ЕГЭ. Математика. Профильный уровень.

ЗАДАЧИ НА ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Виды задач

- Начала теории вероятностей Классическое определение вероятности
- Вероятности сложных событий Теоремы о вероятностях событий

Начала теории вероятностей

- Классическое определение вероятности

Вероятностью события А называется **отношение числа благоприятных данному событию m исходов опыта к числу n всех его исходов**. То есть, P(A) = m/n .

Примеры задач 1

- В среднем из 1400 садовых насосов, поступивших в продажу, 7 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Решение: В среднем из 1400 садовых насосов, поступивших в продажу, $1400 - 7 = 1393$ не подтекают. Значит, вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает, равна $\frac{1393}{1400} = 0{,}995$

Ответ: 0,995.

Примеры задач 2

- На борту самолёта 12 кресел расположены рядом с запасными выходами и 18 — за перегородками, разделяющими салоны. Все эти места удобны для пассажира высокого роста. Остальные места неудобны. Пассажир В. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру В. достанется удобное место, если всего в самолёте 300 мест.

РЕШЕНИЕ: В самолете $12 + 18 = 30$ мест удобны пассажиру В., а всего в самолете 300 мест. Поэтому вероятность того, что пассажиру В. достанется удобное место равна $30 : 300 = 0{,}1$.

Ответ: 0,1.

Примеры задач 3

- Вероятность того, что новый DVD-проигрыватель в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,045. В некотором городе из 1000 проданных DVD-проигрывателей в течение года в гарантийную мастерскую поступила 51 штука. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

РЕШЕНИЕ: Частота (относительная частота) события «гарантийный ремонт» равна $51 : 1000 = 0,051$. Она отличается от предсказанной вероятности на 0,006.

ОТВЕТ: 0,006

Примеры задач 4

- Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 бадминтонистов, среди которых 16 спортсменов из России, в том числе Игорь Чаев. Какова вероятность того, что в первом туре Игорь Чаев будет играть с каким-либо бадминтонистом из России.

РЕШЕНИЕ: В первом туре Игорь Чаев может сыграть с $76 - 1 = 75$ бадминтонистами, из которых $16 - 1 = 15$ из России. Значит, вероятность того, что в первом туре Игорь Чаев будет играть с каким-либо бадминтонистом из России, равна $\frac{15}{75} = 0{,}2$

ОТВЕТ: 0,2

Вероятности сложных событий

Теоремы о вероятностях событий

1. **Теорема**. Вероятность произведения двух независимых событий *A* и *B* равна произведению этих вероятностей: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.
2. **Теорема**. Вероятность суммы двух несовместных событий *A* и *B* равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B) = P(A) + P(B)$.
3. **Теорема**. Вероятность произведения двух зависимых событий *A* и *B* равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденного в предположении, что первое событие уже наступило: $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$.

Вероятности сложных событий

Теоремы о вероятностях событий

4. **Теорема**. Вероятность суммы двух совместных событий *A* и *B* равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения:

$P(A + B) = P(A) + P(B) – P(AB)$.

5. Для многократно повторяемых опытов справедлива формула Бернулли:

$P_{m,\,n} = C_n^m \bullet p^m \bullet q^{n-m}$, где m — число удачных исходов среди проводимых *n* опытов, *p* — вероятность наступления благоприятного исхода в единичном опыте, $q = 1 – p$.

6. Два события называются *противоположными*, если в данном испытании они несовместны и одно из них обязательно происходит. Вероятности противоположных событий в сумме дают 1.

