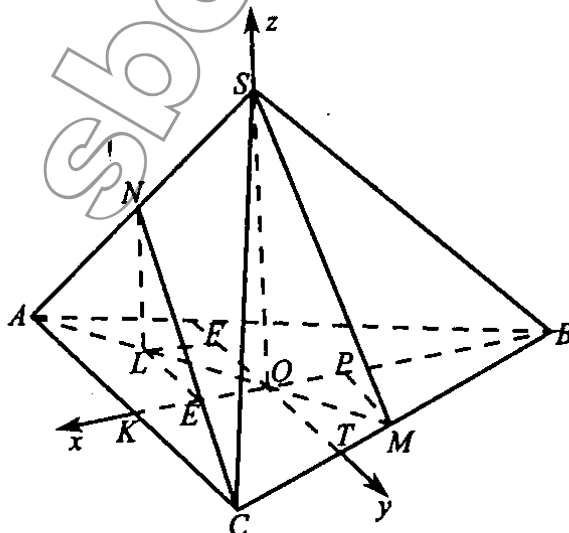


Рис. 550

Введём прямоугольную декартову систему координат: начало координат — точка O ; направление оси Ox совпадает с направлением \overrightarrow{OK} ; направление оси Oy совпадает с направлением \overrightarrow{OT} ; направление оси Oz совпадает с направлением \overrightarrow{OS} .

$$NL = \frac{1}{2}SO = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4. \text{ Это означает, что аппликата точки } N \text{ равна } 4.$$

Так как $LE = FO$, то длина отрезка FO , взятая со знаком минус будет ординатой точки N . LE является средней линией треугольника AOK , поэтому $LE = \frac{1}{2}AK = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$. Ордината точки N равна $(-3\sqrt{3})$.

$BK = AM = AB \cdot \sin 60^\circ = 12\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ = 18$. По свойству медиан треугольника $AO = OB = \frac{2}{3}AM = 12$, $OK = OM = 6$.

Так как L — середина AO и E — середина KO , $OE = 3$. Значит, абсцисса точки N равна 3 и точка N имеет координаты $(3; -3\sqrt{3}; 4)$.

Абсциссой, ординатой и аппликатой точки C являются соответственно длина отрезка KO , длина отрезка KC и число 0. Поэтому точка C имеет координаты $(6; 6\sqrt{3}; 0)$.

Следовательно, \overrightarrow{NC} имеет координаты $(3; 9\sqrt{3}; -4)$.

Абсциссой, ординатой и аппликатой точки M являются соответственно длина отрезка OP со знаком минус, длина отрезка PM и число 0.

Так как M — середина BC и $PM \parallel KC$, то $PM = \frac{1}{2}KC = 3\sqrt{3}$.

$$PB = \frac{1}{2}KB = 9.$$

$OP = OB - PB = 12 - 9 = 3$. Поэтому точка M имеет координаты $(-3; 3\sqrt{3}; 0)$. Точка S имеет координаты $(0; 0; 8)$.

Следовательно, \overrightarrow{SM} имеет координаты $(-3; 3\sqrt{3}; -8)$.

Пусть φ — искомый угол. Тогда

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{|\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{NC}|}{|\overrightarrow{SM}| \cdot |\overrightarrow{NC}|} = \frac{-9 + 81 + 32}{\sqrt{9 + 27 + 64} \cdot \sqrt{9 + 243 + 16}} = \\ &= \frac{104}{10 \cdot \sqrt{268}} = \frac{26}{5\sqrt{67}}. \end{aligned}$$

1083. а) Пусть точка O — центр треугольника ABC , точки O_1 и O_2 — центры симметрий граней AA_1B_1B и BB_1C_1C . Необходимо построить сечение призмы плоскостью OO_1O_2 (см. рис. 551 на с. 495).

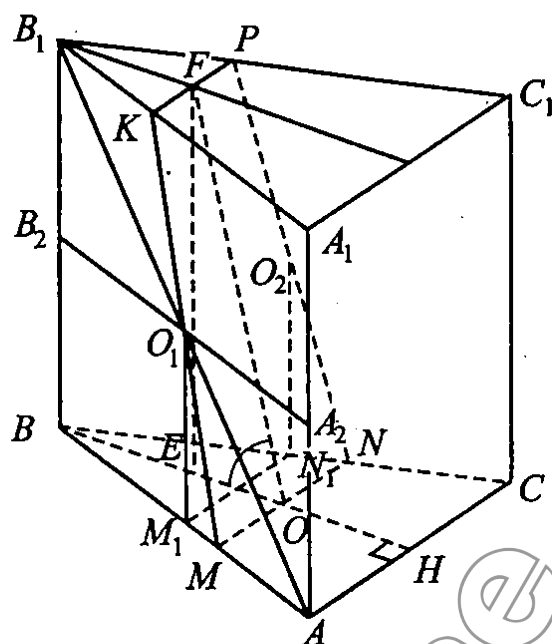


Рис. 551

Так как призма правильная, то грани AA_1B_1B и BB_1C_1C — равные прямоугольники. Поэтому расстояния от центров O_1 и O_2 до сторон AB и BC треугольника ABC равны, то есть $O_1M_1 = O_2N_1$. Значит, $O_1O_2 \parallel M_1N_1$ как противоположные стороны прямоугольника $M_1O_1O_2N_1$. Следовательно, прямая O_1O_2 параллельна плоскости ABC по признаку параллельности прямой и плоскости.

Плоскость сечения OO_1O_2 проходит через прямую O_1O_2 и пересекает плоскость ABC , следовательно, линия пересечения этих плоскостей параллельна прямой O_1O_2 . Через точку O проводим прямую MN , параллельную M_1N_1 . Прямые MO_1 и NO_2 пересекают плоскость $A_1B_1C_1$ в точках K и P соответственно. Четырёхугольник $MKPN$ — искомое сечение.

б) По свойству параллельных плоскостей $KP \parallel MN$, следовательно, четырёхугольник $MKPN$ — трапеция.

$$S_{KMNP} = \frac{KP + MN}{2} \cdot FO, \text{ где } FO \text{ — высота трапеции.}$$

Точка O является одновременно точкой пересечения медиан и высот $\triangle ABC$, поэтому $MN = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$, $BH = 3\sqrt{3}$,

$$BO = \frac{2}{3}BH = 2\sqrt{3}.$$

$\triangle B_1O_1K = \triangle AO_1M$, так как точка O_1 — середина отрезка AB_1 и $AB \parallel A_1B_1$. Из равенства треугольников следует $B_1K = AM = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2$.

Так как $\triangle KB_1F$ прямоугольный и $\angle B_1KF = 60^\circ$, то

$$B_1F = \frac{KB_1\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

$\triangle KB_1P$ — равносторонний, поэтому $KP = 2$.

Проведём $FE \perp BH$, тогда $BE = B_1F = \sqrt{3}$,
 $OE = OB - BE = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$.

По условию $\angle FOE = 30^\circ$ в прямоугольном треугольнике FEO , поэтому $OF = \frac{OE}{\cos 30^\circ}$, $OF = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{3}} = 2$.

$$S_{MKPN} = \frac{2+4}{2} \cdot 2 = 6.$$

1085. а) Пусть O и O_1 — центры оснований цилиндра, тогда F и F_1 — середины хорд BC и B_1C_1 соответственно (см. рис. 552 на с. 497). Покажем, что AFF_1 — искомая плоскость. A_1F — медиана, а значит, и высота равнобедренного треугольника A_1BC . $FF_1 \parallel BB_1$, значит, $FF_1 \perp (ABC)$ и, в частности, $FF_1 \perp BC$. Итак, $FF_1 \perp BC$ и $A_1F \perp BC$, тогда $(AFF_1) \perp BC$, откуда $(AFF_1) \perp A_1BC$ и $(AFF_1) \perp BB_1C_1C$. Сечением призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью AFF_1 является прямоугольник AFF_1A_1 .

б) Угол между плоскостями B_1BC и A_1BC — это угол A_1FF_1 :

$A_1F \in (A_1BC)$, $FF_1 \in (B_1BC)$. $\triangle A_1CB$ — равнобедренный, $A_1F \perp BC$, B_1BCC_1 — прямоугольник, $FF_1 \parallel BB_1$ и $F_1F \perp BC$, откуда $\angle A_1FF_1$ — линейный угол двугранного угла между плоскостями A_1CB и B_1BC .

Из $\triangle A_1FF_1$ $\angle A_1F_1F = 90^\circ$, $\operatorname{tg} \angle A_1FF_1 = \frac{A_1F_1}{FF_1}$; $A_1F_1 = AF$;
 $AF = AO - FO$.

Из $\triangle OFC$, где $\angle OFC = 90^\circ$, $FC = 6$, найдём
 $FO = \sqrt{OC^2 - FC^2} = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$. $AF = 8 - 2\sqrt{7}$.

$$\operatorname{tg} \angle A_1FF_1 = \frac{8 - 2\sqrt{7}}{24} = \frac{4 - \sqrt{7}}{12}.$$

$$\angle A_1FF_1 = \operatorname{arctg} \frac{4 - \sqrt{7}}{12}.$$

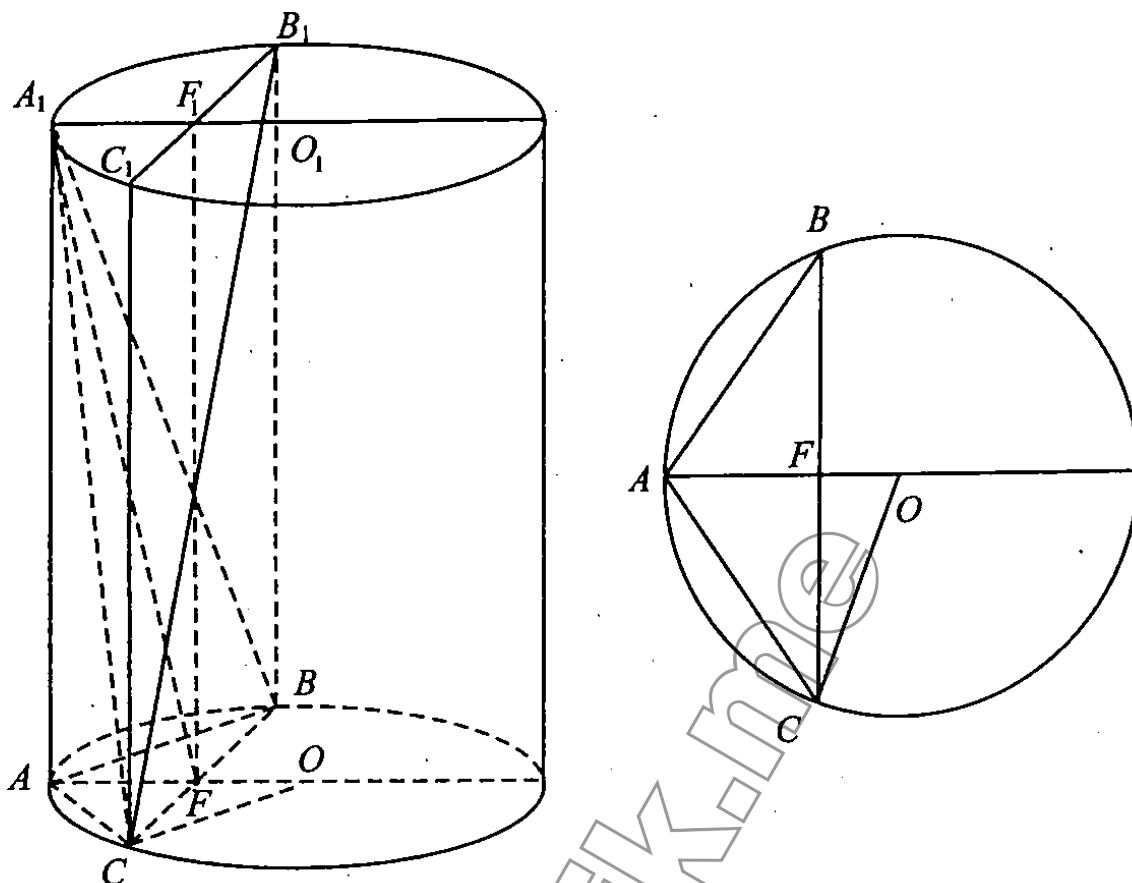


Рис. 552

1087. Сделаем чертёж (см. рис. 553 на с. 498).

а) В плоскости $A_1B_1C_1$ через точку K проведём $KL \parallel B_1D_1$. В плоскости AA_1B_1 через точку L проведём $LM \parallel C_1D$. Соединим точку M с точкой K . Треугольник MLK — искомое сечение.

б) По условию $A_1D_1 = 1$, $A_1K : KD_1 = 1 : 2$, тогда $A_1K : A_1D_1 = 1 : 3$.

$\triangle LA_1K \sim \triangle B_1A_1D_1$ по I признаку подобия ($\angle A$ — общий, $\angle A_1KL = \angle A_1D_1B_1$ как соответственные при $LK \parallel B_1D_1$ и секущей A_1D_1).

$$\text{Из подобия следует } \frac{A_1L}{A_1B_1} = \frac{LK}{B_1D_1} = \frac{A_1K}{A_1D_1} = \frac{1}{3}.$$

$$A_1B_1 = A_1D_1, \text{ значит, } A_1L = A_1K = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Аналогично } A_1K = A_1M = \frac{1}{3} \text{ (из } \triangle A_1LM \text{)}.$$

$$\text{Имеем } A_1K = A_1L = A_1M = \frac{1}{3}.$$

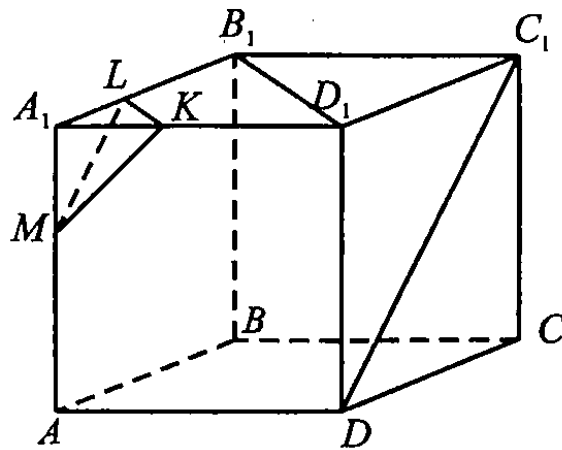


Рис. 553

Прямоугольные треугольники A_1KL , A_1KM и A_1LM равны по двум катетам, значит, $KL = KM = LM = \frac{B_1D_1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

$$S_{KLM} = \frac{KL^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{18}.$$

1089. а) В треугольнике ABC $AH \perp BC$, через точку K проводим $KM \parallel AH$, отсюда $KM \perp BC$ (см. рис. 554 на с. 499).

$C_1C \perp (ABC)$, как высота прямой призмы, тогда $C_1C \perp KM$, поскольку KM лежит в плоскости (ABC) , $KM \perp (BB_1C_1)$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости (KM перпендикулярен двум пересекающимся прямым в этой плоскости: BC и CC_1). Следовательно, по признаку перпендикулярности плоскостей получаем, что $(C_1MK) \perp (BB_1C_1)$, так как (C_1MK) содержит прямую $KM \perp (BB_1C_1)$. Значит, треугольник (KC_1M) — искомое сечение.

б) Проекцией C_1K на плоскость BB_1C_1C является C_1M , так как $MK \perp B_1BC$ (см. рис. 554 на с. 499).

$\angle KC_1M$ — искомый угол.

$$\cos \angle KC_1M = \frac{C_1M^2 + C_1K^2 - MK^2}{2C_1M \cdot C_1K}.$$

Из $\triangle C_1MC$, где $\angle C_1CM = 90^\circ$, найдём C_1M :
 $C_1M = \sqrt{C_1C^2 + MC^2} = \sqrt{6 + 1} = \sqrt{7}$.

Из $\triangle CC_1K$, где $\angle C_1CK = 90^\circ$, найдём C_1K :
 $C_1K = \sqrt{CC_1^2 + CK^2} = \sqrt{6 + 4} = \sqrt{10}$.

Из $\triangle CKM$, где $\angle KCM = 60^\circ$, $\angle KMC = 90^\circ$ найдём MK ,
 $MK = KC \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

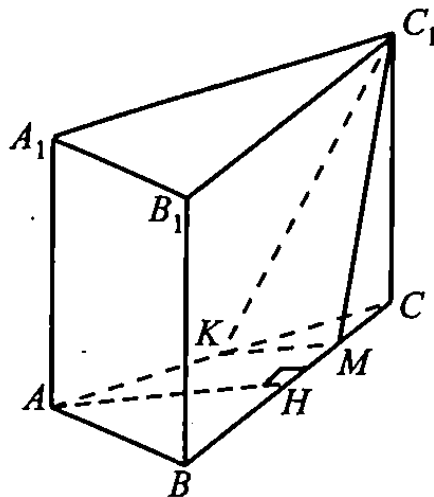


Рис. 554

$$\text{Итак, } \cos \angle KC_1M = \frac{7 + 10 - 3}{2 \cdot \sqrt{70}} = \frac{14}{2\sqrt{70}} = \frac{\sqrt{70}}{10}.$$

1091. а) Рассмотрим правильную четырёхугольную пирамиду $EABCD$ и построим сечение, проходящее через вершины B и D , перпендикулярное ребру AE . Проведём $BK \perp AE$ и докажем, что $DK \perp AE$ (см. рис. 555 а).

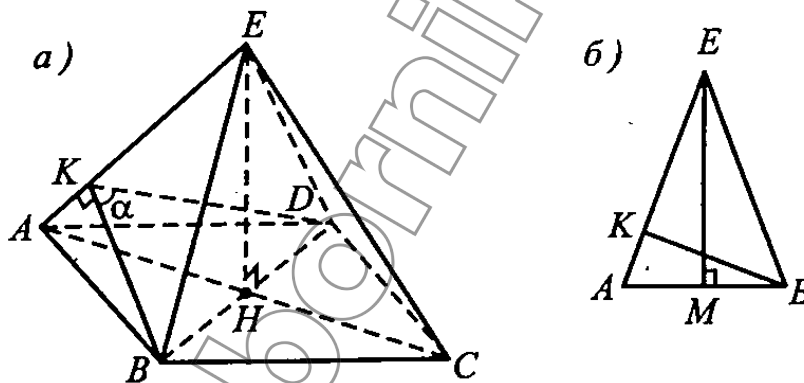


Рис. 555

В треугольниках AKB и AKD сторона AK — общая, $AB = AD$ и $\angle BAK = \angle DAK$ (в правильной четырёхугольной пирамиде боковые грани равны, а в основании лежит квадрат). Следовательно, $\triangle AKB = \triangle AKD$ по первому признаку равенства треугольников. Поэтому $\angle AKB = \angle AKD = 90^\circ$. Значит, $AE \perp DK$ и $AE \perp BKD$. Таким образом, треугольник BKD — искомое сечение.

б) Пусть EH — высота пирамиды $EABCD$ (см. рис. 555 а).

$$AC = BD = AB \cdot \sqrt{2} = 18\sqrt{2}, \quad AH = \frac{1}{2}AC = 9\sqrt{2}.$$

По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника AEN
 $AE = \sqrt{AN^2 + EN^2} = \sqrt{(9\sqrt{2})^2 + 24^2} = \sqrt{738}$.

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABE (см. рис. 555 б на с. 499). Апофему EM найдём из $\triangle MBE$, учитывая, что $MB = \frac{1}{2}AB = 9$.

$$EM = \sqrt{BE^2 - MB^2} = \sqrt{738 - 81} = \sqrt{657}.$$

Найдём высоту BK из формулы площади для $\triangle AEB$.

$$S_{AEB} = \frac{1}{2}EM \cdot AB = \frac{1}{2}EA \cdot BK.$$

$$\text{Отсюда } BK = \frac{EM \cdot AB}{EA} = \frac{\sqrt{657}}{\sqrt{738}} \cdot 18.$$

Так как $\triangle AKB = \triangle AKD$ (см. пункт а), то $DK = BK$.

По теореме косинусов для $\triangle BKD$:

$BD^2 = DK^2 + BK^2 - 2DK \cdot BK \cos \alpha$, где $\alpha = \angle BKD$ — угол между смежными боковыми гранями.

$$(18\sqrt{2})^2 = \frac{657 \cdot 18^2}{738} \cdot 2 \cdot (1 - \cos \alpha),$$

$$1 - \cos \alpha = \frac{738}{657}, \cos \alpha = 1 - \frac{738}{657} = -\frac{9}{73}.$$

Так как по определению угол

между гранями считается острым, то косинус искомого угла равен $\frac{9}{73}$.

1093. Построим осевое сечение конуса, получим равнобедренную трапецию с основаниями $AD = 2R$ и $BC = 2r$ (см. рис. 556 на с. 501). Вписанный шар в сечении даёт окружность, вписанную в трапецию, высота трапеции будет равна диаметру этой окружности.

Так как $S_{н.осн} = 4S_{в.осн}$, то $\pi R^2 = 4\pi r^2$, или $R = 2r$.

а) По свойству касательных $AB = BM + AN$, $AB = r + R = 3r$.

б) $AK = AN - KN = R - r = r$.

Тогда из $\triangle ABK$:

$$\cos \alpha = \frac{AK}{BA} = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3}, \alpha = \arccos \frac{1}{3}.$$

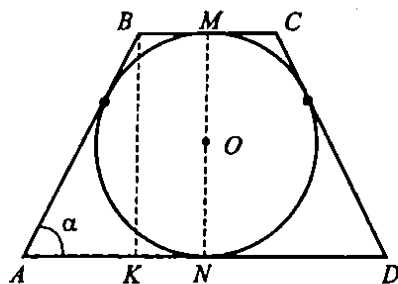


Рис. 556

1095. а) Прямая AD является линией пересечения грани ASD и плоскости основания (см. рис. 557)

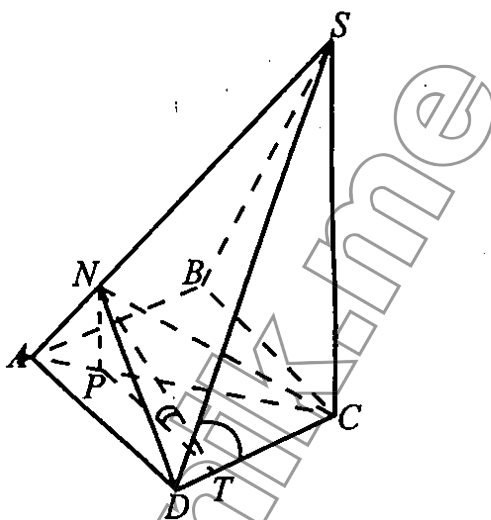


Рис. 557

$AD \perp DC$, так как $ABCD$ — квадрат. SD — наклонная, а SC — перпендикуляр к плоскости основания. Поэтому CD — проекция SD . Тогда $AD \perp DS$ по теореме о трёх перпендикулярах.

Таким образом, угол SDC — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями ASD и $ABCD$. По условию он равен 30° . Значит, плоскость ASD образует с плоскостью основания угол 30° . Что и требовалось доказать.

б) Прямая DC является линией пересечения плоскости DNC и плоскости основания, NP — перпендикуляр к плоскости основания, $PT \parallel AD$, поэтому $PT \perp DC$.

PT является проекцией наклонной NT . По теореме о трёх перпендикулярах $NT \perp DC$. Таким образом, угол NTP — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями DNC и $ABCD$.

В прямоугольном треугольнике SDC по условию гипотенуза $SD = 10$, а угол $SDC = 30^\circ$. Поэтому $SC = \frac{1}{2}SD = 5$, а $DC = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} = AD$.

$$\text{По условию } \frac{NP}{SC} = \frac{AN}{AS} = \frac{1}{4}, NP = \frac{1}{4}SC = \frac{10}{4}.$$

$$\frac{AD}{PT} = \frac{AC}{PC} = \frac{AS}{NS} = \frac{4}{3}, PT = \frac{3}{4}AD = \frac{15\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Отсюда } \operatorname{tg} \angle NTP = \frac{\frac{10}{4}}{\frac{15\sqrt{3}}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

1097. Находим область определения неравенства.

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 & (1) \\ x^2 - 5x + 6 \neq 1 & (2) \\ x - 1 > 0 & (3) \\ \log_{x^2 - 5x + 6}(x - 1) > 0 & (4) \end{cases}$$

Решаем неравенство (4) методом декомпозиции.

$$(x^2 - 5x + 6 - 1)(x - 1 - 1) > 0, (x^2 - 5x + 5)(x - 2) > 0, \\ (x - \frac{5 - \sqrt{5}}{2})(x - 2)(x - \frac{5 + \sqrt{5}}{2}) > 0.$$

Согласно методу интервалов получаем решения неравенства (4), которые заштрихованы на рис. 558

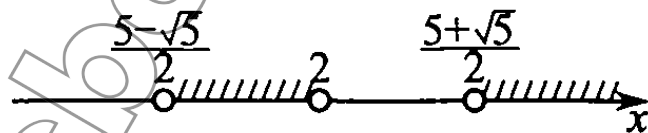


Рис. 558

Решаем остальные неравенства (1) — (3) и на рисунке 559 (см. с. 503) изобразим решения всех четырёх неравенств

Таким образом, областью определения неравенства является множество $(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}; 2) \cup (\frac{5 + \sqrt{5}}{2}; +\infty)$.