Примеры задач 5

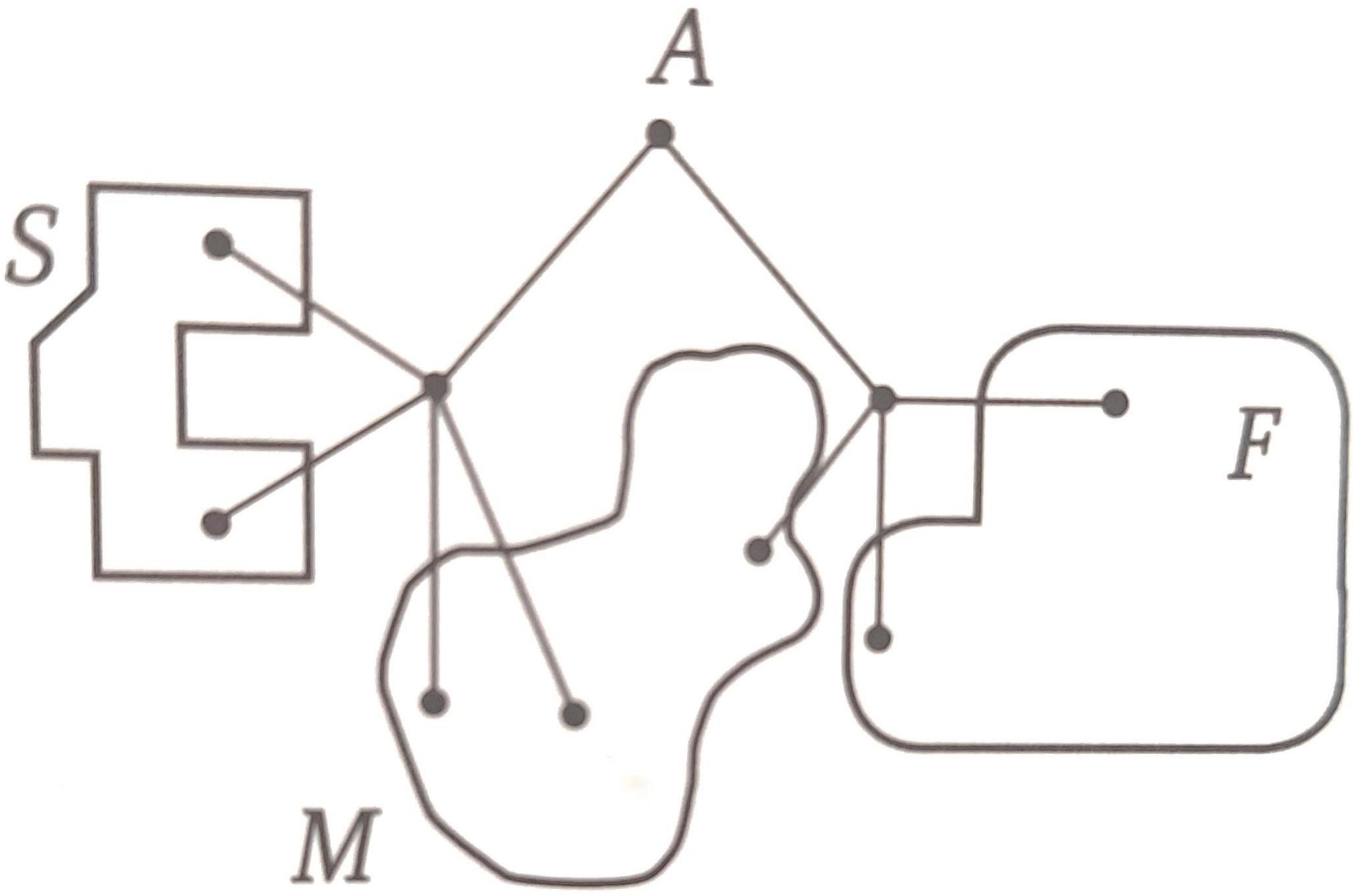
Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,52. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