Решаем теперь исходное неравенство методом декомпозиции.

$$(x^2 - 5x + 6 - 1)(\log_{x^2 - 5x + 6}(x - 1) - 1) \leq 0, \\ (x^2 - 5x + 5)(\log_{x^2 - 5x + 6}(x - 1) - \log_{x^2 - 5x + 6}(x^2 - 5x + 6)) \leq 0,$$

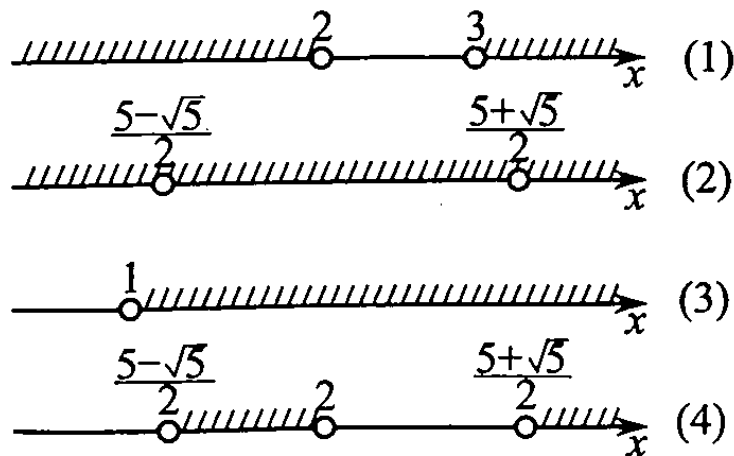


Рис. 559

$$(x^2 - 5x + 5)(\log_{x^2-5x+6} \frac{x-1}{x^2-5x+6}) \leq 0,$$

$$(x^2 - 5x + 5)(x^2 - 5x + 5)(\frac{x-1}{x^2-5x+6} - 1) \leq 0,$$

$$(x^2 - 5x + 5)^2(\frac{x-1-x^2+5x-6}{x^2-5x+6}) \leq 0, (x^2 - 5x + 5)^2(\frac{-x^2+6x-7}{x^2-5x+6}) \leq 0,$$

$$(x^2 - 5x + 5)^2(\frac{x^2 - 6x + 7}{x^2 - 5x + 6}) \geq 0.$$

Заметим, что выражения $(x^2 - 5x + 5)^2$ и $x^2 - 5x + 6$ имеют знак «+» в области определения неравенства. Поэтому последнее неравенство равносильно на области определения неравенству $x^2 - 6x + 7 \geq 0$ или неравенству $(x - (3 - \sqrt{2}))(x - (3 + \sqrt{2})) \geq 0$.

Множеством решения этого неравенства является множество $(-\infty; 3 - \sqrt{2}] \cup [3 + \sqrt{2}; +\infty)$.

Так как $\frac{5 - \sqrt{5}}{2} < 3 - \sqrt{2} < 2$ и $\frac{5 + \sqrt{5}}{2} < 3 + \sqrt{2}$, то множеством

решений исходного неравенства является множество $(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}; 3 - \sqrt{2}] \cup$

$[3 + \sqrt{2}; +\infty)$ (см. рис. 560 на с. 504).

1099. Область определения неравенства:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 > 0, \\ x^2 - 4x + 4 \neq 1 \end{cases} ; \begin{cases} (x-2)^2 > 0, \\ x^2 - 4x + 3 \neq 0 \end{cases} ; x \neq 1, x \neq 2, x \neq 3.$$

По свойствам логарифма получаем неравенство:

$$(x^2 - 4x + 4)^{2x \cdot \log_{x^2-4x+4} 5} - 30 \cdot 0, 2^{\log_{0,2}(5^x)} + 125 \leq 0,$$

$$5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125 \leq 0.$$

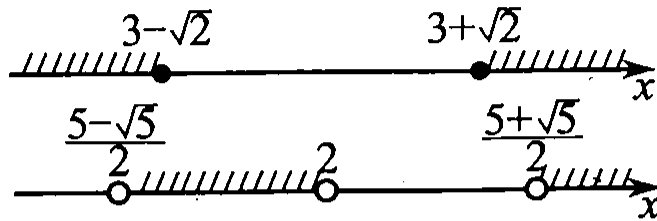


Рис. 560

Замена $5^x = t$. Получаем уравнение $t^2 - 30t + 125 \leq 0$, Корнями этого уравнения являются числа 5 и 25. Поэтому $5 \leq t \leq 125$, $5 \leq 5^x \leq 25$, $1 \leq x \leq 2$.

Учитывая область определения получаем, что решением исходного неравенства является множество $(1; 2)$.

1101. Решим исходное неравенство.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 4^{x+2} > 0, \\ 4^{x+2} \neq 1, \\ -16x > 0, \\ \log_{4^{x+2}}(-16x) \neq 0, \\ 4^x > 0, \\ \log_{\frac{1}{4}} 4^x > 0, \\ \log_4 \log_{\frac{1}{4}} 4^x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2 \neq 0, \\ x < 0, \\ -16x \neq 1, \\ \log_4 4^x < 0, \\ \log_{\frac{1}{4}} 4^x \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq -2, \\ x < 0, \\ x \neq -\frac{1}{16}, \\ x \neq -1; \end{cases} \quad x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup \left(-1; -\frac{1}{16}\right) \cup \left(-\frac{1}{16}; 0\right).$$

На ОДЗ преобразуем исходное неравенство, перейдя к основанию 4 в обоих его частях:

$$\frac{\left(\frac{\log_4 16}{\log_4 4^{x+2}}\right)}{\left(\frac{\log_4(-16x)}{\log_4 4^{x+2}}\right)} \leq \frac{1}{\log_4 \log_4 \frac{1}{4^x}}; \quad \frac{\log_4 16}{\log_4(-16x)} \leq \frac{1}{\log_4(-x)};$$

$$\frac{2}{\log_4(-x) + \log_4 16} \leq \frac{1}{\log_4(-x)}; \quad \frac{2}{\log_4(-x) + 2} \leq \frac{1}{\log_4(-x)}.$$

Сделаем замену $t = \log_4(-x)$, тогда $\frac{2}{t+2} \leq \frac{1}{t}$, $\frac{2t}{t(t+2)} \leq \frac{t+2}{t(t+2)}$,

$\frac{t-2}{t(t+2)} \leq 0$. Решим последнее неравенство методом интервалов.

(см. рис. 561), получим $t \in (-\infty; -2) \cup (0; 2]$. Вернёмся к исходной переменной. Рассмотрим 2 случая.

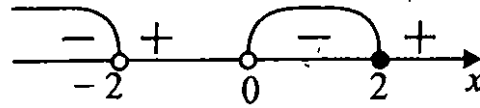


Рис. 561

$$1) \log_4(-x) < -2, \log_4(-x) < \log_4 \frac{1}{16}, x > -\frac{1}{16}.$$

$$2) 0 < \log_4(-x) \leq 2, \log_4 1 < \log_4(-x) \leq \log_4 16, -16 \leq x < -1.$$

С учётом ОДЗ запишем ответ: $x \in [-16; -2) \cup (-2; -1) \cup (-\frac{1}{16}; 0)$.

1103. ОДЗ: $x > 0$.

$$(x-1)(2\log_3^2 x - 5\log_3 x + 2) < 0.$$

$$(x-1)(\log_3 x - 2)(2\log_3 x - 1) < 0.$$

На ОДЗ выражение $\log_3 x - 2 = \log_3 x - \log_3 9$ совпадает по знаку с выражением $x - 9$, выражение $2\log_3 x - 1 = 2(\log_3 x - \log_3 \sqrt{3})$ — с выражением $x - \sqrt{3}$. Получим, что исходное неравенство на ОДЗ равносильно неравенству $(x-1)(x-9)(x-\sqrt{3}) < 0$. Решив его методом интервалов, получим $x \in (-\infty; 1) \cup (\sqrt{3}; 9)$. Учитывая ОДЗ, $x \in (0; 1) \cup (\sqrt{3}; 9)$.

Замечание. Решить исходное неравенство можно иначе, заменив его

следующей совокупностью:

$$\begin{cases} x-1 > 0, \\ 2\log_3^2 x - 5\log_3 x + 2 < 0, \\ x-1 < 0, \\ 2\log_3^2 x - 5\log_3 x + 2 > 0. \end{cases}$$

Однако такое решение получилось бы более громоздким.

$$1105. \text{ ОДЗ } \begin{cases} x-1 > 0, \\ x+1 > 0, \\ \frac{x+1}{x-1} > 0, \\ \frac{x+1}{x-1} \neq 1, \\ x-1 \neq 0; \end{cases} \quad x > 1$$

$$\log_2 \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{\log_2 \frac{x+1}{x-1}} > 0, \quad t = \log_2 \frac{x-1}{x+1},$$

$$t - \frac{1}{t} > 0,$$

$$\frac{(t-1)(t+1)}{t} > 0 \quad (\text{см. рис. 562}).$$

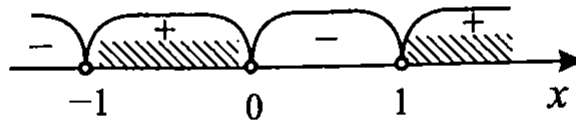


Рис. 562

$$\begin{cases} t > -1, \\ t < 0, \\ t > 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_2 \frac{x-1}{x+1} > -1, \\ \log_2 \frac{x-1}{x+1} < 0, \\ \log_2 \frac{x-1}{x+1} > 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \log_2 \frac{x-1}{x+1} > \log_2 \frac{1}{2}, \\ \log_2 \frac{x-1}{x+1} < \log_2 1, \\ \log_2 \frac{x-1}{x+1} > \log_2 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x+1} > \frac{1}{2}, \\ \frac{x-1}{x+1} < 1, \\ \frac{x-1}{x+1} > 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x-3}{x+1} > 0, \\ \frac{-2}{x+1} < 0, \\ \frac{-x-3}{x+1} > 0. \end{cases} \quad (\text{см. рис. 563}).$$

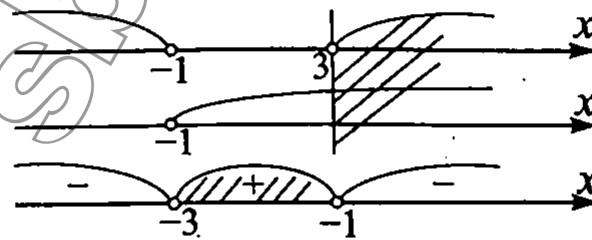


Рис. 563

С учётом ОДЗ: $x > 3$.

$$1107. ||3^x + 4x - 9| - 8| \leq 3^x - 4x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |3^x + 4x - 9| \leq 3^x - 4x + 7, \\ |3^x + 4x - 9| \geq -3^x + 4x + 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 3^x + 4x - 9 \leq 3^x - 4x + 7, \\ 3^x + 4x - 9 \geq -3^x + 4x - 7, \end{cases} \\ \begin{cases} 3^x + 4x - 9 \geq -3^x + 4x + 9, \\ 3^x + 4x - 9 \leq 3^x - 4x - 9; \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \leq 2, \\ 3^x \geq 1, \\ 3^x \geq 9, \\ x \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \leq 2, \\ x \geq 0, \\ x \geq 2, \\ x \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 2. \end{cases} \end{cases}$$

$$1109. 1) \log_{4-x} \frac{x+5}{(x-4)^2} \geq -2.$$

$$\text{ОДЗ} \begin{cases} \frac{x+5}{(x-4)^2} > 0, \\ 4-x > 0, \\ 4-x \neq 1, \end{cases} \begin{cases} x > -5, \\ x < 4, \\ x \neq 3. \end{cases}$$

ОДЗ: $x \in (-5; 3) \cup (3; 4)$ (см. рис. 564).

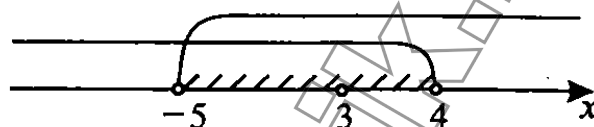


Рис. 564

$$\log_{4-x}(x+5) - \log_{4-x}(x-4)^2 \geq -2, \log_{4-x}(x+5) - 2 \geq -2, \\ \log_{4-x}(x+5) \geq 0, \log_{4-x}(x+5) \geq \log_{4-x} 1.$$

$$a) \begin{cases} 0 < 4-x < 1, \\ x+5 \leq 1; \end{cases} \begin{cases} -4 < -x < -3, \\ x \leq -4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 < x < 4, \\ x \leq -4; \end{cases} \text{решений нет.}$$

$$b) \begin{cases} 4-x > 1, \\ x+5 \geq 1; \end{cases} \begin{cases} x < 3, \\ x \geq -4; \end{cases} -4 \leq x < 3.$$

Учитывая ОДЗ, получим $[-4; 3)$.

$$2) x^3 + 7x^2 + \frac{27x^2 + 5x - 25}{x-5} \leq 5, \quad x \neq 5.$$

$$\frac{x^4 + 7x^3 - 5x^3 - 35x^2 + 27x^2 + 5x - 25 - 5x + 25}{x-5} \leq 0,$$

$$\frac{x^4 + 2x^3 - 8x^2}{x-5} \leq 0, \quad \frac{x^2(x^2 + 2x - 8)}{x-5} \leq 0.$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0, \quad x_1 + x_2 = -2, \quad x_1 \cdot x_2 = -8, \quad x_1 = -4, \quad x_2 = 2.$$

$$\frac{x^2(x+4)(x-2)}{x-5} \leq 0 \text{ (см. рис. 565).}$$

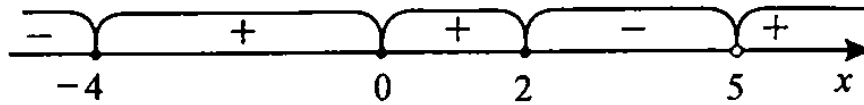


Рис. 565

$$x \leq -4, x = 0, 2 \leq x < 5.$$

3) Решение исходной системы (см. рис. 566).

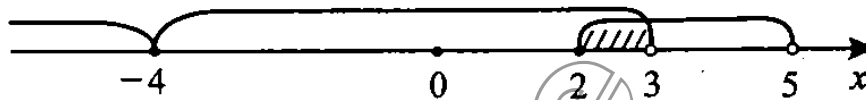


Рис. 566

$$x = -4, x = 0, x \in [2; 3).$$

1111. 1. Решим первое неравенство системы:

$$25^{x-1} - 27 \cdot 5^{x-2} + 2 \geq 0,$$

$$(5^x)^2 - 27 \cdot 5^x + 50 \geq 0.$$

Обозначим $5^x = t, t > 0$.

Неравенство примет вид:

$$t^2 - 27t + 50 \geq 0,$$

$$(t-2)(t-25) \geq 0,$$

$$t \leq 2, t \geq 25.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\begin{cases} 5^x \leq 2, \\ 5^x \geq 25; \end{cases} \begin{cases} x \leq \log_5 2, \\ x \geq 2. \end{cases}$$

2. Решим второе неравенство системы $\log_x(x-6)^2 \leq 0$.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \neq 6, \\ x > 0, \\ x \neq 1; \end{cases} x \in (0; 1) \cup (1; 6) \cup (6; +\infty).$$

$$\log_x(x-6)^2 - \log_x 1 \leq 0,$$

$$(x-1)(x^2 - 12x + 36 - 1) \leq 0,$$

$$(x-1)(x^2 - 12x + 35) \leq 0,$$

$$(x-1)(x-5)(x-7) \leq 0 \text{ (см. рис. 567).}$$

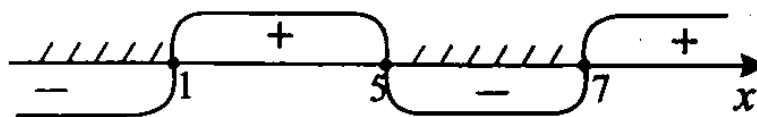


Рис. 567

$$x \leq 1, \quad 5 \leq x \leq 7.$$

Учитывая ОДЗ, получим $(0; 1) \cup [5; 6) \cup (6; 7]$.

3. Определим решение исходной системы (см. рис. 568).

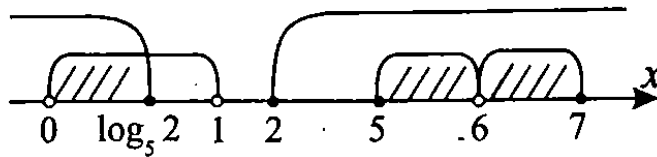


Рис. 568

$$x \in (0; \log_5 2] \cup [5; 6) \cup (6; 7].$$

1113. 1. Решим первое неравенство системы.

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{4-x^2}{2}} \geq 27^x,$$

$$3^{x^2-4} \geq 3^{3x},$$

$$x^2 - 4 \geq 3x,$$

$$x^2 - 3x - 4 \geq 0,$$

$$(x+1)(x-4) \geq 0,$$

$$x \leq -1; \quad x \geq 4.$$

2. Решим второе неравенство системы.

$$\log_{x+2}(2x^2 + x) > 2$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+2 > 0, \\ x+2 \neq 1, \\ 2x^2+x > 0; \end{cases} \begin{cases} x > -2, \\ x \neq -1, \\ \begin{cases} x < -\frac{1}{2}, \\ x > 0; \end{cases} \end{cases}$$

$$x \in (-2; -1) \cup \left(-1; -\frac{1}{2}\right) \cup (0; +\infty).$$

$$\log_{x+2}(2x^2 + x) - \log_{x+2}(x+2)^2 > 0,$$

$$(x+2-1)(2x^2+x-(x+2)^2) > 0,$$

$$(x+1)(x^2-3x-4) > 0,$$

$$(x+1)^2(x-4) > 0.$$

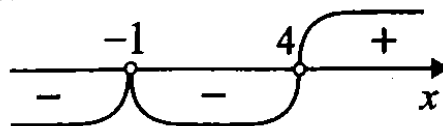


Рис. 569

$$x \in (4; +\infty).$$

Учитывая ОДЗ, имеем $x \in (4; +\infty)$ (см. рис. 569).

$$1115. 1) 5^x + \frac{20}{5^x} - 9 \geq 0.$$

$$\frac{(5^x)^2 - 9 \cdot 5^x + 20}{5^x} \geq 0. \text{ Обозначим } 5^x = t, t > 0 \text{ (см. рис. 570).}$$

$$\frac{t^2 - 9t + 20}{t} \geq 0,$$

$$\frac{(t-4)(t-5)}{t} \geq 0.$$

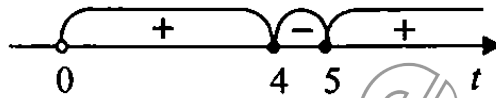


Рис. 570

$$0 < t \leq 4, t \geq 5.$$

$$0 < 5^x \leq 5^{\log_5 4}, 5^x \geq 5^1;$$

$$x \leq \log_5 4, x \geq 1.$$

$$2) \log_{x+5} \left(\frac{x+2}{5} \right) \leq \log_{x+5} 1.$$

$$a) \begin{cases} x+5 > 1, \\ 0 < \frac{x+2}{5} \leq 1; \end{cases} \begin{cases} x > -4, \\ 0 < x+2 \leq 5; \end{cases} \begin{cases} x > -4, \\ -2 < x \leq 3; \end{cases}$$

$$-2 < x \leq 3.$$

$$b) \begin{cases} 0 < x+5 < 1, \\ \frac{x+2}{5} \geq 1; \end{cases} \begin{cases} -5 < x < -4, \\ x+2 \geq 5; \end{cases} \begin{cases} -5 < x < -4, \\ x \geq 3; \end{cases}$$

нет решения.

3) Решим систему

$$\begin{cases} x \leq \log_5 4, x \geq 1, \\ -2 < x \leq 3; \end{cases} \Rightarrow -2 < x \leq \log_5 4, 1 \leq x \leq 3.$$

1117. а) По теореме косинусов

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle B.$$

Отсюда

$$\cos \angle B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{9^2 + 10^2 - 11^2}{2 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{60}{180} > 0.$$

Так как $\cos \angle B > 0$, то угол B — острый. Что и требовалось доказать.

б) Из пункта а) следует, что треугольник ABC — остроугольный, поэтому точка O лежит внутри треугольника ABC (см. рис. 571 на с. 511).

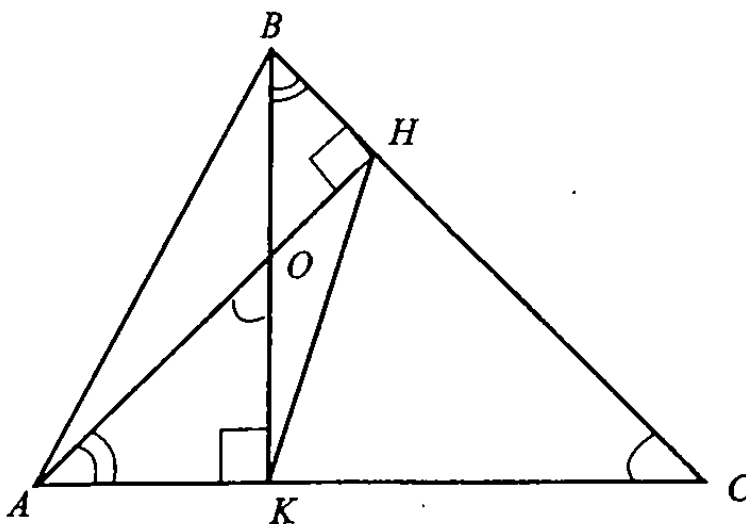


Рис. 571

Пусть $\angle AOK = \alpha$. Тогда

$$S_{KOH} = \frac{1}{2} \cdot KO \cdot OH \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} \cdot KO \cdot OH \cdot \sin \alpha.$$

Так как углы $\angle AOK$ и $\angle BON$ — вертикальные, то $\angle BON = \alpha$ и $\angle OAK = \angle OBH = 90^\circ - \alpha$. Но тогда $\angle BCK = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$ и $\sin \alpha = \frac{BK}{BC}$. Следовательно, $S_{KOH} = \frac{1}{2} \cdot KO \cdot OH \cdot \frac{BK}{BC}$.

Найдем теперь KO , OH и BK , используя площадь S треугольника ABC . Находим S по формуле Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p — полупериметр треугольника ABC , а a, b, c — его стороны. По условию $a = 9, b = 10, c = 11, p = 15$, тогда $p = 15$ и $S = \sqrt{15(15-9)(15-10)(15-11)} = \sqrt{15 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} = 30\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} AH &= \frac{2S}{10} = 6\sqrt{2}, \quad BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{9^2 - (6\sqrt{2})^2} = \\ &= \sqrt{81 - 72} = 3, \quad HC = 7. \end{aligned}$$

Треугольники OBH и HAC подобны по двум углам ($\angle BON = \angle ACH = \alpha, \angle BHO = \angle AHC = 90^\circ$). Из подобия треугольников OBH и HAC следует, что $\frac{OH}{BH} = \frac{HC}{AH}$. Отсюда

$$OH = \frac{BH \cdot HC}{AH} = \frac{3 \cdot 7}{6\sqrt{2}} = \frac{7}{2\sqrt{2}}.$$

$$BK = \frac{2S}{11} = \frac{60\sqrt{2}}{11}. AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{9^2 - \left(\frac{60\sqrt{2}}{11}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{81 \cdot 121 - 7200}{11^2}} = \sqrt{\frac{9801 - 7200}{121}} = \sqrt{\frac{2601}{121}} = \frac{51}{11}.$$

Треугольники AOK и HAC подобны по двум углам ($\angle AKO = \angle AHC = 90^\circ$, $\angle AOK = \angle ACH = \alpha$). Из подобия треугольников AOK и HAC следует, что $\frac{OK}{AK} = \frac{HC}{AH}$. Отсюда

$$OK = \frac{AK \cdot HC}{AH} = \frac{\frac{51}{11} \cdot 7}{6\sqrt{2}} = \frac{119}{22\sqrt{2}}.$$

$$\text{Значит, } S_{KOH} = \frac{1}{2} \cdot KO \cdot OH \cdot \frac{BK}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{119}{22\sqrt{2}} \cdot \frac{7}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{60\sqrt{2}}{10}.$$

$$S_{KOH} = \frac{119 \cdot 7 \cdot 60\sqrt{2}}{2 \cdot 22\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 11 \cdot 10} = \frac{2499\sqrt{2}}{968}.$$

1119. а) Обозначим через C_1 и C_2 центры окружностей O_1 и O_2 , а через L обозначим точку пересечения касательной, проходящей через точку K и касательной l , не проходящей через точку K (см. рис. 572 на с. 513). Пусть расстояние от некоторой точки C_3 до окружностей O_1 и O_2 и до их общей касательной, не проходящей через точку K равно r . Тогда ввиду симметрии точка C_3 лежит на общей касательной, проходящей через точку K . Точку пересечения C_3K и l обозначим через L .

Пусть M — такая точка на окружности O_1 , что O_1M — наименьшее из всех расстояний от точки C_3 до точек окружности O_1 . Тогда $C_3M = r$ и C_3M перпендикулярна касательной к окружности O_1 , проходящей через точку M . Заметим, что C_1M также перпендикулярна этой касательной, поэтому M лежит на отрезке C_1C_3 . Соответствующую точку на окружности O_2 обозначим через N .

В равнобедренном треугольнике $C_1C_2C_3$ высотой и медианой является C_3K , $C_1C_3 = C_2C_3 = 10 + r$, $C_1C_2 = 20$.

По теореме Пифагора для треугольника C_1C_3K получаем, что $C_3K = \sqrt{(10 + r)^2 - 10^2}$. Так как $KL = 10$, то

$$\sqrt{(10 + r)^2 - 10^2} + r = 10 \quad (1)$$

$$\text{Отсюда } (10 - r)^2 = (10 + r)^2 - 10^2, -20r = 20r - 100, r = 2,5.$$

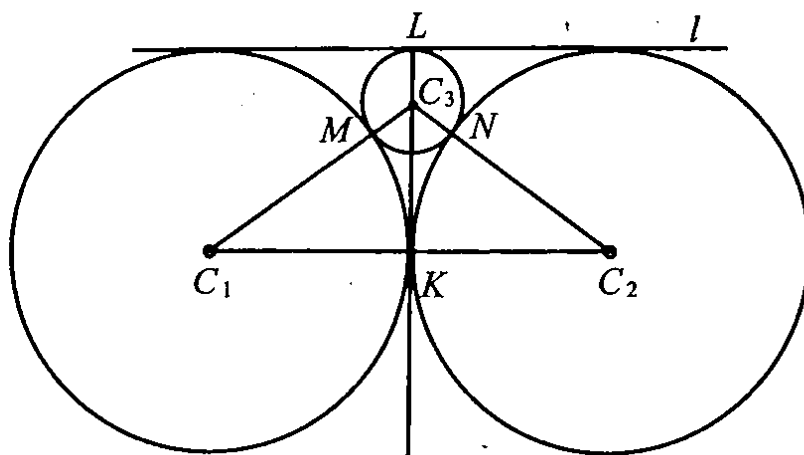


Рис. 572

Из единственности решения уравнения (1) следует справедливость утверждения а).

б) Треугольники $C_1C_3C_2$ и MC_3N подобны ($\angle C_3$ — общий, $C_1C_3 : MC_3 = C_2C_3 : NC_3$). Так как $r = 2,5$, а $C_1M = 10$, то коэффициент подобия k равен $\frac{C_1C_3}{C_3M} = \frac{12,5}{2,5} = 5$. Значит, $S_{MC_3N} = \frac{1}{25} S_{C_1C_3C_2}$.

Следовательно, $S_{C_1MNC_2} = \frac{24}{25} S_{C_1C_3C_2}$.

Но $S_{C_1C_3C_2} = C_1K \cdot KC_3 = 10 \cdot (10 - 2,5) = 75$. Тогда $S_{C_1MNC_2} = \frac{24}{25} \cdot 75 = 72$.

1121. а) Рассмотрим рисунок 573, на котором O — центр окружности, AH — высота, опущенная на сторону BC и $OE \perp AN$.

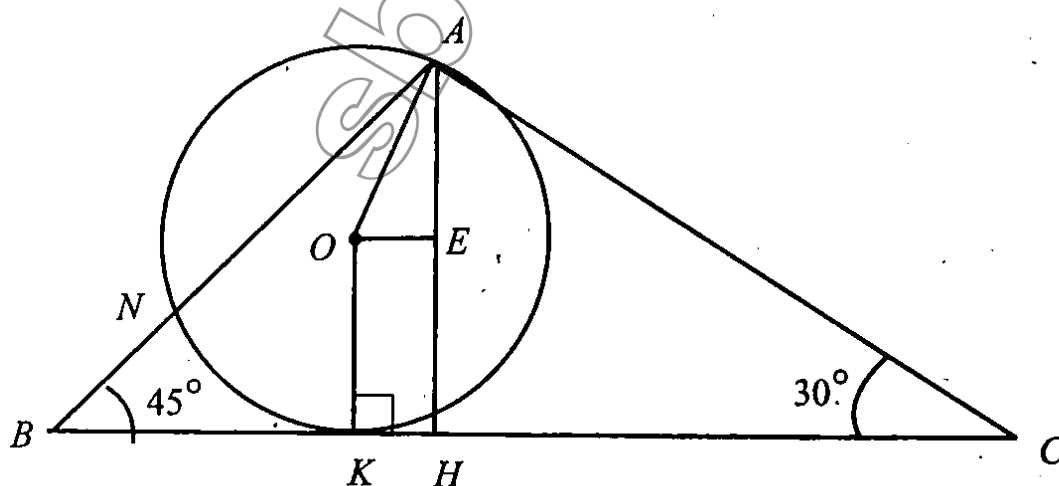


Рис. 573

Тот факт, что на рисунке $BH > BK$, будет установлен ниже при рассмотрении пункта б).

По свойству касательной и секущей, проведённых из одной точки, лежащей вне окружности получаем, что $BK^2 = BA \cdot BN$. Согласно условию $BN = \frac{4}{9}AB$ и $BK^2 = BA \cdot \frac{4}{9}AB = \frac{4}{9}AB^2$. Отсюда $\frac{BK^2}{AB^2} = \frac{4}{9}$, $\frac{BK}{AB} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$. Что и требовалось доказать.

б) По теореме синусов $\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{BC}{\sin 105^\circ} = \frac{BC}{\sin 75^\circ}$. Поэтому

$$AB = \frac{BC \cdot \sin 30^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{12 \cdot \frac{1}{2}}{\sin 75^\circ} = \frac{6}{\sin 75^\circ}.$$

Согласно пункту а) $BK = \frac{2}{3}AB$.

Так как AH — перпендикуляр к стороне BC , то $AH = AB \sin 45^\circ = \frac{AB}{\sqrt{2}}$ и $BH = AH$, $BH = \frac{AB}{\sqrt{2}}$, $BK = \frac{2}{3}AB = \frac{AB}{\frac{3}{2}}$.

Так как $\frac{3}{2} > \sqrt{2}$, то $BH > BK$.

$$\text{Отсюда } KH = BH - BK = \frac{AB}{\sqrt{2}} - \frac{2AB}{3} = \frac{AB(3 - 2\sqrt{2})}{3\sqrt{2}}.$$

По свойству прямоугольника $OE = HK$ и $HE = OK = R = OA$.

По теореме Пифагора $AE^2 + OE^2 = AO^2 = R^2$.
 $AE = AH - R = AB \sin 45^\circ - R = \frac{AB}{\sqrt{2}} - R$. Тогда

$$\left(\frac{AB}{\sqrt{2}} - R\right)^2 + \left(\frac{AB(3 - 2\sqrt{2})}{3\sqrt{2}}\right)^2 = R^2. \text{ Отсюда}$$

$$\frac{AB^2}{2} - \frac{2R \cdot AB}{\sqrt{2}} + \frac{AB^2(3 - 2\sqrt{2})^2}{(3\sqrt{2})^2} = 0,$$

$$\frac{AB}{2} - \frac{2R}{\sqrt{2}} + \frac{AB(3 - 2\sqrt{2})^2}{(3\sqrt{2})^2} = 0,$$

$$R = \frac{AB \left(\frac{1}{2} + \frac{(3 - 2\sqrt{2})^2}{18} \right)}{\frac{2}{\sqrt{2}}} = \frac{AB(26 - 12\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}}{36}.$$

$$R = \frac{AB(13 - 6\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}}{18} = \frac{6\sqrt{2}(13 - 6\sqrt{2})}{18 \sin 75^\circ} = \frac{\sqrt{2}(13 - 6\sqrt{2})}{3 \sin 75^\circ}.$$

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}.$$

$$R = \frac{4(13 - 6\sqrt{2})}{3(\sqrt{3} + 1)} = \frac{2(13 - 6\sqrt{2})(\sqrt{3} - 1)}{3}.$$

Заметим, что $\sin 75^\circ$ можно было бы найти пользуясь следствием из формулы косинуса двойного угла: $\sin 75^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 150^\circ}{2}}$.

1123. а) Рассмотрим рисунок 574.

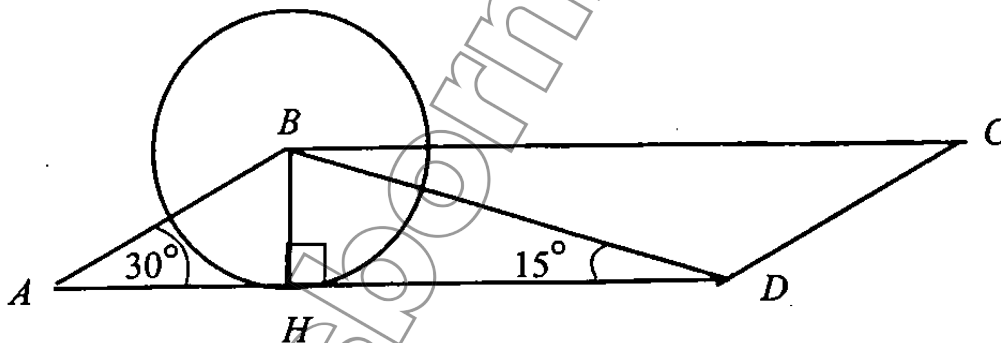


Рис. 574

По условию угол A равен 30° . Тогда по свойству параллелограмма угол B равен $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$. значит, центральный угол окружности расположенный вне параллелограмма составляет 210° . Пусть $S_{\text{вне}}$ — площадь той части круга, которая расположена вне параллелограмма.

Составим пропорцию из соотношения:

$$\begin{aligned} 360^\circ &\leftrightarrow S_{\text{круга}} \\ 210^\circ &\leftrightarrow S_{\text{вне}} \end{aligned}$$

Отсюда $\frac{S_{\text{вне}}}{S_{\text{круга}}} = \frac{210^\circ}{360^\circ} = \frac{7}{12}$. Что и требовалось доказать.

б) Найдём радиус круга BH . В треугольнике ABD угол ABD равен $180^\circ - (30^\circ + 15^\circ) = 135^\circ$. По теореме синусов для треугольника ABD получаем:

$$\frac{AD}{\sin 135^\circ} = \frac{BD}{\sin 30^\circ}. \text{ Отсюда } BD = \frac{AD \sin 30^\circ}{\sin 135^\circ} = \frac{AD \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{AD}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Тогда } BH = BD \cdot \sin 15^\circ = \frac{AD \sin 15^\circ}{\sqrt{2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Но } \sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4}. \end{aligned}$$

Заметим, что $\sin 15^\circ$ можно было бы найти, пользуясь следствием из формулы косинуса двойного угла: $\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}}$.

Поэтому

$$BH = \frac{\frac{12}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4}}{\sqrt{2}} = \frac{12(\sqrt{3} - 1)}{4\sqrt{\pi}} = \frac{3(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{\pi}}.$$

$$\text{Отсюда } S_{\text{круга}} = \pi BH^2 = \pi \cdot \left(\frac{3(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{\pi}} \right)^2 = 18 \cdot (2 - \sqrt{3}).$$

Согласно пункту а) часть круга, расположенного внутри параллелограмм равна $\frac{5}{12} S_{\text{круга}} = \frac{5}{12} \cdot 18 \cdot (2 - \sqrt{3}) = \frac{15 \cdot (2 - \sqrt{3})}{2}$.

1125. а) Выполним схематический рисунок 575 (см. с. 517).

По условию AA_1, BB_1, CC_1 — медианы, K — точка пересечения медиан, значит, $\frac{BK}{B_1K} = \frac{2}{1}$.

Пусть $B_1K = x$, тогда $BK = 2x, BB_1 = 3x, AC = 6x$.

Имеем $B_1A = B_1B = B_1C = 3x$.

Следовательно, около треугольника ABC можно описать окружность радиусом $3x$ с центром в точке B_1 .

$\angle ABC$ — вписанный, опирающийся на диаметр, $\angle ABC = 90^\circ$, отсюда $\triangle ABC$ — прямоугольный, что и требовалось доказать.

б) 1. Радиус окружности (см. рис. 576 на с. 517), вписанной в прямоуголь-

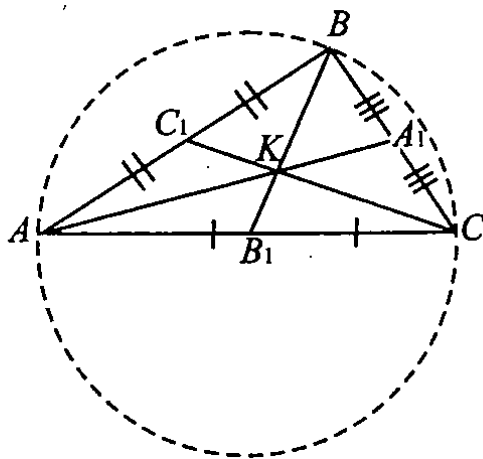


Рис. 575

ный треугольник ABC , найдём по формуле $r = \frac{a+b-c}{2}$, где a и b — катеты, c — гипотенуза.

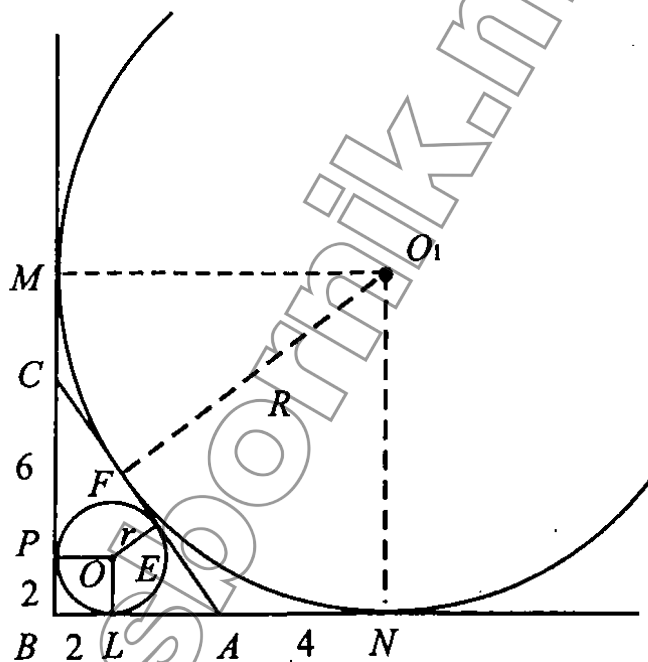


Рис. 576

$$r = \frac{AB + BC - AC}{2}, \quad BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$$

$$r = \frac{6 + 8 - 10}{2} = 2.$$

2. Пусть окружность с центром в точке O касается сторон треугольника ABC в точках P, L, E . Тогда $OP \perp BC$, $OL \perp AB$, $OE \perp AC$ (как ра-

диусы, проведённые в точки касания), следовательно, $BPOL$ — квадрат, $BP = BL = r = 2$. Аналогично для окружности с центром в точке O_1 (окружности, касающейся стороны AC и продолжений сторон BC и BA): BMO_1N — квадрат, $BM = BN = R$, где R — радиус этой окружности. Пусть $CF = t$, тогда $AF = 10 - t$.

3. $CF = CM = t$, $AN = AF = 10 - t$, $CE = CP = 6$ (как отрезки касательных, проведённых из точек C и A соответственно).

Имеем: $BM = BC + CM = 8 + t$,

$BN = AB + AN = 6 + 10 - t = 16 - t$.

Из равенства $BM = BN$ следует: $8 + t = 16 - t$, $2t = 8$, $t = 4$, $CF = 4$.

4. $EF = CE - CF = 6 - 4 = 2$.

1127. а) Рассмотрим исходную окружность и четырёхугольник $AMLB$ (см. рис. 577).

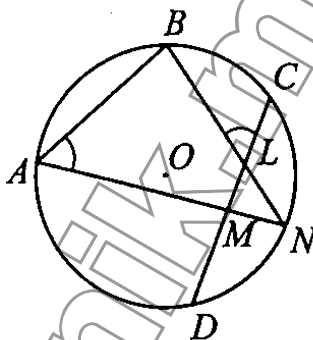


Рис. 577

По свойству вписанного угла $\angle BAN = \frac{1}{2} \sphericalangle BN = \frac{1}{2} (\sphericalangle BC + \sphericalangle CN)$.

По свойству угла между пересекающимися хордами

$$\angle BLC = \frac{1}{2} (\sphericalangle BC + \sphericalangle DN).$$

По условию $\sphericalangle DN = \sphericalangle CN$, поэтому $\angle BAN = \angle BLC$.

$\angle BLC + \angle BLM = 180^\circ$ (смежные углы), тогда $\angle BLM + \angle BAM = 180^\circ$, а это по признаку вписанного четырёхугольника означает, что $AMLB$ вписан (сумма противоположных углов равна 180°).

б) Заметим, что $\sphericalangle NA = \sphericalangle NB$

(так как $\sphericalangle NA = \sphericalangle ND + \sphericalangle DA = \sphericalangle NC + \sphericalangle CB$).

При этом $\sphericalangle NA + \sphericalangle NB = 360^\circ - \sphericalangle AB = 240^\circ$, откуда

$\sphericalangle NA = \sphericalangle NB = \sphericalangle AB = 120^\circ$, $\angle NBA = \angle NAB = \angle ANB = 60^\circ$ (см. рис. 578 на с. 519) как вписанные углы, опирающиеся на дуги в 120 градусов.

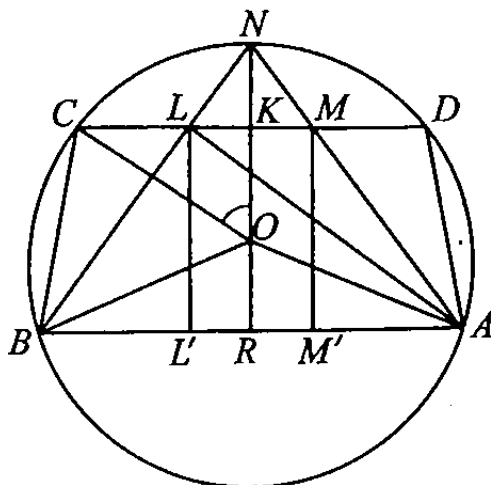


Рис. 578

Из $\triangle OAB$ по теореме косинусов
 $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos 120^\circ = 3OA^2$, $AB = \sqrt{3}OA = 12$.

Заметим также, что $\angle NMC = \frac{1}{2}(\sphericalangle CN + \sphericalangle AD) =$
 $= \frac{1}{2}(\sphericalangle CN + \sphericalangle BC) = \angle NAB$.

Но тогда $LM \parallel AB$, так как равны соответственные углы при пересечении LM и AB секущей NA . Значит, $AMLB$ — трапеция, а так как углы при основании равны ($\angle LBA = \angle MAB$), $AMLB$ — равнобедренная трапеция. Проведём её высоту KR через точку O . Из $\triangle OBR$ получим $OR = \sqrt{OB^2 - BR^2} = 2\sqrt{3}$,
 $OK = CO \cdot \cos \angle CON = \sqrt{3}$ и $KR = OR + OK = 3\sqrt{3}$.
 Опустим высоты $LL' = KR$, тогда $BL' = LL' \operatorname{ctg} 60^\circ = 3$.
 Если провести высоту MM' , то $M'A = 3$ и
 $LM = L'M' = AB - 2BL' = 6$,
 $AL = \sqrt{(AL')^2 + (LL')^2} = 6\sqrt{3}$.

Окружность радиусом R , описанная около $AMLB$, описана и около $\triangle ALB$. По теореме синусов $2R = \frac{AL}{\sin \angle ABL} = \frac{6\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 12$, $R = 6$.

1129. а) $\frac{S_{ABO}}{S_{AOD}} = \frac{BO}{OD}$ (треугольники ABO и AOD с общей высотой, проведённой из вершины A (см. рис. 579 на с. 520). $\triangle BOC \sim \triangle AOD$

по двум углам, откуда следует соотношение: $\frac{BC}{AD} = \frac{BO}{OD}$, а значит, и

$$\frac{S_{ABO}}{S_{AOD}} = \frac{BC}{AD}.$$

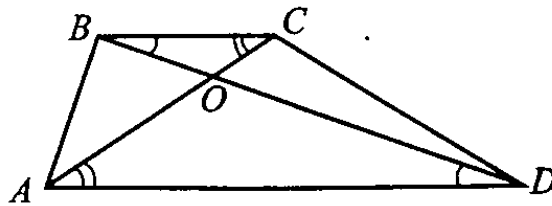


Рис. 579

$$6) \frac{S_{ABO}}{S_{AOD}} = \frac{1}{4}.$$

$$\frac{2}{S_{AOD}} = \frac{1}{4}. \quad S_{AOD} = 8.$$

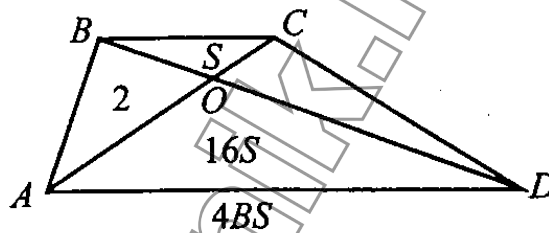


Рис. 580

$\triangle BOC \sim \triangle AOD$, $BC : AD = 1 : 4$ (см. рис. 580).

Тогда $S_{BOC} = \frac{1}{16} S_{AOD} = \frac{1}{2}$. Из соотношения $\frac{S_{BOC}}{S_{COD}} = \frac{BO}{OD} = \frac{1}{4}$, $S_{COD} = 4S_{BOC} = 2$. Итак, $S_{ABCD} = S_{COD} + S_{BOC} + S_{ABO} + S_{AOD} = 2 + \frac{1}{2} + 2 + 8 = 12,5$.

1131. а) В трапеции $ABCD$ треугольники AOD и BOC подобны, поскольку $\angle OAD = \angle OCB$ и $\angle ODA = \angle OBC$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущих AC и BD соответственно (см. рис. 581).

Значит, $\frac{AO}{CO} = \frac{DO}{BO}$. Умножая почленно это равенство на равенство $AO \cdot CO = BO \cdot DO$ из условия задачи, получим $AO^2 = DO^2$. Отсюда $AO = DO$, $BO = CO$ и треугольники AOB и DOC равны по 1-му при-

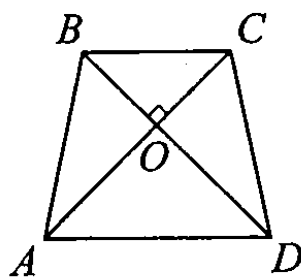


Рис. 581

знаку равенства треугольников ($\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные). Следовательно, $AB = CD$.

б) Т. к. трапеция $ABCD$ равнобедренная, то вокруг неё можно описать окружность. Обозначим её радиус через R .

Треугольники AOD и BOC равнобедренные и прямоугольные. Значит, $\angle OAD = 45^\circ$ и $CO = \frac{BC}{\sqrt{2}}$, $DO = \frac{AD}{\sqrt{2}}$. По теореме синусов для треугольника ACD имеем:

$$\frac{CD}{\sin \angle CAD} = 2R, \quad CD = R\sqrt{2}, \quad R = \frac{CD}{\sqrt{2}}$$

По теореме Пифагора для треугольника COD :

$$CD^2 = CO^2 + DO^2 = \frac{1}{2}(AD^2 + BC^2) = 50.$$

Отсюда $CD = 5\sqrt{2}$ и $R = 5$.

1133. а) Рассмотрим рисунок 582, на котором O — центр окружности, а T и L — точки касания окружности с основаниями трапеции, BH — высота трапеции.

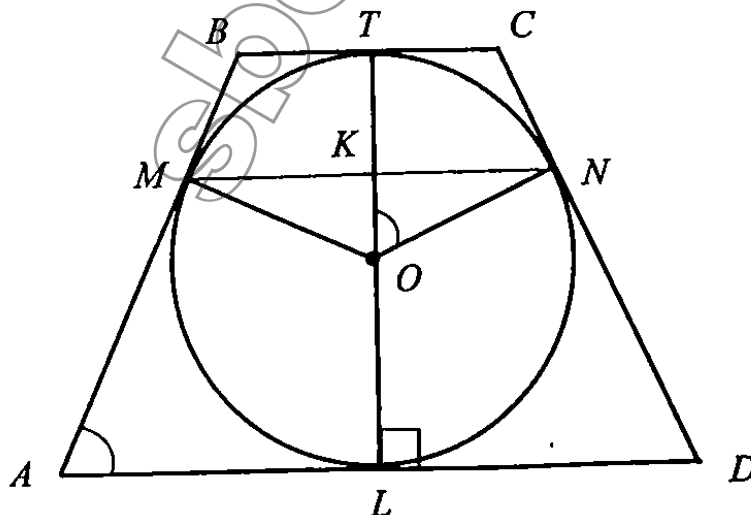


Рис. 582

Пусть $AD = 2a$, $BC = 2b$ ($a > b$). По свойству описанной трапеции точки T, O , и L лежат на одной прямой, TL является высотой трапеции и $TL = 6$. Из формулы площади трапеции получаем, что $S_{ABCD} = \frac{(2a+2b) \cdot h}{2}$, h — высота трапеции. Поэтому $39 = \frac{(2a+2b) \cdot 6}{2} = 3 \cdot (2a+2b)$. Отсюда $a+b = \frac{13}{2}$. По свойству описанной трапеции $AB = a+b = \frac{13}{2}$.