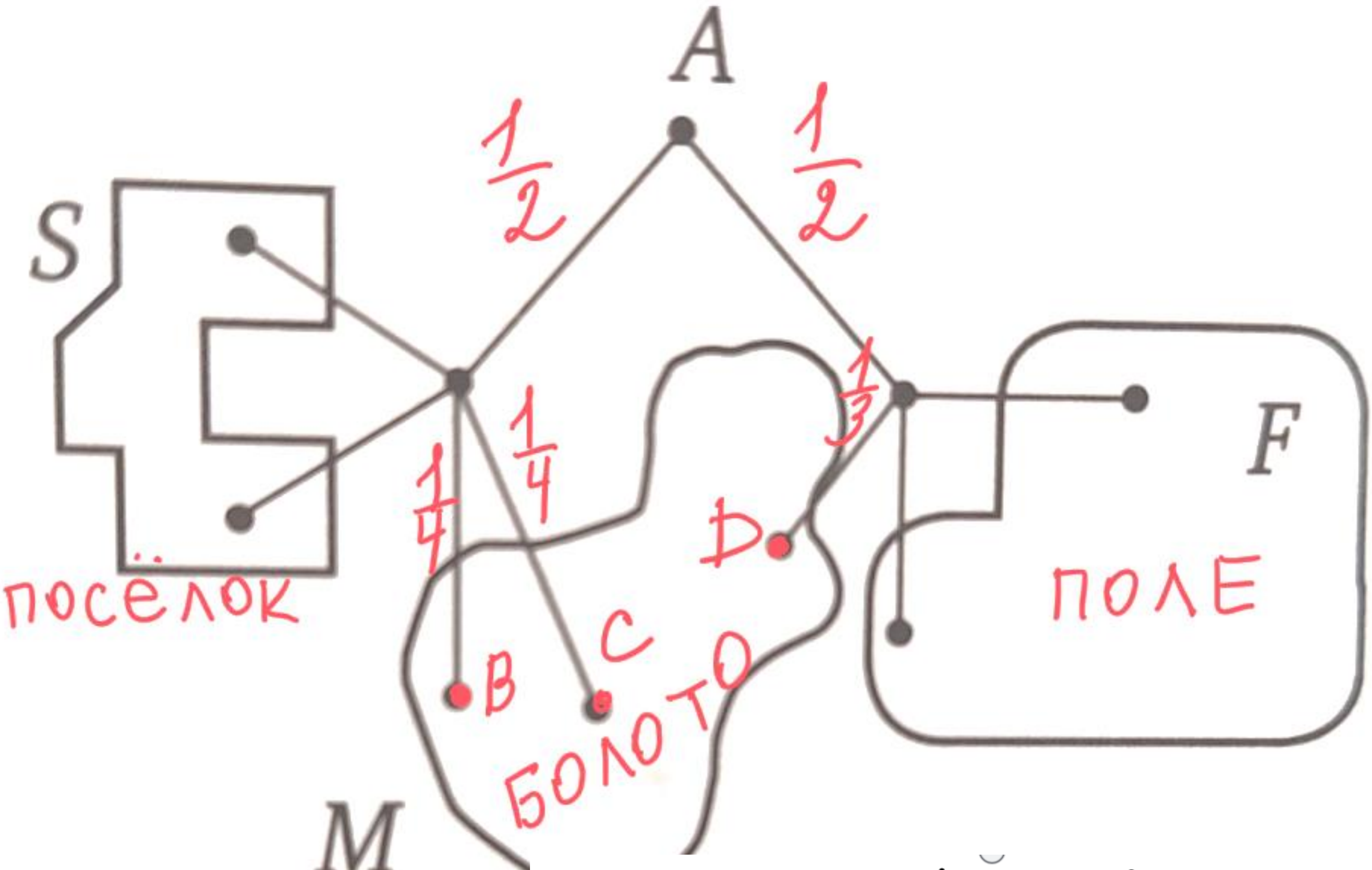
РЕШЕНИЕ: Возможность выиграть первую и вторую партию не зависят друг от друга. Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей: $0{,}52 \cdot 0{,}3 = 0{,}156$.

ОТВЕТ: 0,156

Вспомогательная задача «ПРО БОЛОТО»

Павел Иванович совершает прогулку из точки A по дорожкам парка. На каждой развилке он наудачу выбирает следующую дорожку, не возвращаясь обратно. Схема дорожек показана на рисунке. Часть маршрутов проходит к посёлку S, другие – в поле F или болото M. Найдите вероятность, что Павел Иванович забредёт в болото.