Отсюда следует, что $\sin \angle BAN = \frac{BH}{BA} = \frac{6}{\frac{13}{2}} = \frac{12}{13}$. Что и требовалось доказать.

б) Пусть угол BAD равен α . Тогда угол ADC также равен α . Так как $MN \parallel AD$, то угол KNC равен α . Но угол ONC равен 90° , поэтому угол KNO равен $90^\circ - \alpha$, а угол NOK равен α . Так как $ON = 3$, то $KN = 3 \sin \alpha = 3 \cdot \frac{12}{13} = \frac{36}{13}$, а $MN = 2KN = \frac{72}{13}$. Отметим также,

что $OK = 3 \cos \alpha = 3 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 3 \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = 3 \cdot \frac{5}{13} = \frac{15}{13}$.

Найдём теперь $AD = 2a$. Заметим, что в прямоугольном треугольнике AHV гипотенуза AB равна $\frac{13}{2}$, $AH = a - b$ и $BH = 6$. По теореме Пифагора

$$AH^2 = AB^2 - BH^2, (a-b)^2 = \left(\frac{13}{2}\right)^2 - 6^2 = \frac{169}{4} - 36 = \frac{25}{4},$$

$$a - b = \frac{5}{2}. \text{ Получаем систему } \begin{cases} a + b = \frac{13}{2} \\ a - b = \frac{5}{2} \end{cases}. \text{ Отсюда } a = \frac{9}{2},$$

$$b = 2. \text{ Значит, } AD = 2a = 9. \text{ Отсюда } S_{AMND} = \frac{\left(9 + \frac{72}{13}\right) \cdot h}{2}.$$

$$h = OL + OK = 3 + \frac{15}{13} = \frac{54}{13}.$$

$$S_{AMND} = \frac{\left(9 + \frac{72}{13}\right) \cdot \frac{54}{13}}{2} = \frac{189 \cdot 27}{169} = \frac{5103}{169}$$

1135. а) Рассмотрим рисунок 583.

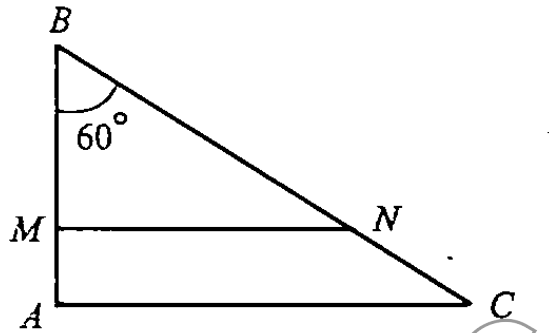


Рис. 583

По свойству параллельных прямых $\angle CAB = \angle NMB$ и $\angle ACB = \angle NMB$, поэтому треугольники ABC и MNB подобны. Тогда $AC = k \cdot MN$, $BC = k \cdot NB$ и $AB = k \cdot MB$ при некотором действительном k и $S_{ABC} = k^2 S_{MNB}$. Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{R_{ABC}}{r_{ABC}} &= \frac{\frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}}}{\frac{2S_{ABC}}{AB + BC + AC}} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC \cdot (AB + BC + AC)}{8(S_{ABC})^2} = \\ &= \frac{k^4 \cdot MB \cdot BN \cdot MN \cdot (MB + BN + MN)}{8k^4 \cdot (S_{MNB})^2} = \\ &= \frac{MB \cdot BN \cdot MN \cdot (MB + BN + MN)}{8(S_{MNB})^2} = \frac{R_{MNB}}{r_{MNB}}. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

б) В соответствии с пунктом а) будем находить углы в таком треугольнике $A_1B_1C_1$, подобном треугольнику ABC , в котором $\angle B_1 = 60^\circ$, $\angle C_1 = \beta$, $A_1C_1 = 1$, $A_1B_1 = a$ и $B_1C_1 = b$.

По теореме косинусов

$$1 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 60^\circ = a^2 + b^2 - ab, \quad a^2 + b^2 - ab = 1.$$

По теореме синусов $\frac{1}{\sin 60^\circ} = 2R_{A_1B_1C_1}$. Пусть радиус окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$ равен R , радиус окружности, вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$ равен r и площадь треугольника $A_1B_1C_1$ равна

С. Тогда $\frac{2}{\sqrt{3}} = 2R$, $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Отсюда $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\sin \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$$\frac{b}{\sin \beta} = 2R = \frac{2}{\sqrt{3}}, \sin \beta = \frac{b\sqrt{3}}{2}.$$

$$\frac{R}{r} = \frac{\frac{ab}{4S}}{\frac{S}{p}} = \frac{abp}{4S^2} = \frac{ab(a+b+1)}{8S^2}.$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot a \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot a \frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{ab\sqrt{3}}{4}, S^2 = \frac{3a^2b^2}{16}.$$

$$\frac{R}{r} = \frac{ab(a+b+1)}{8 \cdot \frac{3a^2b^2}{16}} = \frac{2(a+b+1)}{3ab} = \sqrt{3} + 1.$$

Получаем систему $\begin{cases} a^2 + b^2 - ab = 1, \\ \frac{2(a+b+1)}{3ab} = \sqrt{3} + 1. \end{cases}$

Замена: $a + b = x$; $ab = y$. Система принимает вид

$$\begin{cases} x^2 - 3y = 1, \\ 2x + 2 = 3(\sqrt{3} + 1)y \end{cases}; \begin{cases} x^2 - 3y = 1, \\ x = \frac{3(\sqrt{3} + 1)y - 2}{2}. \end{cases} \text{ Отсюда}$$

$$\left(\frac{3(\sqrt{3} + 1)y - 2}{2}\right)^2 - 3y - 1 = 0,$$

$$\frac{(36 + 18\sqrt{3})y^2 - 12(\sqrt{3} + 1)y + 4}{4} - 3y - 1 = 0.$$

$$(36 + 18\sqrt{3})y = 12(\sqrt{3} + 2), y = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}, ab = \frac{2}{3}.$$

Значит, $(a+b)^2 - 3 \cdot \frac{2}{3} = 1$, $(a+b)^2 = 3$, $a+b = \sqrt{3}$.

Решая систему $\begin{cases} a+b = \sqrt{3}, \\ ab = \frac{2}{3} \end{cases}$, получаем два значения b : $\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Если $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$, то $\sin \beta = b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$. $\beta = 30^\circ$, $\alpha = 90^\circ$.

Если же $b = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, то $\sin \beta = b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$. $\beta = 90^\circ$, $\alpha = 30^\circ$.

1137. 1. Через год сумма долга увеличится на $r\%$ и станет равной $687\,500\left(1 + \frac{r}{100}\right)$ рублей. После выплаты 390 000 рублей долг станет равным $687\,500\left(1 + \frac{r}{100}\right) - 390\,000$ рублей.

2. После увеличения этой суммы в конце года на $r\%$ долг станет равным $(687\,500\left(1 + \frac{r}{100}\right) - 390\,000)\left(1 + \frac{r}{100}\right)$ рублей. А после выплаты ещё 338 000 рублей он станет равным нулю. Получаем уравнение: $(687\,500\left(1 + \frac{r}{100}\right) - 390\,000)\left(1 + \frac{r}{100}\right) - 338\,000 = 0$.

3. Пусть $\left(1 + \frac{r}{100}\right) = x$. Тогда уравнение принимает вид: $(687\,500x - 390\,000)x - 338\,000 = 0$;
 $687\,500x^2 - 390\,000x - 338\,000 = 0$; $6875x^2 - 3900x - 3380 = 0$;
 $1375x^2 - 780x - 676 = 0$.

По формуле корней квадратного уравнения получаем:

$$x_{1,2} = \frac{390 \pm \sqrt{390^2 + 1375 \cdot 676}}{1375} = \frac{390 \pm \sqrt{1081600}}{1375} =$$

$$= \frac{390 \pm \sqrt{1040}}{1375}.$$

$$x_1 = \frac{390 - 1040}{1375} < 0, \text{ что невозможно по условию.}$$

$$x_2 = \frac{390 + 1040}{1375} = \frac{1430}{1375} = 1 \frac{55}{1375} = 1 + \frac{11}{275} = 1 + \frac{1}{25} = 1 + \frac{4}{100}.$$

$$\text{Отсюда } 1 + \frac{r}{100} = 1 + \frac{4}{100}, r = 4.$$

1139. 1. Пусть n — число лет, на которое планируется взять кредит.

Тогда долг на сентябрь каждого года, последующего за годом взятия кредита, становится меньше долга на сентябрь предыдущего года на сумму $\frac{18}{n}$. Согласно условию, последовательность долгов на сентябрь в млн рублей по годам имеет вид:

$$18; 18 - \frac{18}{n} = 18 \cdot \frac{n-1}{n}; 18 - 2 \cdot \frac{18}{n} = 18 \cdot \frac{n-2}{n}; \dots; 18 \cdot \frac{1}{n}; 0.$$

2. В январе каждого года, последующего за годом взятия кредита, долг возрастает на $3,5\%$ по сравнению с концом предыдущего года.

Пусть d — долг, который образуется в конце предыдущего года. В январе последующего года он станет равным $d + d \cdot \frac{3,5}{100}$.

Согласно условию к сентябрю этого года он должен стать равным $d - \frac{18}{n}$. Следовательно, в этом году необходимо выплатить сумму

$$\left(d + d \cdot \frac{3,5}{100}\right) - \left(d - \frac{18}{n}\right) = d \cdot \frac{3,5}{100} + \frac{18}{n}.$$

Отсюда получается последовательность $x_1; x_2; x_3; \dots; x_n$ выплат по годам в млн рублей:

$$x_1 = 18 \cdot \frac{3,5}{100} + \frac{18}{n};$$

$$x_2 = 18 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{3,5}{100} + \frac{18}{n};$$

$$x_3 = 18 \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{3,5}{100} + \frac{18}{n};$$

...

$$x_n = 18 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{3,5}{100} + \frac{18}{n}.$$

Как видим, последовательность $x_1; x_2; x_3; \dots; x_n$ является убывающей арифметической прогрессией. Наибольшим числом является x_1 , а наименьшим — x_n . Её сумма S_n находится по формуле $S_n = \frac{x_1 + x_n}{2} \cdot n$.

Согласно условию получаем: $S_n = \frac{7,956}{2} \cdot n = 3,978 \cdot n$.

3. Найдём теперь n из условия $x_1 + x_n = 7,956$:

$$18 \cdot \frac{3,5}{100} + \frac{18}{n} + 18 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{3,5}{100} + \frac{18}{n} = 7,956; \quad 18 \cdot \frac{3,5}{100} \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{36}{n} = 7,956;$$

$$0,63 + \frac{36,63}{n} = 7,956;$$

$$\frac{36,63}{n} = 7,326; \quad n = \frac{36,63}{7,326} = 5. \quad S_n = 3,978 \cdot 5 = 19,89 \text{ (млн руб.)}$$

1141. Согласно условию возврата кредита ежегодно сумма долга будет уменьшаться на $\frac{12}{8}$ млн рублей, а плата за пользование кредитом будет составлять r % от оставшейся суммы долга. Тогда последний платёж бу-

дет $\left(\frac{12}{8} + \frac{12}{8} \cdot \frac{r}{100}\right)$ млн рублей, что по условию составляет не менее 1,68 млн рублей. $\frac{12}{8} \left(1 + \frac{r}{100}\right) \geq 1,68$, $1 + \frac{r}{100} \geq 1,12$, $r \geq 12$. Наименьшая возможная ставка — 12%.

1143. Пусть x — то число, на которое каждый месяц с 1-го по 20-й уменьшается долг в тыс. рублей, а x_i ($i = 1, 2, 3, \dots, 21$) — выплата за i -тый месяц в тыс. рублей. Тогда

$$900 \cdot \frac{103}{100} - x_1 = 900 - x,$$

$$(900 - x) \cdot \frac{103}{100} - x_2 = 900 - 2x,$$

$$(900 - 2x) \cdot \frac{103}{100} - x_3 = 900 - 3x,$$

... ..

$$(900 - 19x) \cdot \frac{103}{100} - x_{20} = 900 - 20x,$$

$$(900 - 20x) \cdot \frac{103}{100} - x_{21} = 0.$$

Складывая эти равенства, получаем

$$21 \cdot 900 \cdot \frac{103}{100} - x \cdot \frac{103}{100} (1 + 2 + \dots + 20) - (x_1 + x_2 + \dots + x_{21}) =$$

$= 20 \cdot 900 - x \cdot (1 + 2 + \dots + 20)$. Учитывая, что $1 + 2 + \dots + 20 = 210$ и $x_1 + x_2 + \dots + x_{21} = 1189,8$, получаем

$$3 \cdot 210 \cdot x = 21 \cdot 900 \cdot 103 - 20 \cdot 900 \cdot 100 - 118980, x = 44.$$

Согласно условию надо найти $900 - 20x = 900 - 20 \cdot 44 = 20$,

1145. Пусть S — сумма кредита в тыс. рублей. Так как кредит взят на 8 лет и в июле каждого последующего года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года, то последовательность долгов, начиная с июля 2026 по июль 2033 года имеет вид:

$\frac{7}{8}S; \frac{6}{8}S; \frac{5}{8}S; \frac{4}{8}S; \frac{3}{8}S; \frac{2}{8}S; \frac{1}{8}S; 0$. Пусть x_i ($i = 1, 2, 3, \dots, 8$) — выплата за i -тый месяц. Тогда

$$S \cdot \frac{23}{20} - x_1 = \frac{7}{8}S,$$

$$\frac{7}{8} \cdot \frac{23}{20} - x_2 = \frac{6}{8}S,$$

$$\frac{6}{8}S \cdot \frac{23}{20} - x_3 = \frac{5}{8}S,$$

$$\frac{5}{8}S \cdot \frac{23}{20} - x_4 = \frac{4}{8}S,$$

$$\frac{4}{8}S \cdot \frac{111}{100} - x_5 = \frac{3}{8}S,$$

$$\frac{3}{8}S \cdot \frac{111}{100} - x_6 = \frac{2}{8}S,$$

$$\frac{2}{8}S \cdot \frac{111}{100} - x_7 = \frac{1}{8}S,$$

$$\frac{1}{8}S \cdot \frac{111}{100} - x_8 = 0.$$

Складывая эти равенства, получаем

$$S \cdot \frac{23}{20} \cdot \frac{26}{8} + S \cdot \frac{111}{100} \cdot \frac{10}{8} - (x_1 + x_2 + \dots + x_8) =$$

$$= S \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} + \frac{5}{8} + \frac{6}{8} + \frac{7}{8} \right). \text{ Учитывая, что } x_1 + x_2 + \dots + x_8 = 780$$

и $1 + 2 + \dots + 7 = 28$, получаем

$$S \left(\frac{23}{20} \cdot \frac{26}{8} + \frac{111}{100} \cdot \frac{10}{8} - \frac{28}{8} \right) = 780.$$

$$S \cdot \frac{1300}{800} = 780, S = 480.$$

1147. Пусть a рублей — сумма кредита, x рублей — ежегодный платёж, $m\%$ — годовой процент. Тогда каждый год оставшаяся сумма умножается

на $t = \left(1 + \frac{m}{100}\right) = 1,2$. Тогда

$$((a \cdot 1,2 - x) \cdot 1,2 - x) \cdot 1,2 - x = 0. a \cdot 1,2^3 - x(1,2^2 + 1,2 + 1) = 0,$$

$$x = \frac{10920000 \cdot 1,728}{3,64} = \frac{10920 \cdot 1728 \cdot 100}{364} =$$

$$\frac{10920 \cdot 1728 \cdot 25}{91} = \frac{1560 \cdot 1728 \cdot 25}{13 \cdot 7} =$$

$$= \frac{1560 \cdot 1728 \cdot 25}{13} = 5184000.$$

1149. Пусть $q = 1 + \frac{20}{100} = \frac{6}{5}$, A — та сумма в тысячах рублей, которую добавлял вкладчик в конце каждого из первых трёх лет. Тогда к

концу четвертого года на вкладе получим сумму $((50q + A)q + A)q + A)q$ тыс. рублей. Получаем уравнение: $((50q + A)q + A)q + A)q = 125,52$,

$$((50q + A)q + A)q + A = \frac{125,52}{q}, ((50q + A)q + A)q + A = 104,6,$$

$$50q^3 + A(q^2 + q + 1) = 104,6, A = \frac{104,6 - 50\left(\frac{6}{5}\right)^3}{q^2 + q + 1} = \frac{18,2}{\frac{91}{25}} = 5 \text{ (ты-$$

сяч рублей).

1151. Общая сумма выплат равна сумме выплат начисленных по процентам и сумме кредита. Сумма выплат по процентам равна $0,2 \cdot (S + (S - 0,5) + (S - 0,7) + (S - 0,9) + (S - 1,1)) + 0,2 \cdot ((S - 1,7) + (S - 1,8) + \dots + 0,1)$

Пусть k — число слагаемых в сумме $(S - 1,7) + (S - 1,8) + \dots + 0,1$), являющейся арифметической прогрессией с разностью $d = -0,1$ и первым членом $S - 1,7$.

Тогда $S - 1,7 + (k - 1) \cdot (-0,1) = 0,1, S - 1,7 = (k - 1)0,1 + 0,1 = k \cdot 0,1, = 10S - 17$.

Поэтому сумма

$$(S - 1,7) + (S - 1,8) + \dots + 0,1 = \frac{S - 1,7 + 0,1}{2} \cdot (10S - 17).$$

Согласно условию получаем уравнение:

$$0,2(5S - 3,2) + 0,2\left(\frac{S - 1,6}{2} \cdot (10S - 17)\right) + S = 5,46.$$

$$50S^2 - 65S - 169 = 0, S_{1,2} = \frac{65 \pm \sqrt{4225 + 33800}}{100} = \frac{65 \pm 195}{100}.$$

Так как $S > 0$, то $S = 2,6$ млн рублей.

1153. Отметим, что общая масса перевозимого груза равна $400 \cdot 0,2 + 24 \cdot 3 = 152$ тонны.

Пусть x, y и z соответственно обозначают: число перевозок, где нет больших блоков (это перевозки типа I); число перевозок, где есть только один большой блок (это перевозки типа II); v число перевозок, где есть только два больших блока (это перевозки типа III). Понятно, что при каждой перевозке автомобиль следует загружать максимально насколько это возможно. Понятно также, что три больших блока в автомобиль разместить нельзя.

При перевозках типа I в один автомобиль можно загрузить только 34 маленьких блока. При перевозках типа II в один автомобиль можно загрузить 1 большой (он занимает 15 мест маленьких блоков) и 19 маленьких блоков. При перевозках типа III в один автомобиль можно загрузить 2 больших блока (они занимают 30 мест маленьких блоков) и 4 маленьких блока. Согласно условию получаем систему

$$\begin{cases} y + 2z = 24, \\ (34x + 19y + 4z) \cdot 0,2 + (y + 2z) \cdot 3 \geq 152. \end{cases}$$

Последнее неравенство принимает вид: $6,8 \cdot (x + y + z) \geq 152$. Отсюда $x + y + z \geq \frac{152}{6,8} > 22,3$. Наименьшее целое число удовлетворяющее этому неравенству равно 23, поэтому $x + y + z = 23$.

Пусть $x = 1$, $y = 20$ и $z = 2$, тогда в один вагон типа I загрузим 12 маленьких блоков. В каждый из 20 вагонов типа II загрузим 1 большой блок и 19 маленьких. Тем самым во все вагоны типа II загрузим 20 больших и 380 маленьких блоков. В каждый из 2-х вагонов типа III загрузим 2 больших и 4 маленьких блока. Тем самым во все вагоны типа III загрузим 4 больших и 8 маленьких блоков. В итоге в 23 вагона загрузим 24 больших и 400 маленьких блоков. Значит, минимальное число перевозок равно 23.

1155. Обозначим через S_k сумму вклада к концу 20 года, считая от года покупки акций, если акции проданы в конце k -того года. Тогда $S_k = 60 \cdot k \cdot (1,08)^{20-k}$. Найдём при каких значениях k выполняется неравенство

$$S_k < S_{k+1}, 60 \cdot k \cdot (1,08)^{20-k} < 60 \cdot (k+1) \cdot (1,08)^{20-(k+1)}.$$

Делим обе части неравенства на $60 \cdot (1,08)^{20-(k+1)}$, получим $k \cdot 1,08 < k+1, k \cdot 0,08 < 1, k < \frac{1}{0,08} = 12,5$.

Аналогично, $S_k > S_{k+1}$ при $k \geq 12,5$, то есть при $k \geq 13$.

Тогда $S_1 < S_2 < S_3 < \dots < S_{12} < S_{13} \geq S_{14} \geq \dots \geq S_{20}$.

Наибольшая сумма равна S_{13} , $k = 13$.

1157. Заданное уравнение равносильно совокупности двух систем при условии, что $0 \leq x \leq 1$.

$$\begin{cases} \begin{cases} \ln(6x-1) = 0, \\ x^2 - 2x + 2a - a^2 \geq 0 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} 6x-1 > 0, \\ x^2 - 2x + 2a - a^2 = 0 \end{cases} & (2) \end{cases}$$

Заметим, что $x^2 - 2x + 2a - a^2 = (x-1)^2 - (a-1)^2$.

$$\text{Решаем систему (1): } \begin{cases} x = \frac{1}{3}, \\ (x-1)^2 - (a-1)^2 \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}, \\ (x-a)(x-(2-a)) \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}, \\ \left(a - \frac{1}{3}\right)\left(a - \frac{5}{3}\right) \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \leq a \leq \frac{5}{3}, \\ x = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$\text{Решаем систему (2): } \begin{cases} x > \frac{1}{6}, \\ \begin{cases} x = a, \\ x = 2 - a \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} a < \frac{1}{6}, \\ x = a \end{cases} \\ \begin{cases} a < \frac{11}{6}, \\ x = 2 - a \end{cases} \end{cases}$$

Отсюда следует, что заданное уравнение равносильно совокупности:

$$\begin{cases} \begin{cases} \frac{1}{3} \leq a \leq \frac{5}{3}, \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} ; \\ \begin{cases} a > \frac{1}{6}, \\ x = a \end{cases} ; \\ \begin{cases} a < \frac{11}{6}, \\ x = 2 - a \end{cases} \end{cases} \quad (*)$$

Находим теперь такие значения a , при которых заданное уравнение имеет одно решение на промежутке $[0; 1]$.

1. Пусть $a \leq \frac{1}{6}$, тогда решением совокупности (*) является $x = 2 - a$, так как $a \leq \frac{11}{6}$. Но $2 - a > 1$, поэтому заданное уравнение на промежутке $[0; 1]$ решений не имеет.

2. Пусть $\frac{1}{6} < a \leq \frac{1}{3}$, тогда решениями совокупности (*) являются $x = a$ и $x = 2 - a$, так как $a \leq \frac{11}{6}$. Но $2 - a > 1$, поэтому заданное уравнение на промежутке $[0; 1]$ имеет единственное решение.

3. Пусть $\frac{1}{3} < a \leq \frac{5}{3}$, тогда решениями совокупности (*) являются $x = \frac{1}{3}$, $x = a$ и $x = 2 - a$, так как $a \leq \frac{11}{6}$ и $a > \frac{1}{6}$.

При этом, если $a < 1$, то решениями заданного уравнения являются $x = \frac{1}{3}$ и $x = a$ ($2 - a > 1$).

Если $a = 1$, то решениями заданного уравнения являются $x = \frac{1}{3}$ и $x = a = 2 - a = 1$.

Если же $1 < a < \frac{5}{3}$, то решениями заданного уравнения будут только $x = \frac{1}{3}$ и $x = a = 2 - a = 1$ ($\frac{1}{3} < 2 - a < 1$).

Если $a = \frac{5}{3}$, то единственным решением заданного уравнения является $x = \frac{1}{3}$ ($x = 2 - a = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$).

4. Пусть $\frac{5}{3} < a < \frac{11}{6}$, тогда решениями совокупности (*) являются $x = a$ и $x = 2 - a$, так как $a < \frac{11}{6}$ и $a > \frac{1}{6}$. Единственным решением заданного уравнения является $x = 2 - a$ ($\frac{1}{6} < 2 - a < \frac{1}{3}$).

5. Пусть $\frac{11}{6} \leq a$, тогда решением совокупности (*) является $x = a$, которое не является решением заданного уравнения.

Из сказанного выше получаем, что $a \in \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{5}{3}; \frac{11}{6}\right)$

1159. Представим $f(x)$ в виде кусочно-заданной функции:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2a^4, & \text{если } x < a^4 \\ x^2 - 4x + 2a^4, & \text{если } x \geq a^4. \end{cases}$$

1. Если $a^4 = 0$, то $a = 0$ и

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x < 0 \\ x^2 - 4x, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

График этой функции изображён на рис. 584.

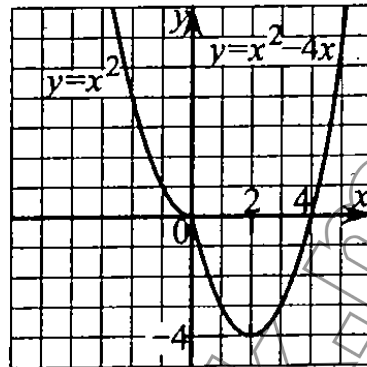


Рис. 584

По рисунку определяем, что функция не имеет точек максимума.

Отметим, что абсцисса вершины параболы $y = x^2 - 2a^4$ равна 0, а абсцисса вершины параболы $x^2 - 4x + 2a^4$ равна 2 и ветви каждой из этих парабол направлены вверх.

2. Если $0 < a^4 < 2$, то графиком $f(x)$ при $x < a^4$ является парабола $y = x^2 - 2a^4$, а графиком $f(x)$ при $a^4 < x < 2$ является парабола $x^2 - 4x + 2a^4$.

Учитывая, что функция $x^2 - 4x + 2a^4$ при $a^4 < x < 2$ убывает (её минимум в точке 2), функция $y = x^2 - 2a^4$ при $x < a^4$ возрастает (её минимум в точке 0) и функция $f(x)$ непрерывна, получаем эскиз графика функции $f(x)$, который изображён на рис. 585 (см. с. 534).

По рисунку определяем, что функция имеет точку максимума $x = a^4$.

3. Если $a^4 \geq 2$, то графиком $f(x)$ при $x < a^4$ является парабола $y = x^2 - 2a^4$, а графиком $f(x)$ при $2 \leq x$ является парабола $x^2 - 4x + 2a^4$.

Учитывая, что функция $x^2 - 4x + 2a^4$ при $x \geq 2$ возрастает (её минимум в точке 2), парабола $y = x^2 - 2a^4$ при $0 < x < a^4$ также возрастает (её минимум в точке 0) и функция $f(x)$ непрерывна, делаем вывод, что функции $f(x)$ не имеет точки максимума.

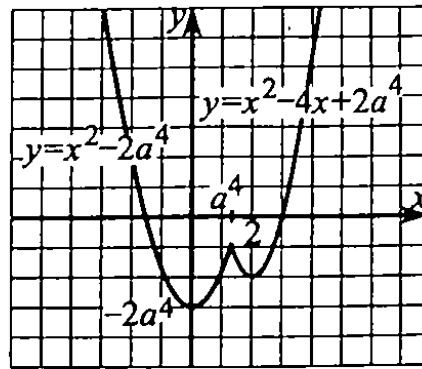


Рис. 585

Итак, множество всех значений a при каждом из которых функция $f(x)$ имеет точку максимума, удовлетворяет неравенству $0 < a^4 < 2$. Решаем неравенство $a^4 < 2$ и удаляем $a = 0$. Получим $(-\sqrt[4]{2}; 0) \cup (0; \sqrt[4]{2})$.

1161. Решим систему графически. Первое уравнение задаёт окружность радиусом 2 с центром в точке $(4; 4)$ (см. рис. 586).

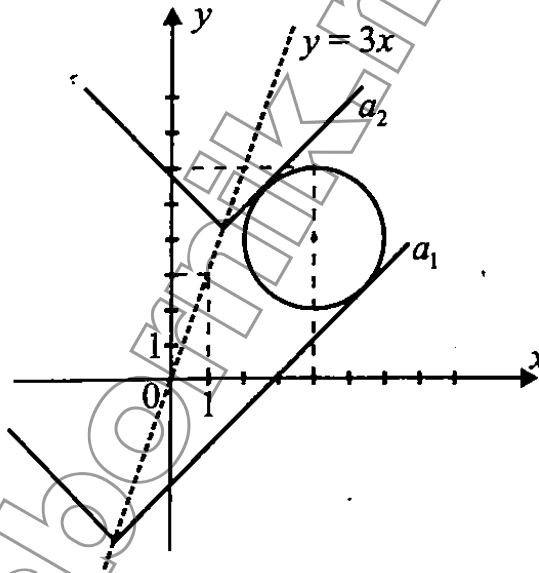


Рис. 586

График второго — смещённый график $y = |x|$, «уголок» с вершиной в точке $(a; 3a)$. Очевидно, что вершина уголка лежит на прямой $y = 3x$. Из рисунка видно, что единственная общая точка у графиков возможна в двух случаях. В обоих из них окружность касается правой части уголка ($x \geq a$), то есть с прямой $y = x + 2a$. Найдём эти значения a . Уравнение $(x - 4)^2 + ((x + 2a) - 4)^2 = 4$ должно иметь ровно один корень.

Преобразуем уравнение:

$$x^2 - 8x + 16 + x^2 + 4a^2 + 16 + 4ax - 8x - 16a - 4 = 0;$$

$$2x^2 + (4a - 16)x + 28 + 4a^2 - 16a = 0; \quad x^2 + (2a - 8)x + 14 + 2a^2 - 8a = 0.$$

Уравнение будет иметь единственное решение, если дискриминант D равен 0. При этом $\frac{D}{4} = (a - 4)^2 - 14 - 2a^2 + 8a = -a^2 + 2 = 0$. Отсюда

$$a = \pm\sqrt{2}.$$

1163. $x^2 + 3x - 3 + |x - a| > 1, |x - a| > -x^2 - 3x + 4$.

Рассмотрим функции $g(x) = |x - a|$ и $f(x) = -x^2 - 3x + 4$.

На рисунке 587 изображены эскизы графиков этих функций.

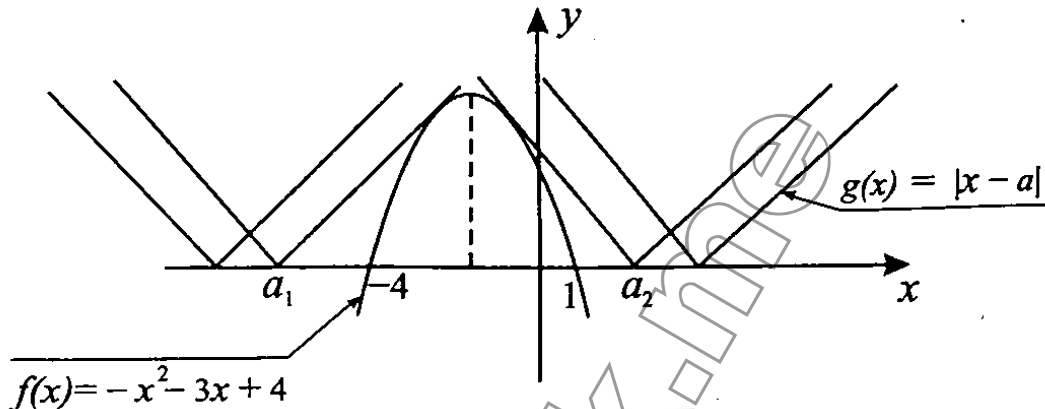


Рис. 587

Неравенство $g(x) > f(x)$ выполняется для всех x тогда и только тогда, когда график функции g лежит выше графика функции f .

Искомые значения параметра a определяются совокупностью неравенств
$$\begin{cases} a < a_1, \\ a > a_2. \end{cases}$$

Найдём значения a_1 и a_2 при условии, что уравнения $x - a_1 = -x^2 - 3x + 4$ и $a_2 - x = -x^2 - 3x + 4$ имеют единственный корень.

1. $x^2 + 4x - 4 - a_1 = 0,$

$$\frac{D}{4} = 0, \quad 4 + 4 + a_1 = 0, \quad a_1 = -8.$$

2. $x^2 + 2x - 4 + a_2 = 0,$

$$\frac{D}{4} = 0, \quad 1 + 4 - a_2 = 0, \quad a_2 = 5.$$

Искомые значения $a < -8$ или $a > 5$.

1165. Рассмотрим функцию $f(x) = 6\sqrt{x-1} + 5\log_3(2x-1)$. Она определена при $x \geq 1$ и возрастает на области определения. Значит, уравнение $f(x) + 11a = 0$ имеет не более одного решения. Это решение существует и принадлежит отрезку $[2; 5]$ тогда и только тогда, когда $f(2) + 11a \leq 0$ и

$$f(5) + 11a \geq 0.$$

Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 6 + 5 + 11a \leq 0, \\ 12 + 10 + 11a \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 11a + 11 \leq 0, \\ 11a + 22 \geq 0, \end{cases}$$

откуда $-2 \leq a \leq -1$.

1167. Пусть значение параметра a такое, что заданное уравнение

$$\frac{a}{9^x} + a = -1 - \frac{9^{-2x}}{3} \quad (1)$$

имеет ровно два корня x_1 и x_2 , $x_1 < x_2$ и $x_2 \geq 0,5$.

Сделаем замену $9^{-x} = t$, $t \in (0; +\infty)$. Получим уравнение

$$at + a + 1 + \frac{t^2}{3} = 0, \quad (2)$$

заданное на множестве $(0; +\infty)$. Пусть $9^{-x_1} = t_1$, $9^{-x_2} = t_2$. Так как функция $y = 9^{-x}$ убывающая и $x_1 < x_2$, то $t_1 > t_2$, а так как $x_2 \geq 0,5$, то

$$t_2 = 9^{-x_2} \leq 9^{-0,5} = \frac{1}{3}, \quad t_2 \leq \frac{1}{3}.$$

Перепишем уравнение (2) в виде $a(t+1) = -1 - \frac{t^2}{3}$, $a(t+1) = \frac{-3-t^2}{3}$.

Заметим, что $t+1 \neq 0$, тогда $a = \frac{-3-t^2}{3(t+1)}$.

Построим график функции $a(t) = \frac{-(t^2+3)}{3(t+1)}$ ($t \in (0; +\infty)$) на координатной плоскости tOa , где числа t принадлежат оси абсцисс, а числа a принадлежат оси ординат).

Согласно вышесказанному, на оси ординат находится такие точки a , что прямые, параллельные оси абсцисс и проходящие через эти точки пересекают график функции $a(t)$ ровно в двух точках с абсциссами $t_1 > t_2$ и

$$t_2 \leq \frac{1}{3}.$$

$$a'(t) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2t(t+1) - (t^2+3) \cdot 1}{(t+1)^2} = \frac{t^2+2t-3}{-3(t+1)^2} = \frac{(t-1)(t+3)}{-3(t+1)^2}.$$

$a'(t) = 0$ при $t = 1$, $t = -3$ (см. рис. 588 на с. 537). Заметим, что $t = -3$ не принадлежит промежутку $t \in (0; +\infty)$. Непосредственно убеждаемся, что $a'(\frac{1}{2})$ имеет знак $\ll + \gg$, а $a'(2)$ имеет знак $\ll - \gg$.

Получаем, что $t = 1$ является точкой максимума и

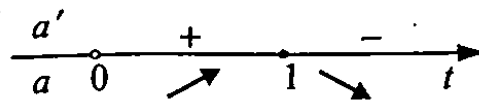


Рис. 588

$$a(1) = -\frac{2}{3}; a(0) = -1; a\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{7}{9}.$$

Получаем эскиз графика $y = a(t)$ (см. рис. 589).

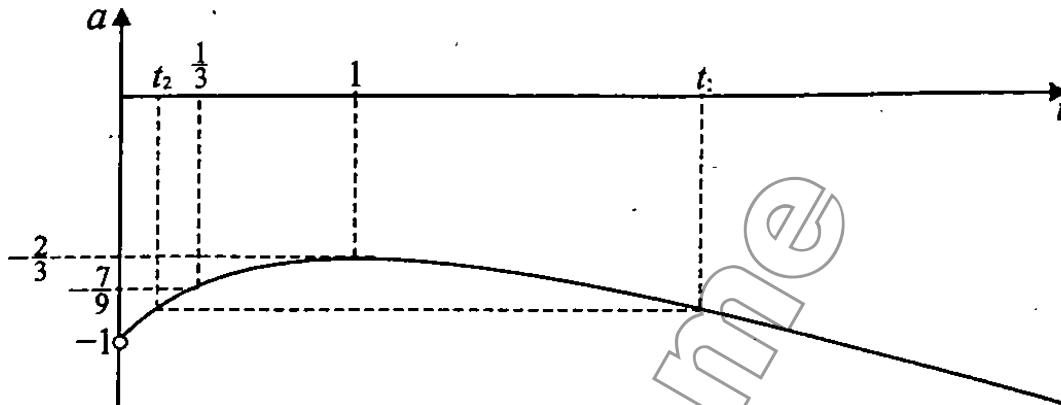


Рис. 589

По рисунку определяем, что прямая, параллельная оси абсцисс пересекает график функции $a(t)$ ровно в двух точках с абсциссами $t_1 > t_2$ и $t_2 \leq \frac{1}{3}$ при $a \in \left(-1; -\frac{7}{9}\right]$.

1169. Сделаем замену $x^4 = t$ ($t \geq 0$). Получим

$$\begin{cases} t^2 + y^2 = (a+3)^2, \\ t + y = |3a-1|. \end{cases} \quad (1).$$

Если $a = -3$, то система (1) решений не имеет, так одновременно получаем $t = 0, y = 0$ и $t + y = 10$.

При $a \neq -3$ графиком первого уравнения системы (1) на координатной плоскости tOy является окружность с центром в начале координат с радиусом $|a+3|$.

Графиком второго уравнения системы (1) является прямая линия, заданная формулой $y = -t + |3a-1|$, параллельная прямой $y = -t$ и пересекающая ось абсцисс Ot в точке $(|3a-1|; 0)$ (см. рис. 590 на с. 538).

По рисунку определяем, что если $0 \leq |3a-1| < |a+3|$, то прямая $y = -t + |3a-1|$ пересекает окружность в двух точках. Абсцисса t_1 , одной из этих точек меньше нуля, а абсцисса t_2 другой — больше нуля. Тогда система (1) имеет единственное решение $(t; y)$, а заданная система имеет ровно два решения — $(-\sqrt[4]{t}; y)$ и $(\sqrt[4]{t}; y)$.

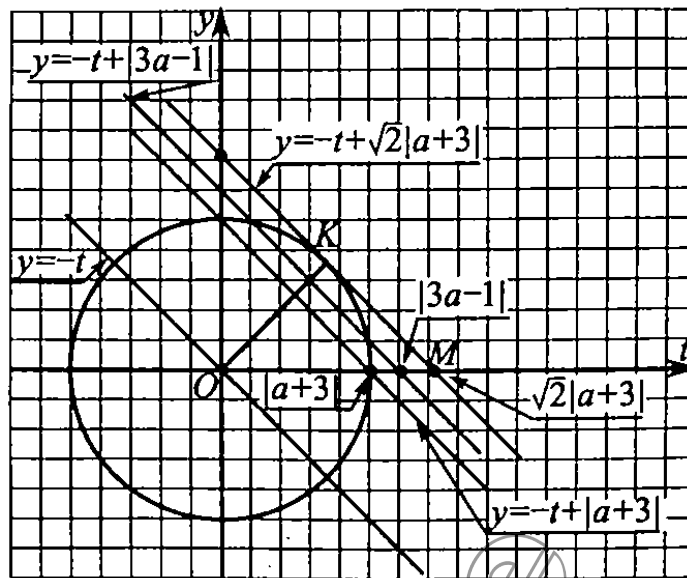


Рис. 590

Если $0 \leq |3a - 1| = |a + 3|$, то система (1) имеет два решения — $(0; |a + 3|)$ и $(|a + 3|; 0)$. Тогда исходная система имеет ровно три решения — $(0; |a + 3|)$, $(-\sqrt[4]{|a + 3|}; 0)$ и $(\sqrt[4]{|a + 3|}; 0)$.

Найдём уравнение касательной KM к окружности, которая параллельна прямой $y = -t$. По свойству касательной $OK \perp KM$. Треугольник OKM равнобедренный и прямоугольный. По теореме Пифагора, так как $OK = |a + 3|$, получаем $OM = \sqrt{OK^2 + OK^2} = \sqrt{2}|a + 3|$.

Таким образом, система заданная в условии, будет иметь ровно 4 решения в том случае, когда прямая $y = -t + |3a - 1|$ будет пересекать окружность ровно в двух точках с абсциссами t , большими нуля и точка пересечения $|3a - 1|$ этой прямой с осью абсцисс удовлетворяет неравенствам:

$$|a + 3| < |3a - 1| < \sqrt{2}|a + 3| \quad (*).$$

Решаем систему

$$\begin{cases} (a + 3)^2 - (3a - 1)^2 < 0, \\ (3a - 1)^2 - (\sqrt{2}(a + 3))^2 < 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^2 - 3a - 2 > 0, \\ 7a^2 - 18a - 17 < 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-\infty; -0,5) \cup (2; +\infty), \\ \left(\frac{9 - 10\sqrt{2}}{7}; \frac{9 + 10\sqrt{2}}{7}\right). \end{cases}$$

Решением неравенства (*) является множество $\left(\frac{9-10\sqrt{2}}{7}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(2; \frac{9+10\sqrt{2}}{7}\right)$.

1171. Преобразуем первое уравнение к виду:

$$\sqrt{-x^2 + 20x - 91} = -a(x - 1) + 3.$$

Графиком функции $f(x) = -x^2 + 20x - 91$ является парабола. Она пересекает ось абсцисс в точках 7 и 13, её ветви направлены вниз, абсцисса вершины равна 10 и $f(10) = 9$. Областью определения функции $y(x) = \sqrt{-x^2 + 20x - 91}$ является промежуток $[7; 13]$. На промежутке $[7; 10]$ она возрастает, на промежутке $[10; 13]$ убывает и $y(10) = \sqrt{9} = 3$.

Графиком функции $g(x) = -a(x - 1) + 3$ является при любом a прямая не вертикальная линия, которая проходит через точку $(1; 3)$, её угловой коэффициент равен $-a$ (см. рис. 591).

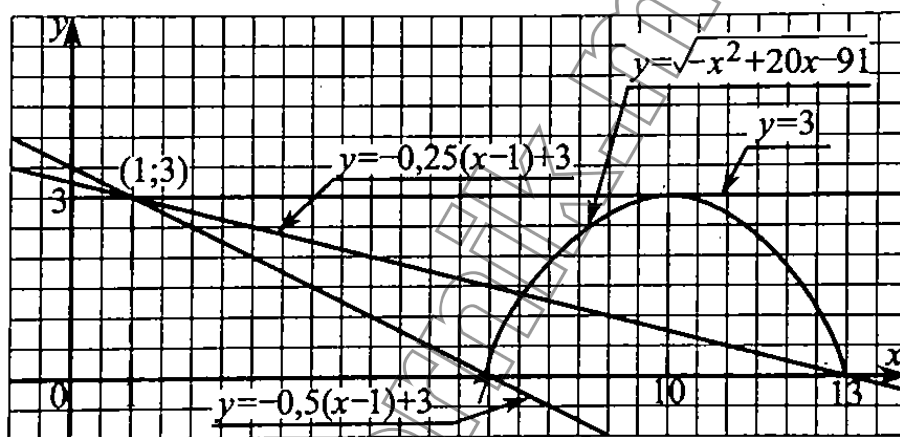


Рис. 591

По рисунку определяем, что прямая $y(x) = -a(x - 1) + 3$ пересекает график функции $y(x) = \sqrt{-x^2 + 20x - 91}$ ровно в одной точке при $a = 0$, $-0,5 \leq -a < -0,25$ и $0,25 < a \leq 0,5$.

1173. Преобразуем первое уравнение к виду:

$$(x^2 - 16x + 64) + (y^2 - 10y + 25) = 25, (x - 8)^2 + (y - 5)^2 = 25$$

Графиком этого уравнения является окружность радиусом 5 с центром в точке $(8; 5)$, которая касается оси абсцисс в точке $(8; 0)$.

Графиком второго уравнения является прямой угол с вершиной в точке $(a; 0)$, лежащей на оси абсцисс. Правая сторона этого угла образует угол 45° с положительным направлением оси абсцисс, а левая — 135° . Изобразим графики этих уравнений на координатной плоскости (см. рис. 592 на с. 540).

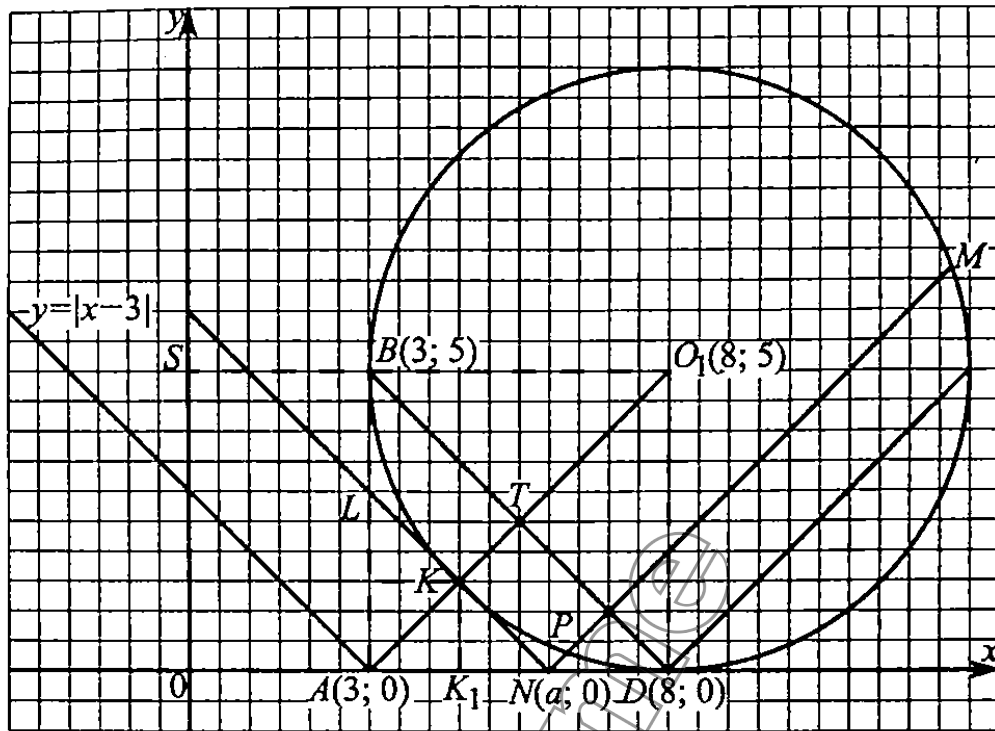


Рис. 592

По рисунку определяем, что заданная окружность пересекается с прямым углом в трёх случаях.

1. Левая сторона угла касается окружности, а правая пересекает окружность в двух точках;

2. Вершина угла лежит на окружности, а каждая из его сторон пересекает окружность ещё в одной точке;

3. Правая сторона угла касается окружности, а левая пересекает окружность в двух точках.

На представленном рисунке изображён случай (1). Левая сторона LN угла LMN касается окружности в точке K . Заметим, что ABO_1D — квадрат со стороной, равной 5. Тогда $LN \parallel BD$, $LN \perp O_1K$ (радиус окружности, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной) и $BD \perp O_1T$. Значит, точки K и T лежат на диагонали AO_1 квадрата ABO_1D . Следовательно, $AK_1 = KK_1 = K_1N$.

Так как точка K_1 является серединой отрезка AN , то абсцисса точки K равна $\frac{a+3}{2}$. Ордината точки K равна длине отрезка $KK_1 = \frac{a-3}{2}$.

Получаем, что точка K имеет координаты $(\frac{a+3}{2}, \frac{a-3}{2})$ и лежит на окружности. Поэтому

$$\left(\frac{a+3}{2} - 8\right)^2 + \left(\frac{a-3}{2} - 5\right)^2 = 25, \quad \frac{(a-13)^2}{4} + \frac{(a-13)^2}{4} = 25,$$

$(a-13)^2 = 50$. Отсюда следует, что либо $a = 13 + \sqrt{50}$, либо $a = 13 - \sqrt{50}$. Так как $a < 8$, то $a = 13 - \sqrt{50}$.

В случае 2 $a = 8$, а в случае 3 значение a симметрично числу $13 - \sqrt{50}$ относительно числа 8, поэтому $a = 8 + (8 - (13 - \sqrt{50})) = 3 + \sqrt{50}$.

1175. Сделаем замену $\sin^2 x = t$, тогда $0 \leq t \leq 1$. Получим неравенство $at^2 + 2t + 3a - 9 > 0$ (*).

Пусть при некотором значении a , заданное в условии неравенство выполняется для любого x . Тогда неравенство (*) выполняется для любого t из промежутка $[0; 1]$.

Рассмотрим функцию $f(t) = at^2 + 2t + 3a - 9$. Неравенство (*) выполняется при $t = 0$, поэтому $f(0) > 0$, $3a - 9 > 0$, $a > 3$.

Отметим, что функция $f(t)$ является непрерывной. Исследуем $f(t)$ с помощью производной на интервале $(0; 1)$ при $a > 3$.

$f'(t) = 2at + 2$ и $f'(t) > 0$ при $a > 3$. Следовательно $f(t)$ возрастает на интервале $(0; 1)$, а значит и на отрезке $[0; 1]$. Тогда $f(0)$ — наименьшее значение $f(t)$ на указанном отрезке $[0; 1]$. Значит, для любого t из отрезка $[0; 1]$ выполняется неравенство $f(t) \geq f(0) = 3a - 9 > 0$ при $a > 3$.