A
S
F
M



$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$$

Примеры задач 6

Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется *положительным*. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 5% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

РЕШЕНИЕ:

0,95*0,01+0,05*0,9=0,0545

ОТВЕТ: 0,0545

Примеры задач 7

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

РЕШЕНИЕ: $0{,}02*0{,}99+0{,}98*0{,}01=0{,}0296$

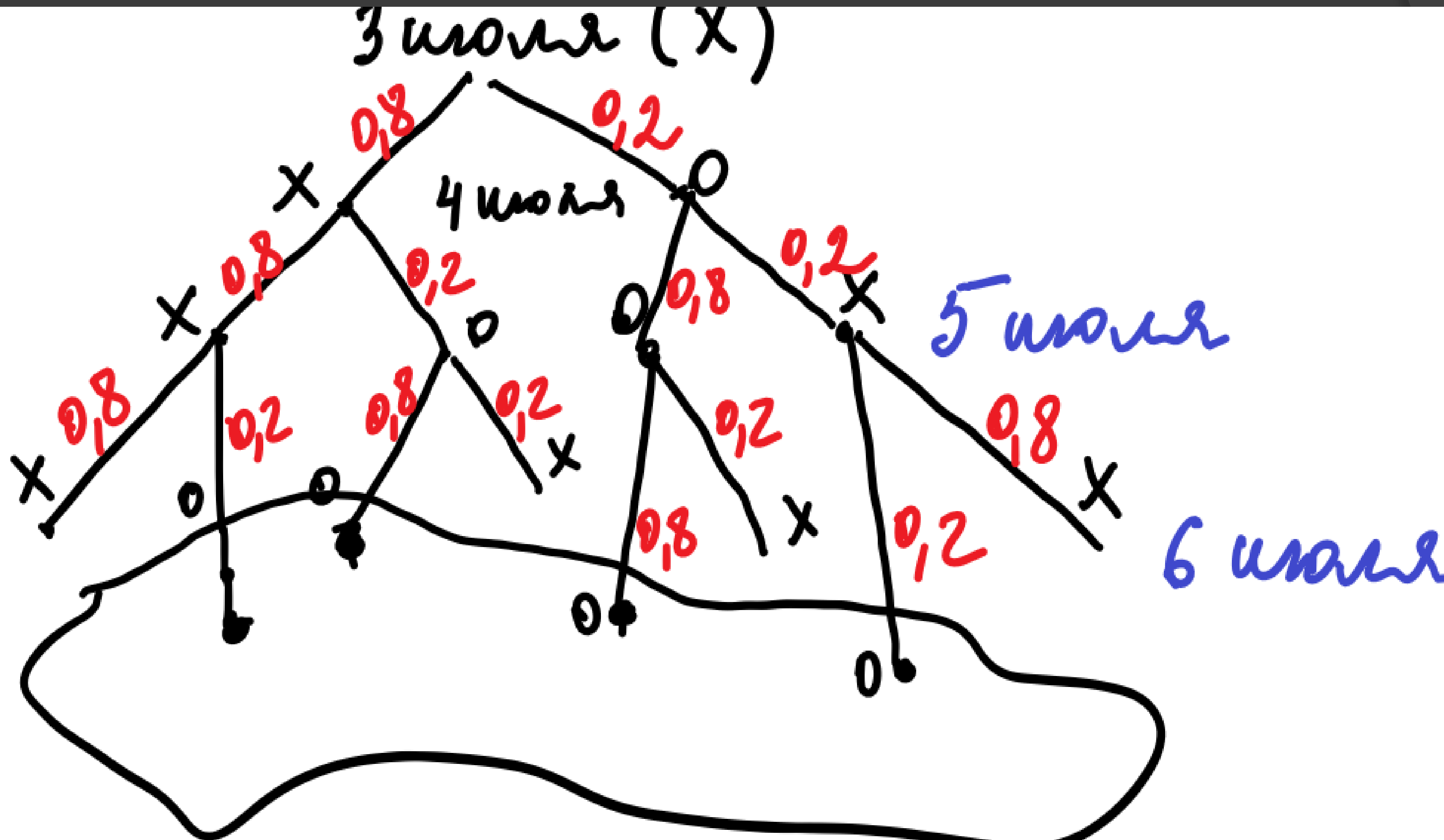
ОТВЕТ:0,0296.

Примеры задач 8

В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 3 июля, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля в Волшебной стране будет отличная погода.

ОТВЕТ: 0,392

$$0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2+0{,}8\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8+0{,}2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8+0{,}2\cdot 0{,}2\cdot 0{,}2$$



Примеры задач 9

Маша коллекционирует принцесс из Киндер-сюрпризов. Всего в коллекции 10 разных принцесс, и они равномерно распределены, то есть в каждом очередном Киндер-сюрпризе может с равными вероятностями оказаться любая из 10 принцесс. У Маши уже есть две разные принцессы из коллекции. Какова вероятность того, что для получения следующей принцессы Маше придётся купить ещё 2 или 3 шоколадных яйца?

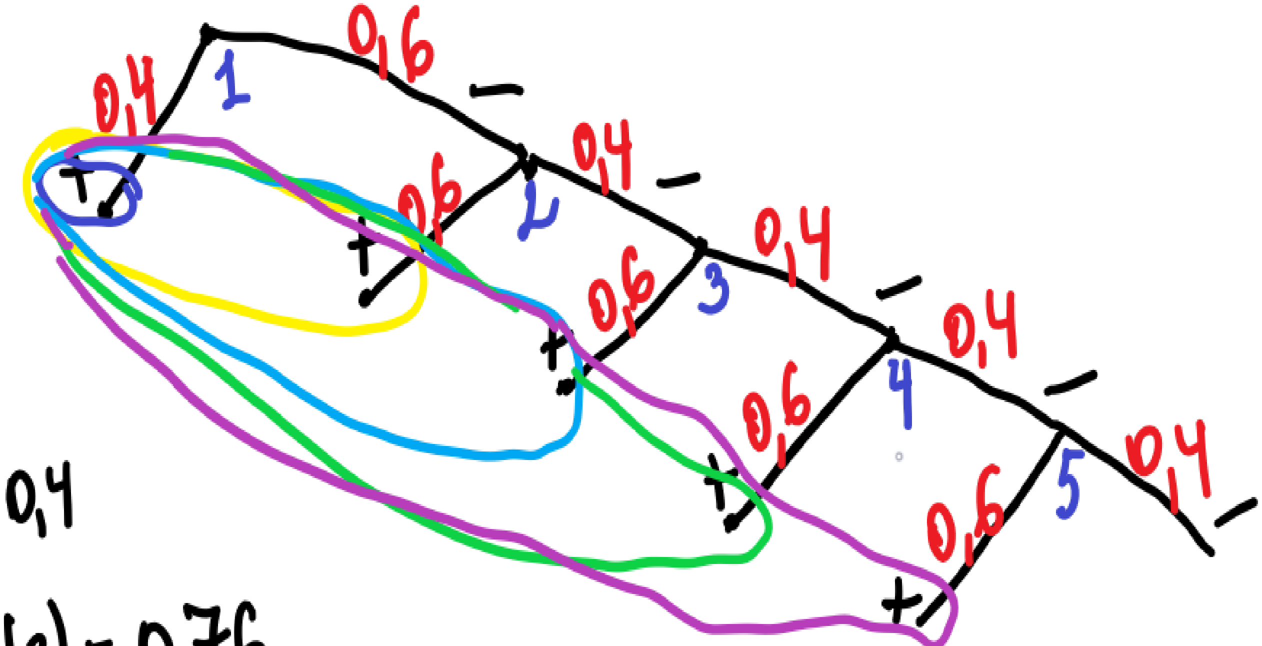
РЕШЕНИЕ: вероятность получения новой принцессы равна $\frac{8}{10}$, а вероятность противоположного события – получение старой принцессы $\frac{2}{10}$. Вероятность того, что для получения следующей принцессы Маше придётся купить 2 шоколадных яйца, равна 0,2*0,8=0,16. Вероятность того, что для получения следующей принцессы Маше придётся купить 3 шоколадных яйца, равна 0,2*0,2*0,8=0,032. Таким образом, искомая вероятность — 0,16 + 0,032 = 0,192.

ОТВЕТ: 0,192

Примеры задач 10

При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,4, а при каждом последующем — 0,6. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98? *В ответе укажите наименьшее необходимое количество выстрелов.*

ОТВЕТ: 5



1) $P(1)=0{,}4$

2) $P(1)+P(2)=0{,}76$

3) $P(1)+P(2)+P(3)=0{,}76+0{,}6\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6=0{,}904$

4) $P(1)+P(2)+P(3)+P(4)=0{,}904+0{,}6\cdot 0{,}4\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6=0{,}9616$

5) $P(1)+\ldots+P(5)=0{,}98464 \geqslant 0{,}98$ Ответ: 5