1177. а) Так как участник с номером 1 указал номер какого-то участника, то наибольшее искомое число меньше 85.

Предположим, что наибольшее искомое число равно 84. Тогда все участники указали один номер i ($1 \leq i \leq 85$). Но это невозможно, так как участник с номером i не имеет права указывать свой номер.

Покажем, что наибольшее искомое число равно 83. Действительно, например, все участники с номерами 1, 2, ..., 84 указали номер 85, а участник с номером 85 указал номер 84.

б) Если предположить, что такой случай возможен, то останется 6 номеров участников, которые были указаны не менее двух раз. Тогда получаем, что указано не менее 12 номеров, чего быть не может, так как их всего 10.

в) Пусть k — число номеров участников, указанных не более двух раз в результате опроса, если $m = 96$. Тогда $96 - k$ номеров участников были указаны не менее трёх раз. Поэтому число всех указанных участников в результате опроса окажется не менее $3(96 - k)$. Но общее число указанных номеров равно 96. Поэтому $3(96 - k) \leq 96$. Отсюда $3k \geq 192$, $k \geq 64$.

Покажем, что случай $k = 64$ возможен. Действительно, пусть участники с номерами 1, 2, ..., 32 указали соответственно номера 65, 66, ..., 96,

участники с номерами 33, 34, ..., 64 также соответственно указали номера 65, 66, ..., 96. Участники с номерами 65, 66, ..., 95 указали соответственно номера 66, 67, ..., 96, а участник с номером 96 указал номер 65. Искомое число равно 64.

1179. Пусть $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{10}$ — оценки, выставленные каждым из членов жюри в порядке возрастания.

а) Пусть $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{10}}{10} - \frac{a_3 + a_4 + \dots + a_8}{6} = R$, тогда

$$R = \frac{3(a_1 + a_2 + \dots + a_{10})}{30} - \frac{5(a_3 + a_4 + \dots + a_8)}{30} =$$

$$= \frac{3(a_1 + a_2 + a_9 + a_{10})}{30} - \frac{2(a_3 + a_4 + \dots + a_8)}{30}.$$

$$R = \frac{a_1 + a_2 + a_9 + a_{10}}{10} - \frac{(a_3 + a_4 + \dots + a_8)}{15}$$

Предположим, что $\frac{a_1 + a_2 + a_9 + a_{10}}{10} - \frac{a_3 + a_4 + \dots + a_8}{15} = \frac{17}{450}$

Умножим обе части равенства на 450, получим

$45(a_1 + a_2 + \dots + a_{10}) - 30(a_3 + a_4 + \dots + a_8) = 17$. Получаем противоречие, так как левая часть равенства делится на 5, а правая нет.

б) Да, может. Например, если члены жюри выставили оценки 0, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 13, 14.

в) Оценим сумму $a_3 + a_4 + \dots + a_8$ следующим образом.

$a_8 \geq a_7 + 1$; $a_8 \geq a_6 + 2 \geq \dots \geq a_2 + 6$. Аналогично $a_7 \geq a_2 + 5$, $a_6 \geq a_2 + 4$, $a_5 \geq a_2 + 3$, $a_4 \geq a_2 + 2$, $a_3 \geq a_2 + 1$.

Отсюда $a_3 + a_4 + \dots + a_8 \geq 6a_2 + 21$, $-(a_3 + a_4 + \dots + a_8) \leq -6a_2 - 21$

$$-\frac{(a_3 + a_4 + \dots + a_8)}{15} \leq \frac{-2a_2 - 7}{5} = \frac{-4a_2 - 14}{10}.$$

Прибавим к обеим частям этого неравенства число $\frac{a_1 + a_2 + a_9 + a_{10}}{10}$

Получим неравенство $R \leq \frac{a_1 + a_2 + a_9 + a_{10} - 4a_2 - 14}{10}$,

$$R \leq \frac{a_1 - 3a_2 + a_9 + a_{10} - 14}{10} \leq \frac{a_1 - 3a_2 + 13 + 14 - 14}{10} =$$

$$= \frac{a_1 - 3a_2 + 13}{10}.$$

Пусть $a_1 = i$, тогда $a_2 \geq (i + 1)$, $-3a_2 \leq (-3i - 3)$ и $R \leq \frac{i - 3i - 3 + 13}{10} = \frac{-2i + 10}{10} \leq 1$.

Далее так же, как и выше, получаем:

$$a_9 - 1 \geq a_8;$$

$$a_9 - 2 \geq a_7;$$

$$a_9 - 3 \geq a_6;$$

$$a_9 - 4 \geq a_5;$$

$$a_9 - 5 \geq a_4;$$

$$a_9 - 6 \geq a_3.$$

Складывая неравенства получаем, что

$$6a_9 - 21 \geq a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8,$$

$$\frac{-6a_9 + 21}{15} \leq \frac{-(a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8)}{15}. \quad (1)$$

Но $\frac{-6a_9 + 21}{15} = \frac{-4a_9 + 14}{10}$. Прибавляя $\frac{a_1 + a_2 + a_9 + a_{10}}{10}$ к обеим частям неравенства

$$\frac{-4a_9 + 14}{10} \leq \frac{-(a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8)}{15}$$

получим, что

$$R \geq \frac{a_1 + a_2 + a_9 + a_{10} - 4a_9 + 14}{10} = \frac{a_1 + a_2 + a_{10} - 3a_9 + 14}{10} =$$

$$\frac{a_1 + a_2 + (a_{10} - a_9) - 2a_9 + 14}{10} \geq \frac{1 + 1 - 2 \cdot 13 + 14}{10} = -1.$$

Наибольшее возможное значение a_9 равно 13. Наименьшее значение $a_1 + a_2$ равно 1. поэтому

$$R \geq -1.$$

Получаем, что $-1 \leq R \leq 1$. Значит, $|R| \leq 1$ и наибольшее значение $|R|$ равно 1.

Полученное максимальное значение разности оценок достигается, например, если выставлены оценки 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 13, 14.

1181. а) Находим остаток от деления 4^{13} на 7 следующим образом:

$$4^1 = 4 = 7 \cdot 0 + 4, 4^1 \text{ имеет тип } 4;$$

$$4^2 = 16 = 7 \cdot 2 + 2, 4^2 \text{ имеет тип } 2;$$

$$4^3 = 7 \cdot 9 + 1, 4^3 \text{ имеет тип } 1.$$

$$\text{Отсюда } 4^6 = (4^3)^2 = (7 \cdot 9 + 1)^2 = 7(7 \cdot 9^2 + 2 \cdot 9) + 1 = 7 \cdot k + 1,$$

где $k = 7 \cdot 9^2 + 2 \cdot 9$, поэтому 4^6 имеет тип 1.

Аналогично показываем, что 4^{12} имеет тип 1. Значит, $4^{12} = 7 \cdot q + 1$ ($q \in N$). Тогда $4^{13} = 7 \cdot 4q + 4$. Следовательно, тип пылесоса с номером 4^{13} равен 4.

б) Предположим, что число 12 является типом пылесоса с номером 2321 при некотором значении n всех различных типов пылесосов. Тогда $2321 = n \cdot s + 12$ ($s \in N$), $2309 = n \cdot s$.

Отсюда следует, что 2309 делится нацело на n . Но это не верно, так как число 2309 является простым, а $1 < n < 1500$.

Известно, что натуральное число, отличное от единицы является простым, когда оно не делится ни на одно простое число от 2 до \sqrt{a} включительно. $\sqrt{2309} < 49$. Простыми числами от 2 до 49 являются: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

По известным признакам делимости число 2309 не делится на 2, 3, 5, 11.

Далее путём деления уголком убеждаемся, что 2309 не делится на оставшиеся указанные простые числа.

$2309 = 7 \cdot 329 + 6$, $2309 = 11 \cdot 209 + 10$, $2309 = 13 \cdot 177 + 8$,
 $2309 = 17 \cdot 135 + 14$, $2309 = 19 \cdot 121 + 10$, $2309 = 23 \cdot 100 + 9$,
 $2309 = 29 \cdot 79 + 18$, $2309 = 31 \cdot 74 + 15$, $2309 = 43 \cdot 53 + 30$, $2309 = 47 \cdot 49 + 6$.
 Отсюда следует, что 2309 — простое число.

в) Нет. Покажем, что для любого натурального m ($m \geq 2$), пылесос с номером $K = 4^{3m}$ упаковывается в контейнер, номер которого не меньше числа $(m + 63) \cdot 7^{m-2} \cdot 9^{m-1}$, если число n всех типов пылесосов равно 7. Заметим, что $K = 4^{3m} = (63 + 1)^m$.

$(63 + 1)^m = (63 + 1) \cdot (63 + 1) \cdot \dots \cdot (63 + 1)$ (перемножаются m скобок). Если при умножении скобок из каждой скобки взять число 63, получим число 63^m . А если из каждой скобки, кроме одной, взять число 63, а из той одной число 1, то получим число 63^{m-1} . Так как число 1 может быть в любой из m скобок, то получим m раз число 63^{m-1} . Тем самым, применяя аналогичные рассуждения, получаем:

$$\begin{aligned} (63 + 1)^m &= 63^m + m \cdot 63^{(m-1)} + \dots + 63m + 1 = \\ &= 63(63^{m-1} + m \cdot 63^{m-2} + \dots + m) + 1 = 7 \cdot (9(63^{m-1} + m \cdot 63^{m-2} + \dots + m)) + 1. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что неполное частное от деления 4^{3m} на 7 равно $9(63^{m-1} + m \cdot 63^{m-2} + \dots + m)$ и $9(63^{m-1} + m \cdot 63^{m-2} + \dots + m) \geq (m + 63) \cdot 7^{m-2} \cdot 9^{m-1}$.

1183. а) Четырёхзначных чисел, не содержащих ни одного нуля в десятичной записи, будет 9^4 штук, так как на каждом месте может быть любая из девяти цифр: 1, 2, ..., 9.

Количество четырёхзначные чисел, в десятичной записи которых ровно один нуль, находим исходя из того, что на первом месте нуль не может быть по определению. Поэтому на первом месте может быть любая из девяти цифр: 1, 2, ..., 9. Если нуль на втором месте, то на последующих двух местах также любая из девяти цифр: 1, 2, ..., 9. Поэтому таких чисел будет 9^3 штук. Аналогично получим 9^3 штук, когда нуль будет на третьем месте, и 9^3 штук, когда нуль будет на четвёртом месте.

Итого получаем $9^4 + 3 \cdot 9^3 = 8748$ искомых телефонных номеров.

б) Количество четырёхзначные чисел, в десятичной записи которых ровно два нуля, находим исходя из того, что на первом месте нуль не может быть по определению. Поэтому на первом месте может быть любая из девяти цифр: 1, 2, ..., 9. Если нуль на втором и на третьем местах, то на оставшемся месте также может быть любая из девяти цифр: 1, 2, ..., 9. Поэтому таких чисел будет 9^2 штук. Аналогично получим 9^2 штук, когда нуль будет на втором и четвёртом местах, или на третьем и четвёртом местах. Ровно два нуля получаем в $3 \cdot 9^2 = 243$ случаях. Ровно три нуля получим в 9 случаях (9 вариантов для первой цифры). Итого получаем $243 + 9 = 252$ искомых телефонных номера.

в) Четырёхзначных чисел, содержащих в десятичной записи ровно одну цифру 9 и ни одного нуля, будет $4 \cdot 8^3 = 2048$ штук. Действительно, если цифра 9 на первом месте, то на остальных местах может быть любая из восьми цифр: 1, 2, ..., 8. Получим $8^3 = 512$ штук искомых чисел. Аналогично получим $8^3 = 512$ штук искомых чисел, если цифра 9 будет на втором, третьем или четвёртом местах. В таком случае получим всего $4 \cdot 8^3 = 4 \cdot 512 = 2048$ штук искомых чисел.

Для подсчёта четырёхзначных чисел, содержащих в десятичной записи одну цифру 9 и одну цифру 0, опять укажем, что на первом месте нуля не может быть. Если на первом месте цифра 9, то цифра 0 может быть на втором, третьем или четвёртом местах. В каждом из этих случаев на оставшихся местах может быть любая из восьми цифр: 1, 2, ..., 8, поэтому в каждом из этих трёх случаев получаем по 64 искомых числа. Всего $64 \cdot 3 = 192$ варианта.

Если на первом месте цифра, отличная от 9, то на нём может быть любая из цифр: 1, 2, ..., 8. Тогда цифры 9 и 0 могут быть соответственно на втором и третьем (или третьем и втором), на втором и четвёртом (или четвёртом и втором), на третьем и четвёртом (или четвёртом и третьем). В каждом из этих шести случаев на каждом из двух не указанных мест могут быть любые цифры от 1 до 8. В каждом из этих шести случаев получаем по 64 искомых числа. Всего $64 \cdot 6 = 384$ варианта.

Получаем, что общее число искомых чисел равно $2048 + 192 + 384 = 2624$.

1185. а) Можно. Под числами 1, 2, 3, ..., 34, 35 подписать соответственно числа 35, 34, 33, ..., 2, 1.

б) Нельзя. Под 11 можно подписать только число 5. Под числом 4 также можно подписать только число 5, что невозможно по условию.

в) Можно. Под числами 94, 95, ..., 2021, 2022 запишем числа 2022, 2021, ..., 95, 94 соответственно. Тогда сумма чисел в каждом столбце, начиная с 94-го, равна $2116 = 46^2$. Под каждым из чисел 28, 29, ..., 92, 93 запишем соответственно числа 93, 92, ..., 29, 28. Тогда сумма чисел в каждом столбце с 28-го по 93-й равна $121 = 11^2$.

Под каждым из чисел 22, 23, ..., 26, 27 запишем соответственно числа 27, 26, ..., 23, 22. Тогда сумма чисел в каждом столбце с 22-го по 27-й равна $49 = 7^2$.

Под каждым из чисел 4, 5, ..., 20, 21 запишем соответственно числа 21, 20, ..., 5, 4. Тогда сумма чисел в каждом столбце с 4-го по 21-й равна $25 = 5^2$. Наконец, под каждым из чисел 1, 2, 3 запишем соответственно числа 3, 2, 1. Тогда сумма чисел в каждом столбце с 1-го по 3-й равна $4 = 2^2$.

1187. а) Да. Например,

$$1, 2, 3, \dots, 69, 70, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81.$$

$$1 + 2 + \dots + 69 + 70 + 72 + 73 + \dots + 80 + 81 =$$

$$= (1 + 2 + \dots + 69 + 70 + 71 + 72 + 73 + \dots + 80 + 81) - 71 =$$

$$= \frac{1 + 81}{2} \cdot 81 - 71 = 3250.$$

б) Нет. Предположим, что число 99 является членом написанной последовательности. Тогда наименьшая сумма всех чисел такой последовательности равна

$$1 + 2 + 3 + \dots + 78 + 79 + 99 = \frac{1 + 79}{2} \cdot 79 + 99 = 40 \cdot 79 + 99 = 3259.$$

Получаем противоречие, так как $3259 > 3250$.

в) Покажем, что указанная последовательность не может содержать 5 чисел, кратных 11. Действительно, пусть последовательность содержит ровно 5 чисел, кратных 11. Тогда такая последовательность с наименьшей суммой всех чисел имеет вид:

$$1, 2, 3, \dots, 55, 56, \dots, 65, 67, 68, \dots, 76, 78, 79, 80, 81, 82.$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + 64 + 65 = \frac{1 + 65}{2} \cdot 65 = 2145.$$

$$67 + 68 + 74 + \dots + 75 + 76 = \frac{67 + 76}{2} \cdot 10 = 715.$$

$$78 + 79 + 80 + 81 + 82 = 400, 2145 + 715 + 400 = 3260.$$

Получаем противоречие, так как $3260 > 3250$.

Аналогично получаем, что написанная последовательность не может иметь ровно 4, ровно 3, ровно 2 и ровно 1 число, кратное 11, или не иметь их совсем.

Однако указанная последовательность может иметь ровно 6 чисел, кратных 11.

$$1, 2, 3, \dots, 76, 79, 80, 81, 84.$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + 75 + 76 = \frac{1 + 76}{2} \cdot 76 = 2926.$$

$$79 + 80 + 81 + 84 = 324, 2926 + 324 = 3250.$$

Таким образом, наименьшее количество чисел, кратных 11, в указанной последовательности равно 6.

1189. а) Больше 57 сотрудников не могут летом отдыхать одновременно в указанных городах, так как тех, кто отдыхали в Анапе, больше 57 быть не может по условию.

Разделим множество всех сотрудников на 4 непересекающиеся подмножества M, P, Q и S так, что M, P, Q и S содержат соответственно 57, 7, 11 и 15 сотрудников.

Обозначим $A = M$, $\Gamma = M \cup P \cup Q$ и $C = M \cup Q \cup S$. Тогда A, Γ и C содержат соответственно 57, 75 и 83 сотрудников, которые отдыхали соответственно в городах Анапа, Геленджик и Сочи.

б) Пусть x — число сотрудников, каждый из которых отдыхал в Сочи, но не отдыхал в Геленджике. y — число сотрудников, каждый из которых отдыхал в Геленджике, но не отдыхал в Сочи. z — число сотрудников, каждый из которых отдыхал и в Геленджике, и в Сочи. t — число сотрудников, каждый из которых не отдыхал ни в Геленджике, ни в Сочи (x, y, z, t — целые неотрицательные числа).

Тогда $x + z = 83$, $y + z = 75$ и $x + z + y + t = 90$, $x + z + y + z + t = 90 + z$, $83 + 75 + t = 90 + z$, $z = 83 + 75 - 90 + t = 68 + t$. Покажем на примере, что наименьшее возможное значение z равно 68.

Разделим множество всех сотрудников на 3 непересекающиеся подмножества M, P и Q так, что M, P и Q содержат соответственно 15, 68 и 7 сотрудников.

Обозначим $C = M \cup P$ и $\Gamma = P \cup Q$. Тогда C и Γ содержат соответственно 83 и 75 сотрудников, которые отдыхали соответственно в городах Анапа и Геленджик.

Отметим, что предыдущие рассуждения не зависят от того, кто отдыхал в Анапе.

в) Пусть A — множество тех $68 + t$ сотрудников издательства, каждый из которых отдыхал одновременно и в Сочи, и в Геленджике, а B — множество тех 57 сотрудников издательства, каждый из которых отдыхал Анапе. Тогда так же, как и в пункте б), ищем наименьшее число сотрудников, каждый из которых отдыхал и в Сочи, и в Геленджике, и в Анапе.

Это число равно $68 + t + 57 - 90 + v = 37 + v + t$ (t и v — целые неотрицательные числа). Значит, возможно, что наименьшее число сотрудников, каждый из которых отдыхал и в Сочи, и в Геленджике, и в Анапе, не меньше 35. Покажем на примере, что их может быть 35.

Разделим множество всех сотрудников на 5 непересекающихся подмножеств M, P, Q, S и T так, что M, P, Q, S и T содержат соответственно 35, 15, 7, 11 и 22 сотрудника.

Обозначим $\text{Ан.} = M \cup P \cup Q$, $\text{Гел.} = M \cup Q \cup S \cup T$ и $\text{Соч.} = M \cup P \cup S \cup T$. Тогда Ан. , Гел. и Соч. содержат соответственно 57, 75 и 83 сотрудника, которые отдыхали соответственно в городах Анапа, Геленджик и Сочи.

1191. а) Обозначим через $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ — номера промежуточных остановок и номер конечной остановки по мере удаления их от Бирюково. Тогда каждому варианту выхода пассажиров на промежуточной и конечной остановках будет однозначно соответствовать шестиэлементная последовательность указанных номеров. Например, если пассажиры $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ выходят соответственно на остановках 3, 3, 2, 4, 3, 1, то соответствующая шестиэлементная последовательность имеет вид (3, 3, 2, 4, 3, 1).

Каждая такая последовательность является элементом декартова произведения $A \times A \times A \times A \times A \times A = A^6$. Так как A содержит 5 чисел, то A^6 содержит $5^6 = 15\,625$ элементов.

б) Подсчитаем количество вариантов выходов, если на конечной остановке 5 выходят ровно три пассажира. В таком случае в соответствующей шестиэлементной последовательности будет ровно три числа 5. Оставшиеся три числа могут принимать любые четыре значения, кроме числа 5. Тогда, рассуждая, как и в пункте а), получаем, что для данной тройки пассажиров число таких шестиэлементных последовательностей будет равно $4^3 = 64$.

Заметим, что существует ровно $C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$ различных троек элементов в шестиэлементном множестве. Получаем $64 \cdot 20 = 1280$ вариантов.

Подсчитаем количество вариантов выходов, если на конечной остановке 5 выходят ровно четыре пассажира. В таком случае в соответствующей шестиэлементной последовательности будет ровно четыре числа 5. Оставшиеся два числа могут принимать любые четыре значения, кроме числа 5. Тогда, рассуждая, как и в пункте а), получаем, что для данной четвёрки пассажиров число таких шестиэлементных последовательностей будет равно $4^2 = 16$.

Заметим, что существует ровно $C_6^4 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$ различных четвёрок элементов в шестиэлементном множестве. Получаем $16 \cdot 15 = 240$ вариантов.

Подсчитаем, наконец, количество вариантов выходов, если на конечной остановке 5 выходят ровно пять пассажиров. В таком случае в соответствующей шестиэлементной последовательности будет ровно пять чисел 5. Оставшееся одно число может принимать любые четыре значения, кроме числа 5. Тогда, рассуждая, как и в пункте а), получаем, что для данной пятёрки пассажиров число таких шестиэлементных последовательностей будет равно $4^1 = 4$.

Заметим, что существует ровно $C_6^5 = \frac{6!}{5! \cdot 1!} = 6$ различных пятёрок элементов в шестиэлементном множестве. Получаем $4 \cdot 6 = 24$ варианта.

Понятно, что существует единственный вариант, когда на последней остановке выходят все шесть пассажиров.

Общее число выходов равно $1280 + 240 + 24 + 1 = 1545$.

в) Пусть x_i — количество пассажиров, которые выходят на i -той остановке, включая последнюю ($x_i \geq 0, i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$). Согласно условию надо найти количество всех неотрицательных целых решений уравнения $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$.

Сделаем замену $x_i = y_i - 1$ и находим количество положительных целых решений уравнения

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 25 \quad (1).$$

Запишем число 25 в виде последовательности, состоящей из 25 единиц:

111...111.

Располагаем теперь знак «+» на четырёх произвольных местах между единицами. Например,

$$11 + 111111 + 1111111 + 11111111 + 11.$$

Число единиц до первого знака «+» обозначим y_1 , число единиц между первым и вторым знаками «+» обозначим y_2 , число единиц между вторым и третьим знаками «+» обозначим y_3 , число единиц между третьим и четвёртым знаками «+» обозначим y_4 . Наконец, число единиц после четвёртого знака «+» обозначим y_5 . Получаем, что $y_1 = 2$, $y_2 = 6$, $y_3 = 7$, $y_4 = 8$ и $y_5 = 2$ и последовательность $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ образует решение уравнения (1).

Таким образом, располагая всеми различными способами знак «+» на 4-х местах из 24 возможных мест между единицами, получим все решения уравнения (1).

Осталось заметить, что всякое четырёхэлементное подмножество в двадцатичетырёхэлементном множестве является сочетанием из двадцати четырёх элементов по четыре. Их число равно

$$C_{24}^4 = \frac{24!}{4! \cdot 20!} = \frac{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 10626.$$

1193. Пусть соответственно k_i и s_i — количество всех чисел и сумма всех чисел, записанных в i -тый день.

а) По условию $k_2 > k_3 > k_4 > \dots > k_{n-1} > k_n$. Тогда $k_2 \geq k_3 + 1$, $k_3 \geq k_4 + 1$. Отсюда следует, что $k_3 \geq k_4 + 2$ и $k_2 \geq k_4 + 2$. Рассуждая аналогично, получаем, что $k_2 \geq k_5 + 3, \dots, k_2 \geq k_n + (n - 2)$.

При $n = 11$ получаем, $k_2 \geq k_n + 9$. Поэтому $k_2 \geq 10$. Значит, и $s_2 \geq 10$. Сумма не менее 10 натуральных чисел также не менее 10. Значит, число s_2 не может быть равно 9.

б) Заметим, что среднее арифметическое всех чисел, записанных в i -тый день, равно $\frac{s_i}{k_i}$. Также, как и в пункте а), показываем, что $k_1 \geq k_n + (n - 1)$. При $n = 11$ получаем, $k_1 \geq k_n + 10$. Поэтому $k_1 \geq 11$.

Рассмотрим случай, когда $k_1 = 13$. Выпишем последовательности возможных значений s_i и k_i .

номера дней i : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.

s_i : 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23.

k_i : 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3.

Такой случай возможен, так как $k_{11} = 3$ и сумма трёх чисел, меньших 10, может быть получена. Например, $8 + 8 + 7$

1 день	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2 день	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
3 день	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1		
4 день	2	2	2	2	2	1	1	1	1			
5 день	2	2	2	2	2	2	2	1				
6 день	3	3	2	2	2	2	2					
7 день	3	3	3	3	2	2						
8 день	4	4	3	3	3	3						
9 день	5	4	4	4	4							
10 день	6	6	5	5								
11 день	8	8	7									

При этом частное $\frac{s_i}{k_i}$, равное 5,5, существует: $\frac{s_{10}}{k_{10}} = \frac{22}{4} = 5,5$.

в) По условию $s_n > s_{n-1} > s_{n-2} > \dots > s_2 > s_1$.

Тогда также, как и в пункте а), получаем:

$$s_n \geq s_1 + (n - 1),$$

$$s_{n-1} \geq s_1 + (n - 2),$$

$$s_{n-2} \geq s_1 + (n - 3),$$

... ..

$$s_3 \geq s_1 + 2,$$

$$s_2 \geq s_1 + 1$$

Поэтому наименьшее значение $s_1 + s_2 + \dots + s_n$ не меньше

$$s_1 + s_1 + 1 + \dots + s_1 + (n - 2) + s_1 + (n - 1) = \frac{2s_1 + (n - 1)}{2} \cdot n.$$

В пункте а) установлено, что при $n = 11$ получаем, что $k_1 \geq 11$ и $s_1 \geq 11$.

Если $s_1 = 11$, то $s_{11} = 21$ и s_{11} является натуральным числом, меньшим 10, что невозможно.

Если $s_1 = 12$, то $s_{11} = 22$ и s_{11} является суммой двух натуральных чисел, меньших 10, что опять невозможно.

Если $s_1 = 13$, то $s_{11} = 23$ и s_{11} является суммой трёх натуральных чисел, меньших 10, что возможно. Например, 887.

Пример того, какие числа мог записывать Ашот в течение 11 дней при $s_1 = 13$, см. в пункте б).

Искомая наименьшая сумма равна $\frac{2 \cdot 13 + 10}{2} \cdot 11 = 198$.

1195. а) Заметим, что последовательность (a_n) ($n \in N$) является арифметической прогрессией с первым членом, равным числу 3. Первым числом этой прогрессии, большим 19, является 23. Искомая наименьшая сумма является суммой 99 чисел последовательности $\{a_n\}$, первое из которых равно 23, а 99-е находим по формуле $23 + (99 - 1) \cdot 4 = 23 + 392 = 415$.

По формуле суммы первых n членов арифметической прогрессии получаем, что эта сумма равна:

$$\frac{23 + 415}{2} \cdot 99 = 21\,681.$$

б) Первым числом последовательности $\{a_n\}$, большим 15, является 19. Двадцать третье число этой последовательности, большее 15, равно $19 + (23 - 1) \cdot 4 = 19 + 88 = 107$. Поэтому наименьшая искомая сумма равна:

$$19^2 + 23^2 + \dots + 103^2 + 107^2.$$

Запишем эту сумму в виде:

$$\begin{aligned} & (19^2 + 107^2) + (23^2 + 103^2) + (27^2 + 99^2) + \dots + (59^2 + 67^2) + 63^2 = \\ & = (63 - 44)^2 + (63 + 44)^2 + (63 - 40)^2 + (63 + 40)^2 + (63 - 36)^2 + (63 + 36)^2 \dots \\ & \dots + (63 - 8)^2 + (63 + 8)^2 + (63 - 4)^2 + (63 + 4)^2 + 63^2 \end{aligned}$$

Заметим, что $(a - b)^2 + (a + b)^2 = 2(a^2 + b^2)$. Поэтому искомая сумма равна:

$$\begin{aligned} & 2(63^2 + 44^2) + 2(63^2 + 40^2) + 2(63^2 + 36^2) + \dots \\ & \dots + 2(63^2 + 8^2) + 2(63^2 + 4^2) + 2(63^2 + 4^2) + 63^2 = \\ & = 23 \cdot 63^2 + 2(44^2 + 40^2 + \dots + 8^2 + 4^2). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} 44^2 + 40^2 + \dots + 8^2 + 4^2 & = (24 + 20)^2 + (24 - 20)^2 + (24 + 16)^2 + (24 - 16)^2 + \\ & + (24 + 12)^2 + (24 - 12)^2 + (24 + 8)^2 + (24 - 8)^2 + (24 + 4)^2 + (24 - 4)^2 + 24^2 = \\ & = 11 \cdot 24^2 + 2(20^2 + 16^2 + 12^2 + 8^2 + 4^2) = 11 \cdot 24^2 + 2 \cdot 880 = \\ & = 6336 + 1760 = 8096. \end{aligned}$$

Таким образом, искомая сумма равна:

$$23 \cdot 63^2 + 2 \cdot 8096 = 23 \cdot 3969 + 16\,192 = 91\,287 + 16\,192 = 107\,479.$$

в) Да. Преобразуем числитель дроби:

$$\begin{aligned} & (a_1^2 + a_3^2 + \dots + a_{2n-1}^2) - (a_2^2 + a_4^2 + \dots + a_{2n}^2) = \\ & = (a_1^2 - a_2^2) + (a_3^2 - a_4^2) + \dots + (a_{2n-1}^2 - a_{2n}^2) = \\ & = (a_1 - a_2)(a_1 + a_2) + (a_3 - a_4)(a_3 + a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n})(a_{2n-1} + a_{2n}) = \\ & = -4(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{2n-1} + a_{2n}) = \\ & = (-4) \cdot \frac{(2 \cdot a_1 + 4(2n - 1))}{2} \cdot 2n = \end{aligned}$$

$$= (-4) \cdot \frac{(2 \cdot a_1 + 4(2n - 1))}{2} \cdot 2n =$$

$$= (-4) \cdot \frac{(2 + 8n)}{2} \cdot 2n = -8n(1 + 4n).$$

При $n = 100$ получаем дробь $\frac{-800 \cdot 401}{401} = -800$.

sbornik.me

Ответы к тренировочным заданиям**§ 1. Арифметические действия с дробями**

1. 2,15. 2. 0,85. 3. 2. 4. -2. 5. 0,5. 6. 4. 7. 0,75. 8. 5,6. 9. -106. 10. 70. 11. 15,5.
12. 26. 13. -2. 14. -1,15. 15. -0,25. 16. 7,25. 17. 36. 18. 12. 19. 200. 20. 100.
21. 0,025. 22. 0,105. 23. -1,962. 24. -2,969. 25. -0,56. 26. 0,64. 27. 0,285.
28. -1,175. 29. 0,5. 30. 0,5. 31. 0,5. 32. 11,6. 33. 2. 34. 2. 35. 0,2. 36. 0,2.
37. 14. 38. 24. 39. -30,75. 40. 49,5.

§ 2. Простые текстовые задачи

41. 7. 42. 4. 43. 13. 44. 6. 45. 12. 46. 8. 47. 10. 48. 11. 49. 15. 50. 11.
51. 10. 52. 12. 53. 7. 54. 13. 55. 10. 56. 6. 57. 11. 58. 11. 59. 5. 60. 7.
61. 33. 62. 20. 63. 17. 64. 12. 65. 5. 66. 6. 67. 13. 68. 8. 69. 9. 70. 13. 71. 4.
72. 5. 73. 76. 74. 122. 75. 52,08. 76. 96,6. 77. 20. 78. 18. 79. 17. 80. 11.
81. 868. 82. 348,8. 83. 24. 84. 22. 85. 56. 86. 272. 87. 875. 88. 625. 89. 594,3.
90. 182,7. 91. 1931,8. 92. 4282,2. 93. 1378. 94. 20. 95. 25. 96. 175. 97. 74 520.
98. 61 200. 99. 144 000. 100. 21 000. 101. 2730. 102. 2 850. 103. 18 170.
104. 1 625. 105. 12. 106. 8. 107. 27. 108. 12. 109. 13. 110. 22. 111. 5. 112. 23.
113. 2240. 114. 4025. 115. 9 500. 116. 22 500.

§ 3. График функции и элементы статистики

117. 60. 118. 30. 119. 0,6. 120. 12. 121. 400. 122. 31,5. 123. 48. 124. 30.
125. 14. 126. 3. 127. 45,5. 128. 14. 129. 11. 130. 2. 131. 16. 132. 40. 133. 7.
134. 4. 135. 4. 136. 5. 137. 4132. 138. 3142. 139. 4312. 140. 2143. 141. 4123.
142. 3124. 143. 4123. 144. 3214.

§ 4. Выбор наилучшего варианта

145. 3740. 146. 3600. 147. 8750. 148. 74 500. 149. 1832,6. 150. 4131.
151. 2124. 152. 22 528. 153. 21 260. 154. 9750. 155. 2855. 156. 2950.
157. 2,9. 158. 1,6. 159. 2,8. 160. 2,4. 161. 185. 162. 710. 163. 250. 164. 495.
165. 65. 166. 38. 167. 120. 168. 105. 169. 71. 170. 75. 171. 28. 172. 62,11.
173. 10 750. 174. 20 451,6. 175. 20 811. 176. 205 200. 177. 627. 178. 1428.
179. 840. 180. 1060. 181. 249. 182. 389. 183. 6 или 8. 184. 4 или 5. 185. 234
и 345. 186. 135. 187. 156. 188. 156.

§ 5. Текстовые задачи

189. 96. 190. 18. 191. 30. 192. 15. 193. 19. 194. 12. 195. 3. 196. 16. 197. 80.
 198. 30. 199. 17. 200. 24. 201. 350. 202. 1400. 203. 200. 204. 200. 205. 80.
 206. 70. 207. 57. 208. 69,625. 209. 40. 210. 45. 211. 45. 212. 330. 213. 20.
 214. 25. 215. 6. 216. 12. 217. 30. 218. 6. 219. 5. 220. 6,4. 221. 6. 222. 32,2.
 223. 11. 224. 27. 225. 7,5. 226. 375. 227. 40. 228. 6. 229. 4. 230. 40. 231. 30.
 232. 1 562 500.

§ 6. Теория вероятностей

233. 0,25. 234. 0,4. 235. 0,2. 236. 0,4. 237. 0,3. 238. 0,16. 239. 0,45. 240. 0,4.
 241. 0,25. 242. 0,25. 243. 0,25. 244. 0,25. 245. 0,15. 246. 0,92. 247. 0,91.
 248. 0,375. 249. 0,45. 250. 0,16. 251. 0,2. 252. 0,375. 253. 0,14. 254. 0,16.
 255. 0,1. 256. 0,125. 257. 0,87. 258. 0,85. 259. 0,007. 260. 0,35. 261. 0,4.
 262. 0,24. 263. 0,2. 264. 0,8. 265. 0,3125. 266. 0,2. 267. 0,32. 268. 0,125.
 269. 0,5. 270. 0,25. 271. 0,125. 272. 0,0625. 273. 5. 274. 5. 275. 0,17.
 276. 0,08. 277. 0,08. 278. 0,08. 279. 0,12. 280. 0,05. 281. 0,125. 282. 0,08.
 283. 0,14. 284. 0,1. 285. 0,9. 286. 0,72. 287. 0,28. 288. 0,01. 289. 0,18.
 290. 0,12. 291. 0,21. 292. 0,225. 293. 0,006. 294. 0,81. 295. 0,96. 296. 0,94.
 297. 0,02. 298. 0,05. 299. 0,0001. 300. 0,0729. 301. 0,0625. 302. 0,125.
 303. 0,25. 304. 0,25. 305. 0,4. 306. 0,12. 307. 0,15. 308. 0,35. 309. 0,12.
 310. 0,16. 311. 0,52. 312. 0,5. 313. 0,33. 314. 0,28. 315. 0,33. 316. 0,3125.
 317. 0,42. 318. 0,55. 319. 0,43. 320. 0,58. 321. 0,384. 322. 0,352. 323. 0,266.
 324. 0,282.

§ 7. Схема Бернулли. Условная и полная вероятности

325. 0,4. 326. 0,2. 327. 0,24. 328. 0,25. 329. 10. 330. 0,75. 331. 0,6. 332. 1,5.
 333. 2,625. 334. 0,5625. 335. 4,5. 336. 1,6. 337. 0,5. 338. 0,25. 339. 0,75.
 340. 0,5. 341. 0,99. 342. 0,51. 343. 0,992. 344. 0,027. 345. 0,47. 346. 0,7.
 347. 0,18. 348. 0,38. 349. 0,4. 350. 0,14. 351. 0,25. 352. 0,2. 353. 0,75.
 354. 0,4. 355. 0,7. 356. 0,12. 357. 0,11. 358. 0,31. 359. 0,44. 360. 0,16.
 361. 0,08. 362. 0,12. 363. 0. 364. 0,125. 365. 0,5. 366. 0,28. 367. 0,15.
 368. 0,02. 369. 0,11. 370. 0,08. 371. 0,14. 372. 0,145. 373. 0,9. 374. 0,2.
 375. 0,8. 376. 0,1. 377. 0,3. 378. 0,445. 379. 0,875. 380. 0,72. 381. 0,1.
 382. 0,08. 383. 0,125. 384. 0,016. 385. 0,8. 386. 0,75. 387. 0,96. 388. 0,875.
 389. 4. 390. 5. 391. 4. 392. 3. 393. 13,5. 394. 3,5. 395. 2. 396. 0,6. 397. 4,5.
 398. 6,25. 399. 96. 400. 155.

§ 8. Нахождение величины из формулы

401. 270. 402. 162. 403. 6. 404. 7. 405. 3. 406. 12. 407. 4. 408. 0,1. 409. 13.
410. 17. 411. 40. 412. 9. 413. 20. 414. 12. 415. 21. 416. 1,5. 417. 300.
418. 1100. 419. 17. 420. 3.

§ 9. Координатная прямая и числовые промежутки

421. 4. 422. 4. 423. 2. 424. 3. 425. 2413. 426. 2143. 427. 4312. 428. 3142.
429. 4213. 430. 2143. 431. 4321. 432. 2134. 433. 2413. 434. 2413. 435. 4132.
436. 3142. 437. 1342. 438. 4321. 439. 1234. 440. 1324.

§ 10. Уравнения

441. $-0,25$. 442. 15. 443. 32. 444. -16 . 445. 25. 446. 5. 447. $-0,625$.
448. $-0,45$. 449. 5,2. 450. $-2,4$. 451. -1 . 452. 1. 453. 0,6. 454. 2,5. 455. -1 .
456. -2 . 457. 0,5. 458. 0. 459. 1. 460. 0. 461. -3 . 462. 1. 463. -5 . 464. -5 .
465. $-1,75$. 466. 2,5. 467. -5 . 468. -9 . 469. $-3,5$. 470. -6 . 471. 27. 472. 3.
473. -7 . 474. 22. 475. -2 . 476. 2. 477. -11 . 478. 3. 479. 1,2. 480. 3. 481. 3.
482. -1 . 483. 2,5. 484. $-5,5$. 485. -3 . 486. 8. 487. 3,5. 488. 2,5. 489. $-3,75$.
490. 2,25. 491. 8,5. 492. 0. 493. -2 . 494. -1 . 495. 6. 496. 5. 497. 24. 498. 18.
499. 5,25. 500. -11 . 501. 15. 502. 1. 503. 47. 504. 3. 505. 5. 506. 7. 507. 1.
508. 8.

§ 11. Преобразования выражений

509. 36,4. 510. 2,96. 511. $-5,3$. 512. $-0,9$. 513. -5 . 514. $-1,8$. 515. -2 .
516. 2. 517. 0,2. 518. 0,25. 519. 3. 520. 0,5. 521. 0,25. 522. 5. 523. 49.
524. 121. 525. 24. 526. 54. 527. 4. 528. 8. 529. 0,25. 530. 6,25. 531. 0,5.
532. 0,36. 533. 14. 534. 64. 535. 128. 536. 7. 537. 2. 538. -5 . 539. 5. 540. -3 .
541. 7. 542. 11. 543. 4. 544. 49. 545. 25. 546. 8. 547. 147. 548. 2. 549. 2.
550. 3. 551. -1 . 552. -1 . 553. 0,25. 554. 0,25. 555. 2. 556. 0,25. 557. 6.
558. 0,25. 559. 81. 560. 49. 561. 1. 562. 1. 563. 0,125. 564. 0,25. 565. 3.
566. 5. 567. -24 . 568. -5 . 569. 4. 570. -2 . 571. $-0,875$. 572. $-0,75$. 573. 42.
574. 15. 575. 27. 576. 22,5. 577. $-0,25$. 578. $-0,375$. 579. $-1,5$. 580. 0,5.

§ 12. Графики функций на клетчатой бумаге

581. 7. 582. -2 . 583. 3. 584. 6. 585. 2. 586. 12. 587. 2. 588. 2. 589. 18.
590. -2 . 591. 8. 592. -18 . 593. -62 . 594. 730. 595. -2 . 596. -2 . 597. 15.
598. 8. 599. 625. 600. 64. 601. 8. 602. $-3,6$. 603. $-1,4$. 604. $-9,4$.

§ 13. Геометрический смысл производной. Первообразная

605. -2 . 606. 1,5. 607. -2 . 608. $-1,2$. 609. 10. 610. 5. 611. 5. 612. 3.
613. 1243. 614. 4312. 615. 2314. 616. 4321. 617. 3. 618. 3. 619. 6. 620.² -1 .

621. -1. 622. 4. 623. 3. 624. 2. 625. 7. 626. 4. 627. 5. 628. 5. 629. 4. 630. 6.
631. 2. 632. -4. 633. 4. 634. 2. 635. 1. 636. 1. 637. 45. 638. 45. 639. 1.
640. 1. 641. -2. 642. 2. 643. 10,5. 644. 1,5. 645. 1. 646. 2. 647. 1. 648. 0.
649. 9. 650. 18. 651. 6. 652. 8. 653. 7. 654. 18. 655. 18. 656. 21.

§ 14. Исследование функции с помощью производной

657. 2. 658. 2. 659. 6. 660. 0. 661. 2. 662. 1. 663. 1. 664. 9. 665. -15.
666. 4. 667. -6. 668. 2. 669. -40. 670. 4. 671. 44. 672. 24. 673. -1. 674. -1.
675. 51. 676. 1. 677. 3,6. 678. 16. 679. -3. 680. -4. 681. 2020,5. 682. 2007,5.
683. 16. 684. 27. 685. 4. 686. 7. 687. -9. 688. -3.

§ 15. Содержательные задачи из различных областей науки

689. 12. 690. 11. 691. 0,3875. 692. 0,39. 693. 24. 694. 5. 695. 15000.
696. 2400. 697. 1400. 698. 387,5. 699. 30. 700. 60. 701. 4. 702. 80. 703. 25.
704. 60. 705. 30. 706. 30. 707. 60. 708. 60. 709. 0,33. 710. 90. 711. 30.
712. 30. 713. 3. 714. 2,7. 715. 30. 716. 20. 717. 10,4. 718. 45. 719. 8. 720. 5.
721. 0,02. 722. 0,045. 723. 7000. 724. 10000. 725. 3. 726. 0,075. 727. 6,8.
728. 6,875. 729. 49. 730. 5,6. 731. 4. 732. 317,5.

§ 16. Логические задачи

733. 24. 734. 24. 735. 14. 736. 14. 737. 13. 738. 14. 739. 2. 740. 3. 741. 24.
742. 34. 743. 2. 744. 3. 745. 3. 746. 2. 747. 12. 748. 14. 749. 4. 750. 14.
751. 234. 752. 24.

§ 17. Планиметрия: площади фигур

753. 6. 754. 14. 755. 8. 756. 16. 757. 3. 758. 8. 759. 4. 760. 27. 761. 10.
762. 29. 763. 16. 764. 20. 765. 26. 766. 30. 767. 30. 768. 34. 769. 6. 770. 18.
771. 18. 772. 20. 773. 8. 774. 16. 775. 4. 776. 22. 777. 7. 778. 14. 779. 28.
780. 39,5. 781. 5. 782. 20. 783. 16. 784. 8. 785. 0,5. 786. 2,5. 787. 10. 788. 5.

§ 18. Планиметрия: углы и длины

789. 126. 790. 43. 791. 36. 792. 36. 793. 52. 794. 40. 795. 44. 796. 70. 797. 6.
798. 8. 799. 22. 800. 20. 801. 60. 802. 63. 803. 136. 804. 140. 805. 7. 806. 6.
807. 18. 808. 18. 809. 7. 810. 8. 811. 22. 812. 14. 813. 51. 814. 40. 815. 30.
816. 80. 817. 6. 818. 8. 819. 4. 820. 2. 821. 38. 822. 23. 823. 128. 824. 130.
825. 32. 826. 18. 827. 14. 828. 10. 829. 52. 830. 51. 831. 36. 832. 37. 833. 61.
834. 62. 835. 60. 836. 151. 837. 67,5. 838. 72. 839. 117. 840. 36. 841. 4,5.
842. 8. 843. 51. 844. 45. 845. 12. 846. 5. 847. 6. 848. 4,5. 849. 7,5. 850. 2,4.
851. 3,125. 852. 5. 853. 7. 854. 8. 855. 30. 856. 42.

§ 19. Практические задания по планиметрии

857. 3. 858. 4. 859. 36. 860. 20. 861. 1776. 862. 760. 863. 160. 864. 800.
865. 170. 866. 130. 867. 2400. 868. 3300. 869. 8. 870. 13. 871. 12. 872. 15.
873. 3,6. 874. 8. 875. 3,5. 876. 1,5.

§ 20. Тригонометрия, координаты и векторы

877. 0,6. 878. 0,7. 879. 0,8. 880. 0,5. 881. 0,96. 882. 0,28. 883. 0,6. 884. 1,2.
885. 12,75. 886. 17,5. 887. 1,375. 888. 0,375. 889. 4. 890. 0,75. 891. 5. 892. 7.
893. 0,2. 894. 0,96. 895. 0,6. 896. 0,4. 897. 20. 898. 20. 899. 7,5. 900. 20.
901. 16. 902. 12. 903. 13,5. 904. 38,4. 905. 12. 906. 16. 907. 0,35. 908. 0,25.
909. -0,3. 910. -2,2. 911. -0,3. 912. 0,7. 913. 11. 914. 55. 915. -0,6.
916. 0,8. 917. -2. 918. 5. 919. -3. 920. -8. 921. 2,5. 922. 2,5. 923. 3,5.
924. 3. 925. 4. 926. 10. 927. 4. 928. 1. 929. 10. 930. 22. 931. 15. 932. 15.
933. -5. 934. 5. 935. 5. 936. 7. 937. 50. 938. 98. 939. 6. 940. 24.

§ 21. Параллелепипед, призма, пирамида

941. 780. 942. 222. 943. 0,96. 944. 56. 945. 61. 946. 54. 947. 89. 948. 84.
949. 1,5. 950. 1. 951. 60. 952. 60. 953. 160. 954. 174. 955. 134. 956. 90.
957. 3. 958. 1944. 959. 2880. 960. 7. 961. 6. 962. 64. 963. 60. 964. 60.
965. 7. 966. 3,5. 967. 10. 968. 6. 969. 200. 970. 250. 971. 2. 972. 96. 973. 12.
974. 64. 975. 22,5. 976. 100. 977. 4. 978. 10. 979. 3. 980. 4,5. 981. 30.
982. 30. 983. 75. 984. 13,5. 985. 736. 986. 1360. 987. 54. 988. 150. 989. 384.
990. 250. 991. 17,5. 992. 24. 993. 96. 994. 187,5. 995. 10368. 996. 3072.
997. 4. 998. 18. 999. 36. 1000. 25.

§ 22. Цилиндр, конус, шар, комбинации тел

1001. 5. 1002. 324. 1003. 1000. 1004. 1562,25. 1005. 6. 1006. 8. 1007. 7.
1008. 9. 1009. 125. 1010. 72. 1011. 6,25. 1012. 120. 1013. 1125. 1014. 434.
1015. 72. 1016. 243. 1017. 10. 1018. 4. 1019. 12. 1020. 9. 1021. 3600.
1022. 4500. 1023. 16. 1024. 8. 1025. 40. 1026. 19. 1027. 41. 1028. 12.
1029. 64. 1030. 8. 1031. 9. 1032. 16. 1033. 6,25. 1034. 2,25. 1035. 40.
1036. 12. 1037. 9. 1038. 50,41. 1039. 27. 1040. 64. 1041. 48. 1042. 16,5.
1043. 54. 1044. 128. 1045. 6. 1046. 3,75. 1047. 64000. 1048. 27. 1049. 5.
1050. 12,5. 1051. 60. 1052. 21,2. 1053. 10. 1054. 60. 1055. 81. 1056. 242.

§ 23. Тригонометрические уравнения и отбор корней

$$1057. \text{ а) } \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \frac{\pi}{6} + 2m\pi, \quad m \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{5\pi}{6} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \text{ б) } -\frac{7\pi}{2}, -\frac{19\pi}{6}. \quad 1058. \text{ а) } \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \text{ б) } -\pi.$$

1059. а) $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{4}$, $-\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$. 1060. а) $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$;
 б) $-\frac{5\pi}{4}$, $-\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$. 1061. а) $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{14\pi}{3}$.
 1062. а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{17\pi}{3}$. 1063. а) $\frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{3\sqrt{2}}{8} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
 $\frac{5\pi}{4} - \arcsin \frac{3\sqrt{2}}{8} + 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$; $2t\pi$, $t \in \mathbb{Z}$; $\frac{3\pi}{2} + 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$;
 б) $\frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{3\sqrt{2}}{8}$; 0. 1064. а) $-\frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{3\sqrt{2}}{8} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
 $\frac{3\pi}{4} + \arcsin \frac{3\sqrt{2}}{8} + 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$; $2t\pi$, $t \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{2} + 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$.
 б) $\frac{3\pi}{4} + \arcsin \frac{3\sqrt{2}}{8}$; 0; $\frac{\pi}{2}$. 1065. а) πk , $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{4}$, π , $\frac{5\pi}{4}$,
 2π . 1066. а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$. 1067. а) $\frac{\pi n}{2}$,
 $n \in \mathbb{Z}$; б) 0, $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$. 1068. а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$; $k, n \in \mathbb{Z}$;
 б) $\frac{\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{6}$. 1069. а) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $k, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{6}$.
 1070. а) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$; $\frac{\arctg 3}{3} + \frac{\pi n}{3}$; $k, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\arctg 3}{3} - \frac{\pi}{3}$,
 $\frac{\arctg 3}{3}$, $\frac{\pi}{12}$. 1071. а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
 б) $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3}{4}\pi$; $\frac{7\pi}{4}$. 1072. а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. б) $-\frac{\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{4}$.
 1073. а) $\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; б) -5π ; $-\frac{9\pi}{2}$; -4π . 1074. а) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{25\pi}{6}$.
 1075. а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\pm \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{4\pi}{3}$, $-\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{3}$. 1076. а) πn ,
 $\pm \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$; $-\pi$; $-\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{6}$; 0.

§ 24. Стереометрия

1077. $\frac{-9 - 80\sqrt{2}}{161}$. 1078. $-0,875$. 1079. $\frac{16}{3}$. 1080. $\frac{8\sqrt{33}}{11}$.
 1081. $\frac{26}{5\sqrt{67}}$. 1082. $\frac{47}{5\sqrt{16909}}$. 1083. 6. 1084. 60. 1085. $\arctg \frac{4 - \sqrt{7}}{12}$.
 1086. $\arctg \frac{3 + 2\sqrt{2}}{12}$. 1087. $\frac{\sqrt{3}}{18}$. 1088. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. 1089. $\frac{\sqrt{70}}{10}$. 1090. $\frac{\sqrt{58}}{17}$.
 1091. $\frac{9}{73}$. 1092. $\frac{72\sqrt{35}}{5}$. 1093. $\arccos \frac{1}{3}$. 1094. $\frac{\pi}{3}$. 1095. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$. 1096. $3\sqrt{3}$.

§ 25. Неравенства и системы неравенств

1097. $\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}; 3 - \sqrt{2}\right] \cup [3 + \sqrt{2}; +\infty)$. 1098. $\left(1 + \sqrt{5}; \frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right]$.
 1099. (1; 2). 1100. $\left(\frac{3 + \sqrt{21}}{2}; 4\right) \cup (4; +\infty)$.
 1101. $[-16; -2) \cup (-2; -1) \cup \left(-\frac{1}{16}; 0\right)$.
 1102. $(-\infty; -4) \cup (-4; -1) \cup \left[-\frac{1}{3}; -\frac{1}{27}\right)$. 1103. $(0; 1) \cup (\sqrt{3}; 9)$.
 1104. $(0; \sqrt{11}) \cup (4; 11)$. 1105. $(3; +\infty)$. 1106. (3; 9). 1107. {0; 2}. 1108. 0.
 1109. $\{-4; 0\} \cup [2; 3)$. 1110. $[-5; -3] \cup \{0\}$. 1111. $(0; \log_5 2] \cup [5; 6) \cup (6; 7]$.
 1112. $(0; \log_3 2] \cup [6; 7) \cup (7; 8]$. 1113. $(4; +\infty)$. 1114. $(14 + 2\sqrt{51}; +\infty)$.
 1115. $(-2; \log_5 4]$, [1; 3]. 1116. $(-1; 0]$.

§ 26. Планиметрия

1117. $\frac{2499\sqrt{2}}{968}$. 1118. $\frac{11\sqrt{5}}{5}$. 1119. 72. 1120. $\frac{79800}{841}$.
 1121. $\frac{2(13 - 6\sqrt{2})(\sqrt{3} - 1)}{3}$. 1122. $\frac{9(25 - 12\sqrt{2})(\sqrt{3} - 1)}{16}$.
 1123. $\frac{15 \cdot (2 - \sqrt{3})}{2}$. 1124. $\frac{425 \cdot (2 + \sqrt{3})}{16}$. 1125. 2. 1126. 1. 1127. 6.
 1128. $8\sqrt{3}$. 1129. 12,5. 1130. 36. 1131. 5. 1132. 6. 1133. $\frac{5103}{169}$. 1134. $\frac{52}{25}$.
 1135. 30; 60; 90. 1136. 30; 60; 90.

§ 27. Экономические задачи

1137. 4. 1138. 520 000. 1139. 19,89. 1140. 19,35. 1141. 12. 1142. 15.
 1143. 20 тыс. рублей. 1144. 1600. 1145. 480. 1146. 21. 1147. 5184000.

1148. 2 395 800. 1149. 5 000. 1150. 4. 1151. 2,6 млн рублей. 1152. 2,9 млн рублей. 1153. 23. 1154. 7. 1155. 13. 1156. $\frac{39}{361} < p < \frac{37}{324}$.

§ 28. Уравнения и неравенства с параметром

1157. $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{5}{3}; \frac{11}{6}\right)$. 1158. $[3 - \sqrt{3}; 2,5] \cup [3,5; 3 + \sqrt{3}]$.

1159. $(-\sqrt[4]{2}; 0) \cup (0; \sqrt[4]{2})$. 1160. $(-3; -2) \cup (2; 3)$. 1161. $\pm\sqrt{2}$.

1162. $\frac{5 \pm 2\sqrt{2}}{2}$. 1163. $a < -8$ или $a > 5$. 1164. $a < -15$;

$a > 10$. 1165. $[-2; -1]$. 1166. $\left[\frac{13}{4}; 6\right]$. 1167. $a \in \left(-1; -\frac{7}{9}\right]$.

1168. $[-2,49; -2)$. 1169. $\left(\frac{9 - 10\sqrt{2}}{7}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(2; \frac{9 + 10\sqrt{2}}{7}\right)$.

1170. $\left(\frac{8 - 9\sqrt{2}}{14}; -\frac{1}{5}\right) \cup \left(1; \frac{8 + 9\sqrt{2}}{14}\right)$. 1171. $(0,25; 0,5] \cup \{0\}$.

1172. $\left[-\frac{3}{2}; -\frac{3}{8}\right) \cup \{0\}$. 1173. $13 - \sqrt{50}; 8; 3 + \sqrt{50}$.

1174. $-5 - 4\sqrt{2}; -9; -13 + 4\sqrt{2}$. 1175. $(3; +\infty)$. 1176. $(1; +\infty)$.

§ 29. Исследовательские задачи

1177. а) 83; б) нет; в) 64. 1178. а) 75; б) да; в) 123. 1179. а) нет; б) да;

в) 1. 1180. а) нет; б) да; в) $\frac{14}{9}$. 1181. а) 4; б) нет; в) нет. 1182. а) 4; б) нет;

в) нет. 1183. а) 8748; б) 252; в) 2624. 1184. а) 4374; б) 3584; в) 6656.

1185. а) можно; б) нельзя; в) можно. 1186. а) можно; б) нельзя; в) можно.

1187. а) да; б) нет; в) 6. 1188. а) да; б) нет; в) 6. 1189. а) 57; б) 68; в) 35.

1190. а) 77; б) 80; в) 47. 1191. а) 15 625; б) 1545; в) 10 626. 1192. а) 4096;

б) 1458; в) 8855. 1193. а) нет; б) да; в) 198. 1194. а) нет; б) да; в) 187.

1195. а) 21 681; б) 107 479; в) да. 1196. а) 25 397; б) 4 273 830; в) да.

Ответы к заданиям для контроля

§ 1. Арифметические действия с дробями

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|-----|--------|-----|-------|-----|
| Вар. 1 | 0,6 | -0,001 | -16 | -3,15 | -15 |
| Вар. 2 | 0,6 | -0,001 | -8 | -2,45 | 36 |
| Вар. 3 | 23 | 2 | 87 | 10 | 20 |
| Вар. 4 | 3 | 2 | 53 | 10 | 50 |

§ 2. Простые текстовые задачи

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|----|----|-----|--------|--------|
| Вар. 1 | 7 | 6 | 80 | 69 300 | 15 000 |
| Вар. 2 | 8 | 6 | 456 | 15 | 2000 |
| Вар. 3 | 11 | 22 | 1 | 7 | 11 200 |
| Вар. 4 | 10 | 3 | 56 | 15 | 15 |

§ 3. График функции и элементы статистики

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|----|----|----|-----|------|
| Вар. 1 | 7 | 6 | 32 | 3 | 1342 |
| Вар. 2 | 5 | 25 | 2 | 8,5 | 3421 |
| Вар. 3 | 3 | 13 | 4 | 12 | 4123 |
| Вар. 4 | 10 | 20 | 1 | 4 | 3421 |

§ 4. Выбор наилучшего варианта

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|--------|-----------|--------|--------|-----------|
| Вар. 1 | 24 480 | 209 440 | 700 | 62,5 | 7 |
| Вар. 2 | 30 600 | 5900 | 95 550 | 25 375 | 256 |
| Вар. 3 | 13 600 | 97 200 | 5200 | 65 190 | 135 и 145 |
| Вар. 4 | 22 | 1 207 800 | 20 610 | 1173 | 56 |

§ 5. Текстовые задачи

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|-----|----|-----|------|-----|
| Вар. 1 | 120 | 21 | 14 | 600 | 35 |
| Вар. 2 | 75 | 16 | 20 | 22,5 | 513 |
| Вар. 3 | 55 | 2 | 5 | 18 | 10 |
| Вар. 4 | 36 | 20 | 1,5 | 20 | 5,9 |

§ 6. Теория вероятностей

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|-------|-------|--------|-------|--------|
| Вар. 1 | 0,486 | 0,25 | 0,9936 | 0,19 | 0,088 |
| Вар. 2 | 0,925 | 0,16 | 0,251 | 0,125 | 0,1056 |
| Вар. 3 | 0,8 | 0,375 | 0,47 | 0,084 | 0,02 |
| Вар. 4 | 0,65 | 0,25 | 0,79 | 0,06 | 0,16 |

§ 7. Схема Бернулли. Условная и полная вероятности

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|-------|-------|--------|------|-------|
| Вар. 1 | 0,1 | 0,45 | 0,025 | 129 | 0,07 |
| Вар. 2 | 0,625 | 9,5 | 0,0125 | 0,8 | 0,625 |
| Вар. 3 | 0,5 | 0,975 | 0,33 | 0,55 | 0,504 |
| Вар. 4 | 0,6 | 0,98 | 6,875 | 0,95 | 0,625 |

§ 8. Нахождение величины из формулы

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|--------|------|--------|------|-------|
| Вар. 1 | 35 | 15 | 1,2 | 12,5 | 0,125 |
| Вар. 2 | 300 | 28,4 | 4500 | 4 | 22 |
| Вар. 3 | 24 200 | 40 | -0,625 | 21 | 0,5 |
| Вар. 4 | 405 | 60 | 5 | 4 | -0,5 |

§ 9. Координатная прямая и числовые промежутки

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|------|------|------|------|------|
| Вар. 1 | 4312 | 2143 | 3142 | 3412 | 3412 |
| Вар. 2 | 2314 | 4312 | 2341 | 3142 | 1342 |
| Вар. 3 | 4321 | 4321 | 4231 | 1342 | 1234 |
| Вар. 4 | 2413 | 2341 | 2314 | 4321 | 3241 |

§ 10. Уравнения

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|------|-------|----|------|------|
| Вар. 1 | 18 | 8,5 | 7 | -3,8 | -2 |
| Вар. 2 | -42 | 2,625 | -6 | 5 | -2,5 |
| Вар. 3 | -507 | -2 | -2 | -7,6 | 3 |
| Вар. 4 | 118 | 9 | 2 | -5 | 1,8 |

§ 11. Преобразования выражений

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|------|------|----|----|-----|
| Вар. 1 | 0,25 | 0,16 | 45 | 3 | -18 |
| Вар. 2 | 243 | 28 | 7 | 25 | 4 |
| Вар. 3 | 3 | 144 | 3 | 2 | 8 |
| Вар. 4 | 539 | 2 | 9 | 8 | -8 |

§ 12. Графики функций на клетчатой бумаге

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|------|------|-------|------|-----|
| Вар. 1 | 397 | -9 | -4 | 5 | 3 |
| Вар. 2 | 50 | 1 | 10 | 4 | -1 |
| Вар. 3 | -359 | 10,5 | 45,32 | 1024 | -2 |
| Вар. 4 | -288 | 11 | -2 | 729 | -31 |

§ 13. Геометрический смысл производной. Первообразная

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|------|-----|---|------|--------|
| Вар. 1 | 0 | 1 | 2 | 0,75 | 8,8125 |
| Вар. 2 | 27 | 3 | 8 | 1 | 11,5 |
| Вар. 3 | -4 | 2 | 3 | 2 | 9 |
| Вар. 4 | -5,5 | -14 | 6 | 2 | 27 |

§ 14. Исследование функции с помощью производной

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|-----|----|------|----|-----|
| Вар. 1 | 50 | 10 | 2 | 31 | 30 |
| Вар. 2 | -6 | 2 | -88 | -3 | 36 |
| Вар. 3 | 2 | 8 | -146 | 80 | -22 |
| Вар. 4 | 110 | 15 | -14 | 11 | 2 |

§ 15. Содержательные задачи из различных областей науки

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|--------|------|-----|-----|------|
| Вар. 1 | 0,3 | 3,75 | 50 | 15 | 1,6 |
| Вар. 2 | 10 | 2,2 | 300 | 120 | 1800 |
| Вар. 3 | 2000 | 80 | 90 | 45 | 2,5 |
| Вар. 4 | 0,5875 | 5 | 20 | 45 | 8,8 |

§ 16. Логические задачи

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|----|----|----|-----|----|
| Вар. 1 | 14 | 2 | 4 | 23 | 13 |
| Вар. 2 | 13 | 14 | 34 | 124 | 3 |
| Вар. 3 | 23 | 34 | 24 | 23 | 23 |
| Вар. 4 | 13 | 3 | 34 | 34 | 1 |

§ 17. Планиметрия: площади фигур

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|----|------|----|-----|-------|
| Вар. 1 | 10 | 17,5 | 2 | 3 | 15 |
| Вар. 2 | 15 | 6 | 18 | 3 | 12 |
| Вар. 3 | 8 | 12 | 6 | 10 | 3,375 |
| Вар. 4 | 12 | 8 | 70 | 7,5 | 21 |

§ 18. Планиметрия: углы и длины

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|----|-----|-----|-----|----|
| Вар. 1 | 42 | 122 | 110 | 6 | 21 |
| Вар. 2 | 52 | 70 | 19 | 20 | 5 |
| Вар. 3 | 30 | 36 | 52 | 107 | 12 |
| Вар. 4 | 27 | 70 | 14 | 5 | 2 |

§ 19. Практические задания по планиметрии

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|------|------|-----|-----|-----|
| Вар. 1 | 17,5 | 153 | 1,8 | 108 | 30 |
| Вар. 2 | 0,1 | 121 | 2,5 | 200 | 300 |
| Вар. 3 | 28 | 2000 | 12 | 40 | 600 |
| Вар. 4 | 30 | 740 | 550 | 120 | 700 |

§ 20. Тригонометрия, координаты и векторы

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|-----|------|------|----|----|
| Вар. 1 | 0,6 | 3,25 | 1,75 | 10 | 64 |
| Вар. 2 | 4 | 3,25 | 33 | 2 | 12 |
| Вар. 3 | 0,9 | 0,6 | 56 | 2 | 0 |
| Вар. 4 | 0,9 | 0,8 | 24 | 10 | 20 |

§ 21. Параллелепипед, призма, пирамида

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|------|-----|----|----|------|
| Вар. 1 | 1040 | 60 | 2 | 3 | 0,96 |
| Вар. 2 | 9 | 45 | 90 | 12 | 45 |
| Вар. 3 | 27 | 45 | 60 | 13 | 9 |
| Вар. 4 | 84 | 0,2 | 90 | 12 | 13 |

§ 22. Цилиндр, конус, шар, комбинации тел

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|-----|-----|----|------|------|
| Вар. 1 | 4 | 1 | 18 | 9 | 6,25 |
| Вар. 2 | 24 | 180 | 9 | 8 | 3 |
| Вар. 3 | 120 | 48 | 12 | 2,25 | 25 |
| Вар. 4 | 7 | 12 | 5 | 5 | 89 |

§ 23. Тригонометрические уравнения и отбор корней

Вариант 1.

1. а) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}; \frac{3\pi}{4} + 2m\pi, m \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{3\pi}{4}.$

2. а) $-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{\pi}{4}.$

3. а) $-\arctg \frac{3}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z};$ б) $-\arctg \frac{3}{2} - \pi.$

4. а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{\pi}{6}.$

5. а) $-\frac{1}{3} + m, m \in \mathbb{Z};$ б) $-4\frac{1}{3}; -3\frac{1}{3}; -2\frac{1}{3}.$

Вариант 2.

1. а) $\pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ б) $\frac{\pi}{4}.$

2. а) $-\frac{\pi}{3} + 3k\pi, k \in Z$; б) $-\frac{\pi}{3}$.

3. а) $-\arctg 3 + k\pi, k \in Z$; б) $-\arctg 3 - \pi, -\arctg 3$.

4. а) $k\pi, k \in Z$ б) $0; \pi$.

5. а) $-\frac{1}{4} + m, m \in Z$; б) $-\frac{17}{4}; -\frac{13}{4}; -\frac{9}{4}$.

Вариант 3.

1. а) $\frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi k}{5}, k \in Z$; $\frac{-2\pi}{9} + \frac{2\pi m}{3}, m \in Z$ б) $\frac{-2\pi}{9}, \frac{-4\pi}{15}, \frac{2\pi}{15}$.

2. а) $-\frac{\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + 2m\pi, m \in Z, \frac{3\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + 2s\pi, s \in Z$;

б) $-\frac{\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

3. а) $k\pi, k \in Z, \pm\frac{\pi}{3} + m\pi, m \in Z$; б) $0; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}$.

4. а) $\frac{k\pi}{5}, k \in Z; \frac{\pi}{20} + \frac{m\pi}{5}, m \in Z$; б) $\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{20}$.

5. а) $-\frac{\pi}{2} + 2m\pi, m \in Z, \pi + 2s\pi, s \in Z$; б) $-7\pi; -\frac{13\pi}{2}$.

Вариант 4.

1. а) $\frac{\pi}{15} + \frac{2\pi k}{5}, k \in Z; \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi m}{3}, m \in Z$; б) $\frac{-71\pi}{15}$.

2. а) $\frac{\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right) + 2\pi m, m \in Z, \frac{5\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right) + 2\pi s, s \in Z$;

б) $\frac{\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$.

3. а) $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z, \pm\frac{\pi}{3} + m\pi, m \in Z$ б) $\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}$.

4. а) $\frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{5}, k \in Z; \frac{\pi}{10} + \frac{m\pi}{5}, m \in Z$; б) $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{10}, \frac{9\pi}{20}$.

5. а) $\frac{3\pi}{2} + 2m\pi, m \in Z, 2s\pi, s \in Z$; б) $-6\pi; -\frac{13\pi}{2}$.

§ 24. Стереометрия

Вариант 1.

1. $\frac{11}{14}$. 2. $\frac{29}{10\sqrt{67}}$. 3. $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$. 4. $\frac{5}{\sqrt{37}}$. 5. 60.

Вариант 2.

1. $\frac{99 + 40\sqrt{2}}{161}$. 2. $\frac{25}{\sqrt{16909}}$. 3. $\operatorname{arctg} 2$. 4. $\frac{\sqrt{10}}{4}$. 5. $\frac{1}{3}$.

Вариант 3.

1. $\frac{48}{\sqrt{41}}$. 2. $12\sqrt{3}$. 3. $\frac{9\sqrt{10}}{2}$. 4. $\frac{29}{67}$. 5. $3\sqrt{3}$.

Вариант 4.

1. $\frac{8\sqrt{33}}{11}$. 2. $36\sqrt{3}$. 3. $8\sqrt{3}$. 4. $\sqrt{27}$. 5. 3.

§ 25. Неравенства и системы неравенств

Вариант 1.

1. $\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}; 4\right]$. 2. $(-\infty; -4) \cup \left(-1; -\frac{1}{4}\right)$. 3. $[4; +\infty)$.
4. $(-4; -3) \cup (2; 3)$. 5. $(27; 14 + \sqrt{170}]$.

Вариант 2.

1. $(1; 3 - \sqrt{2}) \cup \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}; 3 + \sqrt{2}\right]$. 2. $(-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; -\frac{1}{3}\right]$.
3. $(4; 8]$. 4. $(4; 5)$. 5. $\left(5; \frac{5+\sqrt{29}}{2}\right]$.

Вариант 3.

1. $(1; \log_5 24]$. 2. $[\sqrt[3]{3}; 3] \cup [27; +\infty)$. 3. $(-0,25; \log_3 10) \cup (2,25; +\infty)$.
4. $(0; 1) \cup \left[2; \frac{11-\sqrt{45}}{2}\right)$. 5. $(-2; 0] \cup [4; 5)$.

Вариант 4.

1. $(2; \log_2 5]$. 2. $\left(0; \frac{1}{64}\right] \cup \{2\}$. 3. $(-0,25; \log_4 10) \cup (2,25; +\infty)$. 4. $(0; 1)$.
5. $(1; \log_3 10]$.

§ 26. Планиметрия

Вариант 1.

1. 17. 2. 16,128. 3. $\frac{32(\sqrt{3}+2)}{3}$. 4. $15\sqrt{4-2\sqrt{2}}$. 5. $\frac{25}{2}(1+\sqrt{3})$.

Вариант 2.

1. $\frac{25\sqrt{3}}{3}$. 2. $\frac{30\,600}{2197}$. 3. $72(2+\sqrt{3})$. 4. $\sqrt{2}$. 5. 81.

Вариант 3.

1. 8. 2. 60. 3. $\frac{6}{\sqrt{7}}$. 4. $\frac{25}{6}$. 5. 66.

Вариант 4.

1. $18+2\sqrt{17}$. 2. $-\frac{24}{7}$. 3. $\frac{27\sqrt{3}}{19}$. 4. $\frac{289}{72}$. 5. 84.

§ 27. Экономические задачи

Вариант 1.

1. 15. 2. 20. 3. 5. 4. 5 010. 5. 48 000.

Вариант 2.

1. 160 000. 2. 10. 3. 12 000 000. 4. 4 480. 5. 2.

Вариант 3.

1. 29,025. 2. 1650. 3. 4 000 000. 4. 5. 5. 10.

Вариант 4.

1. 27,3. 2. 2928. 3. 3 500 000. 4. 6. 5. $\frac{31}{225} < p < \frac{29}{196}$.

§ 28. Задания с параметрами

Вариант 1.

1. $(-1; 1)$. 2. $(-\infty; 5) \cup (5; 15)$. 3. $\sqrt{2}; \frac{97}{60}$. 4. $(-\infty; \frac{3}{11})$. 5. 0; 1; 2.

Вариант 2.

1. $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$. 2. $(-6; -2] \cup [1; 2) \cup (2; 8)$. 3. $[4,5; 5)$. 4. $(\frac{4}{5}; +\infty)$.

5. 0; 1; 2.

Вариант 3.

1. $-\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}$. 2. $(-9; -7) \cup (-7; 47]$. 3. $(1 - \frac{\sqrt{5}}{2}; +\infty)$.

4. $(-\infty; \frac{1}{3}) \cup \{\frac{3}{8}\} \cup (\frac{2}{5}; +\infty)$. 5. -4; -5; -6.

Вариант 4.

1. $-6; -2$. 2. $[-17,25; -17) \cup (-17; -5]$. 3. $(\frac{3}{4}; +\infty)$.
4. $(-\infty; \frac{3}{4}) \cup (\frac{3}{4}; +\infty)$. 5. 2.

§ 29. Исследовательские задачи**Вариант 1.**

1. а) нет; б) да; в) $\frac{7}{9}$. 2. а) 9; б) нет; в) нет. 3. а) 2673; б) 459; в) 3168.
4. а) 73; б) 60; в) 33. 5. а) нет; б) да; в) 63.

Вариант 2.

1. а) нет; б) да; в) 1,5. 2. а) 15; б) нет; в) нет. 3. а) 2187; б) 243;
в) 2439. 4. а) 60; б) 64; в) 24. 5. а) нет; б) да; в) 77.

Вариант 3.

1. а) 100; б) 72; в) 48. 2. а) нельзя; б) можно; в) можно. 3. а) нет;
б) нет; в) 3. 4. а) 16384; б) 5103; в) 816. 5. а) 75900; б) 9200864;
в) да.

Вариант 4.

1. а) 1024; б) 19; в) да. 2. а) нельзя; б) можно; в) можно. 3. а) нет;
б) нет; в) 4. 4. а) 65536; б) 6561; в) 1140. 5. а) 139680; б) 590240;
в) да.